Sistemi lineari tempo invarianti

$$\dot{\Phi} = A\Phi, \quad \Phi\left(0^{+}\right) = \mathbb{I}$$

$$\vee$$

$$\dot{\Phi} = A\Phi + \mathbb{I}\delta(t), \quad \Phi\left(0^{-}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

$$\Phi(t) = e^{-At}, \quad t > 0$$

$$x = \Phi x_0 + \int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau$$

$$y = C\Phi x_0 + C\int_0^t \Phi(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau + Du$$

$$y = C\Phi x_0 + \int_0^t \left[C\Phi(t-\tau)B + D\delta(t-\tau)\right] u(\tau)\, d\tau$$

$$H(s) = C\left(s\mathbb{I} - A\right)^{-1} B + D \longleftrightarrow h(t) = C\Phi(t)B + D\delta(t)$$

$$Y(s) = H(s)U(s), \qquad (x_0 = 0) \longleftrightarrow y = \int_0^t h(t-\tau)u(\tau)\, d\tau, \qquad (x_0 = 0)$$

Posizionamento dei poli

Forma canonica di controllabilità

Consideriamo una generica funzione di trasferimento tra un ingresso u di un sistema e un'uscita y:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}$$

Si noti che si è considerato, senza perdere di generalità, unitario il coefficiente di s^n.
Si cerca di determinare le matrici A, B, C, D del sistema nello spazio degli stati. Si arriverà, per le scelte fatte, ad una forma particolare. Si può riscrivere:

$$G(s)=\frac{Z(s)}{U(s)}\frac{Y(s)}{Z(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n}\left(b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n\right)$$

Z(s) è una funzione generica. Possiamo allora arbitrariamente assegnare:

$$\frac{Z(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n} \tag{1.1}$$

$$\frac{Y(s)}{Z(s)}=b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n \tag{1.2}$$

Da cui, considerando la (1.1):

$$U(s)=Z(s)\left(s^n+a_1s^{n-1}+\ldots+a_n\right)$$

Antitrasformando:

$$u(t)=D^nz(t)+a_1D^{n-1}z(t)+\ldots+a_nz(t)$$

E esplicitando la massima derivata:

$$D^nz(t)=-a_1D^{n-1}z(t)-\ldots-a_nz(t)+u(t) \tag{1.3}$$

Definendo lo stato (arbitrariamente) come l'insieme di z e delle sue derivate temporali fino all'ordine n-1:

$$x(t)=\begin{Bmatrix}D^{n-1}z(t)\\D^{n-2}z(t)\\\vdots\\z(t)\end{Bmatrix},\qquad \dot{x}(t)=\begin{Bmatrix}D^{n}z(t)\\D^{n-1}z(t)\\\vdots\\Dz(t)\end{Bmatrix}$$

E definendo le matrici A e B come:

$$A=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix} \tag{1.4}$$

Si vede che la (1.3) è equivalente alla scrittura del sistema nella forma:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$

$$\begin{Bmatrix}D^{n}z(t)\\D^{n-1}z(t)\\\vdots\\Dz(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}-a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n\\1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}D^{n-1}z(t)\\D^{n-2}z(t)\\\vdots\\z(t)\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}\{u\}$$

Le matrici trovate sono quindi quelle che descrivono il sistema con lo stato x scelto.
Per determinare le matrici C e D, consideriamo invece la (1.2), grazie alla quale:

$$Y(s)=Z(s)\left(b_0s^n+b_1s^{n-1}+\ldots+b_n\right)$$

Antitrasformando:

$$y(t)=b_0D^nz(t)+b_1D^{n-1}z(t)+\ldots+b_n$$

Sostituendo in questa espressione la (1.3) trovata precedentemente:

$$y(t) = b_0\left(-a_1 D^{n-1} z(t) - \ldots - a_n z(t) + u(t)\right) + b_1 D^{n-1} z(t) + \ldots + b_n =$$
$$= \left(b_1 - a_1 b_0\right) D^{n-1} z(t) + \ldots + \left(b_n - a_n b_0\right) + b_0 u(t)$$

Di nuovo si nota che ponendo:

$$C = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & \cdots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix}$$

Si è scritto:

$$y = Cx + Du$$
$$y = \begin{bmatrix} b_1 - a_1 b_0 & b_2 - a_2 b_0 & \cdots & b_n - a_n b_0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^{n-1} z(t) \\ D^{n-2} z(t) \\ \vdots \\ z(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 \end{bmatrix} \{u\}$$

Abbiamo quindi trovato le matrici A, B, C, D partendo dalla funzione di trasferimento. La forma delle matrici così ottenuta è detta *forma canonica di controllabilità* (o *first companion form*). In questa forma, la matrice A contiene nella prima riga i coefficienti del polinomio caratteristico (a meno del coefficiente di grado massimo, posto unitario).

Introduciamo ora un controllo proporzionale allo stato, e calcoliamo la matrice del sistema in anello chiuso $\tilde{A} = A + Bk$:

$$A + Bk = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} k_1 - a_1 & k_2 - a_2 & \cdots & k_{n-1} - a_{n-1} & k_n - a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} = \tilde{A}$$

I termini sulla prima riga sono allora l'opposto dei coefficienti del polinomio caratteristico del sistema in anello chiuso. Detti $\tilde{a}_i$ i coefficienti:

$$-\tilde{a}_i = k_i - a_i$$

Ed è possibile ricavare i guadagni del controllo k invertendo:

$$k_i = a_i - \tilde{a}_i \text{ (segni???)} \tag{1.5}$$

Quindi, per un sistema scritto nella forma canonica, i passi sono i seguenti:

- Decidere i poli del sistema in anello chiuso;
- Calcolare il polinomio caratteristico (in anello chiuso);
- Trovare i guadagni k mediante la (1.5).

(vedi quaderno e dispensa per commenti)

Trasformazione in forma canonica

Si è visto che il posizionamento dei poli risulta particolarmente semplice per un sistema scritto nella first companion form.

Consideriamo ora un sistema generico, in cui probabilmente gli stati hanno un significato fisico, con un controllo proporzionale agli stati:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ u = kx \end{cases} \tag{1.6}$$

Consideriamo ora una trasformazione dello stato da x a $\bar{x}$, che porti il sistema nella first companion form:

$$x = T\bar{x} \tag{1.7}$$

Sostituendo la (1.7) nel sistema (1.6):

$$\begin{cases} T\dot{\overline{x}} = AT\overline{x} + Bu \\ y = CT\overline{x} + Du \\ u = kT\overline{x} \end{cases}$$

Da cui:

$$\begin{aligned} &\overline{A} = T^{-1}AT,\ \overline{B} = T^{-1}B \\ &\overline{C} = CT,\ \overline{D} = D \\ &\overline{k} = kT \end{aligned} \tag{1.8}$$

Come si può vedere, il guadagno *k* del sistema è diverso secondo il vettore di stato scelto.
(vedi dispensa per considerazioni interessanti)

Per ricavare la matrice *T* che porta un sistema nella first companion form, si nota dapprima che:

$$Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overline{Q} &= \begin{bmatrix} \overline{B} & \overline{A}\overline{B} & \overline{A}^2\overline{B} & \cdots & \overline{A}^{n-1}\overline{B} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \left(T^{-1}AT\right)^2 T^{-1}B & \cdots & \left(T^{-1}AT\right)^{n-1} T^{-1}B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}ATT^{-1}B & \left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}AT\right)T^{-1}B & \cdots & \left(T^{-1}AT\right)^{n-1} T^{-1}B \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} T^{-1}B & T^{-1}AB & T^{-1}A^2B & \cdots & T^{-1}A^{n-1}B \end{bmatrix} = \\ &= T^{-1}\begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \\ &= T^{-1}Q \end{aligned}$$

Date le matrici *A, B, C, D* di un sistema con una certa scelta degli stati, è sempre possibile calcolare il polinomio caratteristico della matrice *A* e la matrice di controllabilità *Q*. Inoltre, dato che il polinomio caratteristico non cambia al variare degli stati scelti, con i suoi coefficienti è possibile scrivere le matrici $\overline{A}, \overline{B}$ del sistema nella first companion form (che avranno la forma delle (1.4)), e quindi calcolare $\overline{Q}$.
Dalla relazione precedente si può allora trovare la matrice di trasformazione cercata:

$$T = Q\overline{Q}^{-1} \tag{1.9}$$

Con le (1.8) si può poi passare alla first companion form.
Questo metodo non è conveniente, perché richiede l'inversione della matrice Q, che può essere mal condizionata, e quindi portare a grossi errori numerici.

Formula di Ackermann

Vediamo ora un metodo che consente il posizionamento dei poli senza dover passare attraverso la forma canonica, evitando così l'inversione di *Q*.
Considereremo il sistema fisico *A*, e il suo corrispettivo controllato proporzionalmente agli stati $\tilde{A} = A + Bk$. L'obiettivo è determinare *k* una volta scelto il posizionamento dei poli in anello chiuso.
Si consideri il polinomio caratteristico $\alpha(s)$ della matrice A (oppure di $\overline{A}$, scritta in forma canonica – è lo stesso):

$$\alpha(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n$$

Per una nota proprietà, ogni matrice è soluzione del suo polinomio caratteristico, quindi:

$$\alpha(\overline{A}) = \overline{A}^n + a_1\overline{A}^{n-1} + \ldots + a_n\mathbb{I} = 0 \tag{1.10}$$

Si consideri ora la matrice $\tilde{A}$ del sistema in anello chiuso: si indichi con $\tilde{\alpha}$ il suo polinomio caratteristico:

$$\tilde{\alpha}(s) = s^n + \tilde{a}_1 s^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_n$$

Se lo si valuta con la matrice $\overline{A}$, non sarà soddisfatto, in quanto i poli (e quindi i polinomi) in anello aperto e chiuso sono diversi:

$$\tilde{\alpha}(\overline{A}) = \overline{A}^n + \tilde{a}_1\overline{A}^{n-1} + \ldots + \tilde{a}_n\mathbb{I}$$

Ricavando $\overline{A}^n$ dalla (1.10) e sostituendolo:

$$\tilde{\alpha}(\overline{A}) = \left(\tilde{a}_1 - a_1\right)\overline{A}^{n-1} + \ldots + \left(\tilde{a}_n - a_n\right)\mathbb{I}$$

I coefficienti di questo polinomio (matriciale), grazie alla (1.5), sono proprio i guadagni $\bar{k}$: (non è vero!!! Segni!!)

$$\tilde{\alpha}(\bar{A}) = \bar{k}_1 \bar{A}^{n-1} + \ldots + \bar{k}_n \mathbb{I}$$

Definiamo ora il vettore:

$$e_i^T = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}^{n}$$

Si noti che:

$$e_n^T \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = e_{n-1}^T$$

$$e_n^T \bar{A}^m = e_n^T \overbrace{\bar{A}\bar{A}\ldots\bar{A}}^{m} = e_{n-m}^T$$

Di conseguenza, premoltiplicando il polinomio matriciale in anello chiuso $\tilde{\alpha}(\bar{A})$ si ottiene:

$$\begin{aligned} e_n^T \tilde{\alpha}(\bar{A}) &= e_n^T \bar{k}_1 \bar{A}^{n-1} + \ldots + e_n^T \bar{k}_n \mathbb{I} = \\ &= \bar{k}_1 e_n^T \bar{A}^{n-1} + \ldots + \bar{k}_n e_n^T \mathbb{I} = \\ &= \bar{k}_1 e_1^T + \ldots + \bar{k}_n e_n^T = \\ &= \bar{k} \end{aligned}$$

Si introduce ora la trasformazione di stato (1.8):

$$e_n^T \tilde{\alpha}(T^{-1}AT) = kT$$

Cioè:

$$e_n^T T^{-1} \tilde{\alpha}(A) T = kT$$

Da cui si può ricavare il guadagno k:

$$k = e_n^T T^{-1} \tilde{\alpha}(A)$$

Dalla (1.9) si può ricavare $T^{-1} = \bar{Q}Q^{-1}$, che sostituito porta a:

$$k = e_n^T \bar{Q} Q^{-1} \tilde{\alpha}(A)$$

Poiché la matrice $\bar{Q}$ della forma canonica è sempre triangolare superiore con diagonale unitaria, si ha:

$$e_n^T \bar{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \beta & \cdots & \gamma \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = e_n^T$$

Quindi:

$$k = e_n^T Q^{-1} \tilde{\alpha}(A)$$

Questa espressione è diventata del tutto indipendente dalla forma canonica! Per non invertire la matrice Q si pone:

$$e_n^T Q^{-1} = b^T$$

Si può allora valutare b risolvendo il sistema lineare:

$$Q^T b = e_n \tag{1.11}$$

In questo modo, si è evitato di invertire la matrice Q. A questo punto si calcolano i guadagni k:

$$k = b^T \tilde{\alpha}(A) \tag{1.12}$$

Quindi, per un sistema generico, i passi sono i seguenti:

- Calcolare la matrice di controllabilità Q;
- Risolvere il sistema lineare (1.11) per trovare b;
- Decidere i poli del sistema in anello chiuso;

- Calcolare il polinomio caratteristico in anello chiuso $\tilde{\alpha}$ e valutarlo con la matrice A in anello aperto;
- Trovare i guadagni k mediante la (1.12).

La *formula di Ackermann*, qui illustrata, consente quindi il calcolo del vettore dei guadagni k, una volta decisi i poli del sistema in anello chiuso, caratterizzato dalla matrice $\tilde{A} = A + Bk$.

Osservatore

Osservatore completo

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \tag{2.1}$$

Si cerca di ricostruire lo stato x dalle uscite y. Si chiamerà $\hat{x}$ lo stato ricostruito.
Nel caso particolare in cui $D = 0$ e C è quadrata, si ha immediatamente:

$$\hat{x} = x = C^{-1}y$$

In generale, introduciamo il *sistema osservatore*:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + Ly \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases} \tag{2.2}$$

Si richiede che l'errore di osservazione, definito come:

$$e = \hat{x} - x \tag{2.3}$$

sia nullo all'infinito, cioè che il sistema osservatore sia asintoticamente stabile. Derivando e tenendo conto del sistema (2.1):

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{\hat{x}} - \dot{x} = \\ &= \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + LCx + LDu - Ax - Bu \end{aligned}$$

Reintroducendo l'errore i questa formula, grazie alla (2.3) invertita:

$$\hat{x} = e + x$$

Si ha:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \left(\hat{A} - A + LC\right)x + \left(\hat{B} - B + LD\right)u \tag{2.4}$$

Affinché la dinamica di questo sistema sia indipendente dallo stato x e dall'ingresso u, si pone:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A - LC \\ \hat{B} &= B - LD \end{aligned} \tag{2.5}$$

Per cui la (2.4) diventa:

$$\dot{e} = \left(A - LC\right)e$$

Notando che:

$$\hat{A}^T = A^T - C^T L^T$$

Si può ricavare il guadagno dell'osservatore trasposto L^T posizionando i suoi poli con la consueta regola di Ackermann, oppure con il comando *place* di Matlab (nel caso di più uscite y).
La dinamica dell'osservatore (2.2), con le sostituzioni (2.5) diventa:

$$\dot{\hat{x}} = \left(A - LC\right)\hat{x} + \left(B - LD\right)u + Ly \tag{2.6}$$

Osservatore ridotto

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \\ y = C_1x_1 \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\hat{x}_1 = C_1^{-1}y \tag{2.8}$$

Tipo 1 (senza progetto)

Scrivo la dinamica dell'osservatore solo per lo stato x_2:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \hat{A}_{21}\hat{x}_1 + \hat{A}_{22}\hat{x}_2 + \hat{B}_2u + L_2y$$

Procedendo analogamente a quanto fatto per l'osservatore completo, si ha:

$$\hat{A} = A - LC$$

$$\hat{B} = B - LD = B$$

$$LC = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1C_1 & 0 \\ L_2C_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Per cui:

$$\dot{\hat{x}}_2 = \left(A_{21} - L_2C_1\right)\hat{x}_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2u + L_2y$$

Tenendo conto della (2.8):

$$\dot{\hat{x}}_2 = \left(A_{21} - L_2C_1\right)C_1^{-1}y + A_{22}\hat{x}_2 + B_2u + L_2y =$$
$$= A_{22}\hat{x}_2 + B_2u + A_{21}C_1^{-1}y$$

Da cui si vede che è scomparso il guadagno L. Non è quindi possibile progettare l'osservatore. Questo sarà stabile solo se lo è la matrice A_{22}. Inoltre sarà veloce quanto il sistema.

Tipo 2 (con derivazione dell'uscita)

Riscriviamo la dinamica del sistema fisico partizionata:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2u \end{cases}$$

Considerando ora che:

$$x_1 = C_1^{-1}y$$

Si ha, sostituendo nel sistema:

$$\begin{cases} C_1^{-1}\dot{y} = A_{12}x_2 + B_1u + A_{11}C_1^{-1}y \\ \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u + A_{21}C_1^{-1}y \end{cases}$$

Invertendo l'ordine delle equazioni e ponendo per comodità:

$$m = C_1^{-1}\dot{y} - B_1u - A_{11}C_1^{-1}y \tag{2.9}$$

Si ha:

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = A_{22}x_2 + B_2u + A_{21}C_1^{-1}y \\ m = A_{12}x_2 \end{cases} \tag{2.10}$$

Ora possiamo considerare m come l'uscita di un sistema che ha x_2 come stato, e u e y come due forzanti. Si può quindi progettare un osservatore completo su questo sistema. Si procede analogamente a prima, con le opportune sostituzioni:

Osservatore completo	Osservatore ridotto (tipo 2)
x	x_2
A	A_{22}
Bu	$B_2u + A_{21}C_1^{-1}y$
y	m
C	A_{12}
D	0
L	L_2

Ricordando allora la (2.6), con le opportune sostituzioni si ha:

$$\dot{\hat{x}}_2 = (A_{22} - L_2A_{12})\hat{x}_2 + B_2u + A_{21}C_1^{-1}y + L_2m$$

Analizzando allora la dinamica dell'errore di osservazione si ha:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = (A_{22} - L_2A_{12})\hat{x}_2 + B_2u + A_{21}C_1^{-1}y + L_2m - A_{22}x_2 - B_2u - A_{21}C_1^{-1}y = \\ &= (A_{22} - L_2A_{12})\hat{x}_2 - A_{22}x_2 + L_2m\end{aligned}$$

Poi, dalla seconda delle (2.10), l'errore diventa:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= (A_{22} - L_2A_{12})\hat{x}_2 - (A_{22} - L_2A_{12})x_2 = \\ &= (A_{22} - L_2A_{12})e_2\end{aligned}$$

In questa forma allora è possibile progettare come al solito l'osservatore.
Il problema è che per il calcolo di m è necessario conoscere, oltre che y, anche $\dot{y}$ (vedi (2.9)).
Occorre quindi fare una derivazione dell'uscita, che non è consigliabile a causa dei rumori. Servirebbe un filtro, oltre al filtraggio naturale dell'osservatore. Ciò rischia di alterare troppo la dinamica dell'intero sistema.

Tipo 3 (con dinamica aggiunta)

Introduciamo una dinamica ausiliaria nell'osservatore che provvederà al filtraggio:

$$\begin{cases}\dot{z} = Fz + Gu + Hy \\ \hat{x}_2 = Ly + z\end{cases} \tag{2.11}$$

Come per l'osservatore completo, scriviamo la dinamica dell'errore.

$$e_2 = \hat{x}_2 - x_2 = z + Ly - x_2 \tag{2.12}$$

$$\dot{e}_2 = \dot{\hat{x}}_2 - \dot{x}_2 = \dot{z} + L\dot{y} - \dot{x}_2$$

Ricordando la prima delle (2.11), e il sistema (2.7):

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= Fz + Gu + Hy + L\dot{y} - \dot{x}_2 = \\ &= Fz + Gu + HC_1x_1 + LC_1\dot{x}_1 - \dot{x}_2 = \\ &= Fz + Gu + HC_1x_1 + LC_1A_{11}x_1 + LC_1A_{12}x_2 + LC_1B_1u - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 - B_2u\end{aligned}$$

Reintroducendo l'errore grazie all'inversa della (2.12), con la terza di (2.7):

$$z = e_2 + x_2 - LC_1x_1$$

Si ha:

$$\begin{aligned}\dot{e}_2 &= Fe_2 + Fx_2 - FLC_1x_1 + Gu + HC_1x_1 + LC_1A_{11}x_1 + LC_1A_{12}x_2 + LC_1B_1u - A_{21}x_1 - A_{22}x_2 - B_2u = \\ &= Fe_2 + (HC_1 - FLC_1 + LC_1A_{11} - A_{21})x_1 + (F + LC_1A_{12} - A_{22})x_2 + (G + LC_1B_1 - B_2)u\end{aligned}$$

Di nuovo vogliamo garantire l'asintotica stabilità dell'osservatore, quindi poniamo:

$$\begin{aligned}F &= A_{22} - LC_1A_{12} \\ G &= B_2 - LC_1B_1 \\ H &= (FLC_1 - LC_1A_{11} + A_{21})C_1^{-1}\end{aligned}$$

Da cui possiamo scrivere:

$$\dot{e}_2 = (A_{22} - LC_1A_{12})e_2$$

Grazie alla quale possiamo progettare l'osservatore ridotto con la consueta regola di Ackermann.

Inseguimento di un riferimento

Riferimento costante diverso da zero

Dato il sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases} \tag{3.1}$$

Vogliamo che le uscite del sistema abbiano valore di riferimento assegnato:

$$\bar{y} = C\bar{x} \tag{3.2}$$

Definiamo gli scostamenti dai valori di riferimento:

$$u' = u - \bar{u}$$
$$x' = x - \bar{x}$$
$$y' = y - \bar{y}$$

Sostituendo nel sistema, e considerando che $\bar{u}, \bar{x}, \bar{y}$ sono costanti:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax' + A\bar{x} + Bu' + B\bar{u} \\ y' + \bar{y} = Cx' + C\bar{x} \end{cases}$$

Che grazie alla (3.2) si semplifica in:

$$\begin{cases} \dot{x}' = Ax' + A\bar{x} + Bu' + B\bar{u} \\ y' = Cx' \end{cases}$$

Vediamo ora il controllo:

$$u = kx + \bar{u} \tag{3.3}$$

Dal momento che $\bar{x}$ è costante, e poiché $\bar{u}$ è ancora arbitrario, questo è lo stesso che scrivere:

$$\begin{aligned} u &= kx - k\bar{x} + \bar{u} = \\ &= kx' + \bar{u} \end{aligned}$$

Da cui:

$$u' = kx'$$

Visto allora che il guadagno k è lo stesso nei due casi, trovando una legge di controllo per la dinamica assoluta di x, ne ho anche trovata una per la dinamica relativa. Le prestazioni del sistema saranno le stesse nei due casi.

Vediamo ora di determinare $\bar{u}$. Sostituendo la legge di controllo (3.3) nella dinamica del sistema (3.1) si ha:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bkx + B\bar{u} = \\ &= (A + Bk)x + B\bar{u} \end{aligned}$$

A regime vogliamo avere:

$$\dot{x} = 0, \quad x = \bar{x}$$

Quindi:

$$0 = (A + Bk)\bar{x} + B\bar{u}$$

Da cui:

$$\bar{x} = -(A + Bk)^{-1} B\bar{u}$$

Che sostituita nella (3.2) dà:

$$\bar{y} = -C(A + Bk)^{-1} B\bar{u} \tag{3.4}$$

- Se il problema è quadrato, cioè il numero di uscite y è uguale a quello degli ingressi u, allora la relazione sopra è invertibile e si può trovare direttamente il comando costante $\bar{u}$:

  $$\bar{u} = \left[-C(A + Bk)^{-1} B\right]^{-1} \bar{y}$$

- Se il numero di uscite y è minore di quello degli ingressi u, allora basta aggiungere le condizioni mancanti su y.
- Se il numero di uscite y è maggiore di quello degli ingressi u, allora il problema è sottodeterminato. Bisogna trovare una funzione (lineare) delle uscite (ad esempio una media) che renda quadrato il problema. Detta E, la (3.4) diventa:

  $$E\bar{y} = -EC(A + Bk)^{-1} B\bar{u}$$

Da cui:

$$\bar{u} = \left[-EC\left(A+Bk\right)^{-1}B\right]^{-1}E\bar{y}$$

Riferimento variabile nel tempo

Consideriamo un ambiente con una sua dinamica:

$$\dot{x}_d = A_d x_d$$

Questo ambiente influenza il nostro sistema fisico:

$$\dot{x} = Ax + Bu + Fx_d$$

Inoltre vogliamo seguire un riferimento, la cui legge di variazione è data da:

$$\dot{x}_r = A_r x_r$$

Unendo il tutto in un unico sistema si ha:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \\ \dot{x}_d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & F \\ 0 & A_r & 0 \\ 0 & 0 & A_d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_r \\ x_d \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \tag{3.5}$$

Vogliamo allora che x sia vicino al riferimento x_r.

Come fatto per l'osservatore, studiamo l'errore:

$$e = x - x_r \tag{3.6}$$

Derivando, e tenendo conto del sistema (3.5):

$$\dot{e} = \dot{x} - \dot{x}_r = Ax + Bu + Fx_d - A_r x_r$$

Reintroducendo l'errore mediante l'inversa della (3.6):

$$\dot{e} = A\left(e + x_r\right) + Bu + Fx_d - A_r x_r =$$

$$= Ae + Bu + Fx_d + \left(A - A_r\right)x_r$$

Ponendo, per comodità:

$$H = \left[A - A_r \quad F\right]$$

$$x_0 = \begin{Bmatrix} x_r \\ x_d \end{Bmatrix}$$

Si ha:

$$\dot{e} = Ae + Bu + Hx_0 \tag{3.7}$$

Ipotizziamo ora un controllo, che tenga conto anche di un termine dipendente dall'ambiente e dal riferimento:

$$u = ke + Gx_0$$

Per cui la (3.7) diventa:

$$\dot{e} = \left(A + Bk\right)e + \left(H + BG\right)x_0$$

Dalla quale si vede che la matrice k che si usa è la stessa che si userebbe per il sistema senza disturbo e senza riferimento variabile. La differenza è che ora il transitorio è sull'errore e, e non su x.

Cerchiamo ora di determinare il guadagno G aggiunto al controllo. Imponiamo errore nullo a transitorio esaurito:

$$\dot{e} = 0 \;\rightarrow\; e = -\left(A + Bk\right)^{-1}\left(H + BG\right)x_0$$

$$e = 0 \;\rightarrow\; -\left(A + Bk\right)^{-1}\left(H + BG\right)x_0 = 0$$

Per l'arbitrarietà di x_0 si ha:

$$\left(A + Bk\right)^{-1}BG = -\left(A + Bk\right)^{-1}H$$

In generale, B non è quadrata, cioè il numero degli ingressi non è uguale a quello delle uscite.

Come prima, bisogna aggiungere una matrice E che "medi", e renda quadrato il problema:

$$E\left(A + Bk\right)^{-1}BG = -E\left(A + Bk\right)^{-1}H$$

Da cui ricaviamo G:

$$G = -\left(E\left(A + Bk\right)^{-1}B\right)^{-1}E\left(A + Bk\right)^{-1}H$$

(vedi schema e commenti sul quaderno 7/5/2004)

Teoria del controllo ottimo dei sistemi lineari

Dato il sistema:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.1}$$

Per valutare la bontà della risposta temporale in un certo intervallo, posso considerare:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x\right) dt$$

L'obiettivo sarà minimizzare questo funzionale. In questo modo, però, si ottiene un controllo molto robusto e veloce, che può dare origine ad azioni troppo grandi. Si inserisce allora anche un termine che tenga conto del controllo, bilanciando gli stati:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

In questo modo, si cerca di limitare sia il controllo, sia la risposta del sistema.
Inoltre, se al tempo finale lo stato deve valere x_f, introduciamo un altro termine:

$$J = \frac{1}{2} x_f^{\ T} S x_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left(x^T Q x + u^T R u\right) dt \tag{4.2}$$

Stiamo facendo un *controllo lineare quadratico*.
Q, R, S devono essere matrici simmetriche. Se non lo fossero, si può sempre considerare, senza alterare il problema:

$$Q = \frac{\bar{Q} + \bar{Q}^T}{2}$$

Il vincolo per il problema è la dinamica del sistema (4.1). Viene inserito con i moltiplicatori di Lagrange:

$$\bar{J} = \frac{1}{2} x_f^{\ T} S x_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u + 2\lambda^T \left(\dot{x} - Ax - Bu\right)\right] dt \tag{4.3}$$

Per la determinazione di $\min J$, bisogna annullare le derivate rispetto a λ, u, x, x_f.
Rispetto a λ:

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial \lambda^T} = \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{x} - Ax - Bu\right) dt = 0$$

Data l'arbitrarietà dei tempi, questa equazione è equivalente al vincolo stesso:

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{4.4}$$

Rispetto a *u*:

$$\frac{\partial \bar{J}^T}{\partial u^T} = \int_{t_0}^{t_f} \left(Ru - B^T \lambda\right) dt = 0$$

Di nuovo, si può scrivere:

$$u = R^{-1} B^T \lambda \tag{4.5}$$

Affinché *R* sia invertibile, è necessario che sia definita positiva. Questo significa che è sempre indispensabile porre un limite al controllo *u* nel funzionale.
Inoltre, poiché *R* e *B* sono costanti nel tempo, λ dovrà necessariamente variare, per far variare il controllo *u*.
Per la derivata rispetto a *x*, si fa prima una sostituzione:

$$\int_{t_0}^{t_f} \left(\lambda^T \dot{x}\right) dt = \lambda^T x\Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\lambda}^T x\right) dt =$$

$$= \lambda_f^{\ T} x_f - \lambda_0^{\ T} x_0 - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\lambda}^T x\right) dt$$

Che, sostituita nella (4.3) porta a:

$$\bar{J} = \frac{1}{2} x_f^{\ T} S x_f + \lambda_f^{\ T} x_f - \lambda_0^{\ T} x_0 + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} \left[x^T Q x + u^T R u + 2\lambda^T \left(-Ax - Bu\right) - 2\dot{\lambda}^T x\right] dt$$

Si procede così ad annullare la derivata:

$$\frac{\partial \bar{J}^T}{\partial x^T} = \int_{t_0}^{t_f} \left(Qx - A^T \lambda - \dot{\lambda}\right) dt = 0$$

Da cui:

$$\dot{\lambda} = -A^T \lambda + Qx \tag{4.6}$$

In conclusione, si è quindi ottenuto:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = R^{-1}B^T\lambda \\ \dot{\lambda} = -A^T\lambda + Qx \end{cases}$$

Eliminando u:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + BR^{-1}B^T\lambda \\ \dot{\lambda} = -A^T\lambda + Qx \end{cases} \tag{4.7}$$

Ovvero, in forma di sistema lineare:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

(vedi quaderno)
A questo punto, si può porre una limitazione sul controllo u, che deve essere proporzionale agli stati x.

$$u = R^{-1}B^T\lambda = kx$$

Si può allora dire che:

$$\lambda = Px \tag{4.9}$$

$$k = R^{-1}B^TP \tag{4.10}$$

$$u = R^{-1}B^TPx \tag{4.11}$$

$$\dot{x} = \left(A + BR^{-1}B^TP\right)x \tag{4.12}$$

Derivando la (4.9):

$$\dot{P}x + P\dot{x} = \dot{\lambda}$$

Sostituendo la (4.12), la seconda delle (4.7) e la (4.9):

$$\dot{P}x + P\left(A + BR^{-1}B^TP\right)x = -A^TPx + Qx$$

Semplificando la x e riordinando si ottiene l'*equazione di Riccati*:

$$\dot{P} = Q - A^TP - PA - PBR^{-1}B^TP \tag{4.13}$$

La soluzione P di questa equazione garantisce che il guadagno k sugli stati rende stabile il sistema. L'equazione richiede però delle condizioni iniziali (o finali) per essere risolta. Inoltre, in linea di principio, P può variare nel tempo, facendo variare anche il guadagno k.
Con l'ausilio di questa equazione, si passa alla derivazione in x_f. Sostituendo la (4.11) nel funzionale senza vincolo (4.2) si ha:

$$J = \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T\left(Q + P^TB\left(R^{-1}\right)^T RR^{-1}B^TP\right)xdt$$

Poiché R e P sono simmetriche $R^T = R,\ P^T = P$:

$$J = \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T\left(Q + PBR^{-1}B^TP\right)xdt \tag{4.14}$$

Ricavando Q dall'equazione di Riccati (4.13):

$$Q = \dot{P} + A^TP + PA + PBR^{-1}B^TP$$

e sostituendo nella (4.14):

$$J = \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} x^T\left(\dot{P} + P\left(A + BR^{-1}B^TP\right) + \left(A^T + PBR^{-1}B^T\right)P\right)xdt \tag{4.15}$$

Ricordando la (4.12) e la sua trasposta:

$$\dot{x} = \left(A + BR^{-1}B^TP\right)x$$

$$\dot{x}^T = x^T\left(A^T + PBR^{-1}B^T\right)$$

e sostituendo nella (4.15):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\left(x^T\dot{P}x + x^TP\dot{x} + \dot{x}^TPx\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\frac{d}{dt}\left(x^TPx\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}x_f{}^TSx_f + \frac{1}{2}x_f{}^TP_fx_f - \frac{1}{2}x_0{}^TP_0x_0 \end{aligned}$$

Imponendo ora la stazionarietà rispetto a x_f:

$$\frac{\partial J}{\partial x_f} = \left(S + P_f\right) x_f = 0$$

Da cui:

$$P_f = -S$$

Che è la condizione al contorno su P che si cercava.

L'equazione algebrica di Riccati: il regolatore lineare quadratico

Se non interessa imporre un certo stato x_f al tempo t_f, allora possiamo considerare un tempo $t_f \to \infty$, in modo tale che $x_f = 0$. Con queste ipotesi:

$$J_\infty = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T Q x + u^T R u\right) dt$$

Questo è un *regolatore lineare quadratico*, perché applicato per un tempo infinito. In questo modo, possiamo garantire che il problema è stazionario:

$$\dot{P} = -A^T P - PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0$$

L'equazione di Riccati diventa algebrica, P è costante per tutto il tempo. (vedi quaderno)

Una soluzione per l'equaziona algebrica di Riccati

Vediamo di trovare una soluzione all'equazione di Riccati.
Riscrivendo il sistema (4.8) come:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & BR^{-1}B^T \\ Q & -A^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} = N \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix} \tag{4.16}$$

Si nota che N è una matrice *simplettica*, perché fuori dalla diagonale ha due matrici simmetriche (Q, $BR^{-1}B^T$). I suoi autovalori compaiono a coppie di segno opposto. Se sono distinti, si può scrivere:

$$N = UZU^{-1} = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 & 0 \\ 0 & Z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix} \tag{4.17}$$

Dove U è la matrice degli autovettori, e Z è quella degli autovalori. Quest'ultima è stata partizionata in modo che $Z_2 = -Z_1$. Inoltre si è posto che:

$$\mathrm{Re}\left[Z_1\right] < 0$$
$$\mathrm{Re}\left[Z_2\right] > 0$$

Ovvero si sono associati al sistema fisico (x) gli autovalori stabili, al moltiplicatore (λ) quelli instabili.
Sviluppando il sistema (4.16) con la (4.17):

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}Z_1V_{11} + U_{12}Z_2V_{21} & U_{11}Z_1V_{12} + U_{12}Z_2V_{22} \\ U_{21}Z_1V_{11} + U_{22}Z_2V_{21} & U_{21}Z_1V_{12} + U_{22}Z_2V_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \lambda \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = U_{11}Z_1\left(V_{11}x + V_{12}\lambda\right) + U_{12}Z_2\left(V_{21}x + V_{22}\lambda\right) \\ \dot{\lambda} = U_{21}Z_1\left(V_{11}x + V_{12}\lambda\right) + U_{22}Z_2\left(V_{21}x + V_{22}\lambda\right) \end{cases}$$

Questo sistema non è forzato, perché il comando u è già stato incluso nella dinamica (si ricordi: $u = R^{-1}B\lambda$). E' allora possibile integrare il sistema, date le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} x(t) = U_{11}e^{Z_1 t}\left(V_{11}x_0 + V_{12}\lambda_0\right) + U_{12}e^{Z_2 t}\left(V_{21}x_0 + V_{22}\lambda_0\right) \\ \lambda(t) = U_{21}e^{Z_1 t}\left(V_{11}x_0 + V_{12}\lambda_0\right) + U_{22}e^{Z_2 t}\left(V_{21}x_0 + V_{22}\lambda_0\right) \end{cases}$$

Poiché il sistema deve essere stabile (??? Vedi quaderno), deve essere che:

$$V_{21}x_0 + V_{22}\lambda_0 = 0$$

E il sistema diventa:

$$\begin{cases} x(t) = U_{11}e^{Z_1 t}\left(V_{11}x_0 + V_{12}\lambda_0\right) \\ \lambda(t) = U_{21}e^{Z_1 t}\left(V_{11}x_0 + V_{12}\lambda_0\right) \end{cases}$$

Sostituendo un'equazione nell'altra si ottiene:

$$\lambda(t) = U_{21}U_{11}^{-1}x(t)$$

Ricordando che avevamo posto:

$$\lambda = Px$$

Deve essere che

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}$$

Alternative all'ottimizzazione degli stati: il problema standard

Ottimizzazione dell'uscita

In alcuni sistemi, ottimizzare lo stato non è sempre sensato. A volte si preferisce ottimizzare, oltre al controllo u, l'uscita y:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(y^T Q y + u^T R u\right)dt \tag{4.18}$$

Nel caso di sistema proprio si ha:

$$y = Cx$$

Per cui la (4.18) diventa:

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\left(C^T Q C\right)x + u^T R u\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T \bar{Q} x + u^T R u\right)dt \end{aligned}$$

Avendo posto:

$$\bar{Q} = C^T Q C$$

Se invece il sistema non è proprio:

$$y = Cx + Du$$

Per cui, sostituendo ancora nella (4.18):

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\left(Cx + Du\right)^T Q\left(Cx + Du\right) + u^T R u\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\left(x^T C^T + u^T D^T\right)Q\left(Cx + Du\right) + u^T R u\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T C^T Q C x + x^T C^T Q D u + u^T D^T Q C x + u^T D^T Q D u + u^T R u\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\left(C^T Q C\right)x + 2x^T\left(C^T Q D\right)u + u^T\left(D^T Q D + R\right)u\right)dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T \bar{Q} x + 2x^T \bar{W} u + u^T \bar{R} u\right)dt \end{aligned}$$

Avendo posto ora:

$$\begin{aligned} \bar{Q} &= C^T Q C \\ \bar{W} &= C^T Q D \\ \bar{R} &= D^T Q D + R \end{aligned} \tag{4.19}$$

Il funzionale trovato:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T \bar{Q} x + 2x^T \bar{W} u + u^T \bar{R} u\right)dt \tag{4.20}$$

È molto generale, in quanto contiene i due termini quadratici puri e un termine quadratico misto, che può avere un significato interessante per alcuni sistemi fisici. Consideriamo allora il (4.20) il funzionale del cosiddetto *problema standard*.

Ottimizzazione rispetto a un altro sistema

Introduciamo un sistema ideale:

$$\dot{x}_m = A_m x_m + B_m u$$

Gli stati di questo sistema sono gli stessi di quello fisico.
Si cerca di minimizzare la differenza tra il sistema ideale e quello fisico, cioè:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\left(\dot{x}-\dot{x}_m\right)^T Q\left(\dot{x}-\dot{x}_m\right)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\left[\left(A-A_m\right)^T Q\left(A-A_m\right)\right]x + u^T\left[\left(B-B_m\right)^T Q\left(B-B_m\right)\right]u + 2u^T\left[\left(B-B_m\right)^T Q\left(A-A_m\right)\right]x\right)dt$$

Con le sostituzioni:

$$\bar{Q} = \left(A-A_m\right)^T Q\left(A-A_m\right)$$
$$\bar{R} = \left(B-B_m\right)^T Q\left(B-B_m\right)$$
$$\bar{W} = \left(B-B_m\right)^T Q\left(A-A_m\right)$$

Si ritrova il funzionale di prima:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}u + u^T\bar{R}u\right)dt$$

Soluzione del problema standard

Cerchiamo ora una soluzione al *problema standard*:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}u + u^T\bar{R}u\right)dt \tag{4.21}$$

cercando di ricondursi al funzionale tradizionale (4.18).
Si procede facendo un cambio di variabile per u, considerandolo composto da due termini:

$$u = \bar{u} - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T x \tag{4.22}$$

Sostituendo questa espressione nella (4.21):

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}\left(\bar{u}-\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right) + \left(\bar{u}-\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right)^T\bar{R}\left(\bar{u}-\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}\left(\bar{u}-\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right) + \left(\bar{u}^T - x^T\bar{W}\bar{R}^{-1T}\right)\bar{R}\left(\bar{u}-\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right)\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}\bar{u} - 2x^T\bar{W}R^{-1}\bar{W}^T x + \bar{u}^T\bar{R}\bar{u} - 2\bar{u}^T\bar{R}\bar{R}^{-1}\bar{W}x + x^T\bar{W}\bar{R}^{-1}\bar{R}\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{Q}x + 2x^T\bar{W}\bar{u} - 2x^T\bar{W}R^{-1}\bar{W}^T x + \bar{u}^T\bar{R}\bar{u} - 2\bar{u}^T\bar{W}x + x^T\bar{W}\bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\left(\bar{Q}-\bar{W}\bar{R}^{-1}\bar{W}^T\right)x + \bar{u}^T\bar{R}\bar{u}\right)dt$$

Avendo anche considerato che R è simmetrica.
Si pone qui:

$$\bar{\bar{Q}} = \bar{Q} - \bar{W}\bar{R}^{-1}\bar{W}^T$$
$$\bar{\bar{R}} = \bar{R} \tag{4.23}$$

E quindi ci si riconduce a:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(x^T\bar{\bar{Q}}x + \bar{u}^T\bar{\bar{R}}\bar{u}\right)dt$$

Nell'assemblaggio dell'equazione di Riccati, bisogna considerare che le matrici da inserire non sono quelle del sistema di partenza. Si ha infatti:

$$\dot{x} = Ax + Bu =$$
$$= Ax + B\left(\bar{u} - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T x\right) =$$
$$= \left(A - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T\right)x + Bu =$$
$$= \bar{\bar{A}}x + \bar{\bar{B}}u$$

Per cui si vede che:

$$\bar{\bar{A}} = A - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T$$
$$\bar{\bar{B}} = B$$

L'equazione di Riccati da risolvere è allora (analogamente alla (4.13)):

$$\dot{\bar{\bar{P}}} = \bar{\bar{Q}} - \bar{\bar{A}}^T\bar{\bar{P}} - \bar{\bar{P}}\bar{\bar{A}} - \bar{\bar{P}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{B}}^T\bar{\bar{P}}$$

La sua soluzione fornisce la matrice $\bar{\bar{P}}$. Si ricava allora, analogamente alla (4.11):

$$\bar{u} = \bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{B}}^T\bar{\bar{P}}x$$

Per trovare il comando *u*, bisogna rifare la sostituzione (4.22):

$$u = \bar{u} - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T x =$$
$$= \left(\bar{\bar{R}}^{-1}\bar{\bar{B}}^T\bar{\bar{P}} - \bar{R}^{-1}\bar{W}^T\right)x$$

Riassumendo, è possibile risolvere il problema, in questo modo:

- Si costruiscono le matrici $\bar{\bar{Q}}, \bar{\bar{R}}$ con le (4.23) e (4.19);
- …

Smorzamento minimo

Vogliamo imporre $e^{-\alpha t}$ come inviluppo della risposta.
Cerchiamo di risolvere un problema di ottimo per:

$$\bar{x} = e^{\alpha t}x$$

Se *x* è asintoticamente stabile, e anche $\bar{x}$ lo è, allora si è sicuri che *x* sarà confinata all'interno dell'inviluppo esponenziale.
Poniamo anche:

$$\bar{u} = e^{\alpha t}u$$

E risolviamo il problema di ottimo per:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\bar{x}^T Q\bar{x} + \bar{u}^T R\bar{u}\right)dt$$

Nell'assemblaggio dell'equazione di Riccati, bisogna considerare che le matrici da inserire non sono quelle del sistema di partenza. Si ha infatti:

$$x = e^{-\alpha t}\bar{x}$$
$$u = e^{-\alpha t}\bar{u}$$

Che sostituita ne sistema di partenza (4.1):

$$-\alpha e^{-\alpha t}\bar{x} + e^{-\alpha t}\dot{\bar{x}} = Ae^{-\alpha t}\bar{x} + Be^{-\alpha t}\bar{u}$$

Cioè:

$$\dot{\bar{x}} = \left(A + \alpha\mathbb{I}\right)\bar{x} + B\bar{u}$$

Da cui si conclude che la matrice *A* da inserire nell'equazione di Riccati è:

$$\bar{A} = A + \alpha\mathbb{I}$$

Ottimizzazione rispetto a un riferimento variabile

Consideriamo un sistema fisico:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Che deve inseguire un riferimento la cui dinamica è:

$$\begin{cases} \dot{x}_r = A_r x_r \\ y_r = C_r x_r \end{cases}$$

Unendo le due dinamiche, e dicendo che l'uscita complessiva non è altro che l'errore $e = y - y_r$:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_r \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}u$$
$$\tilde{y} = \begin{bmatrix} C & -C_r \end{bmatrix}\tilde{x}$$

A questo punto possiamo impostare un problema di ottimo su:

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{\infty}\left(\tilde{y}^T Q\tilde{y} + u^T Ru\right)dt$$

Che è un problema di ottimo sulle uscite, analogo a quello visto prima (4.18).
Con la sua soluzione, si determina:

$$k = R^{-1}\tilde{B}^T P = R^{-1}\begin{bmatrix} B^T & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} =$$
$$= R^{-1}B^T\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$u = k\tilde{x} = R^{-1}B^T\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix}\tilde{x}$$

Che si può anche scrivere come:

$$u = R^{-1}B^T\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_r \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k & k_r \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ x_r \end{Bmatrix}$$

La parte di controllo del sistema P_{11} è ottenibile dall'equazione algebrica di Riccati:

$$C^TQC - P_{11}BR^{-1}B^TP_{11} + A^TP_{11} + P_{11}A = 0$$

La k è la stessa che si ottiene cercando il controllo ottimo solo sul sistema fisico.
La parte di inseguimento P_{12} è invece ottenibile dalla seguente equazione algebrica di Riccati:

$$-C^TQC_r + \left(A + Bk\right)^T P_{12} + P_{12}A_r = 0$$

Il guadagno k_r viene allora a dipendere dal guadagno del sistema fisico k.
(?????)

L'osservatore ottimo

Se sul sistema agiscono dei disturbi, nasce il concetto di osservatore ottimo.
Consideriamo un sistema fisico, su cui agiscono dei disturbi w sulla dinamica e v sull'uscita.
Questi dovranno essere dei rumori bianchi.

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Fw \\ y = Cx + Du + v \end{cases}$$

L'osservatore sarà come già visto:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} + \hat{B}u + Ly \\ \hat{y} = \hat{x} \end{cases}$$

In analogia a quanto già fatto, si scrive la dinamica dell'errore:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \dot{\hat{x}} = \\ &= Ax + Bu + Fw - \hat{A}\hat{x} - \hat{B}u - Ly \end{aligned} \qquad (4.24)$$

Considerando ora che:

$$\hat{x} = x - e$$
$$y = Cx + Du + v$$

La (4.24) diventa:

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ax + Bu + Fw - \hat{A}x + \hat{A}e - \hat{B}u - LCx - LDu - Lv = \\ &= \left(A - \hat{A} - LC\right)x + \left(B - \hat{B} - LD\right)u + \hat{A}e + Fw - Lv \end{aligned}$$

Affinché la dinamica di e sia indipendente da x e da u, bisognerà porre:

$$\begin{cases} A - \hat{A} - LC = 0 \\ B - \hat{B} - LD = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \hat{A} = A - LC \\ \hat{B} = B - LD \end{cases} \qquad (4.25)$$

Per cui:

$$\dot{e} = \hat{A}e + Fw - Lv$$

La somma di due rumori bianchi sarà un altro rumore bianco, per cui si può porre:

$$\eta = Fw - Lv$$

Da cui:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \eta \qquad (4.26)$$

L'errore non potrà mai essere nullo a regime, in quanto è forzato dal rumore bianco η. Se però, come si spera, η ha media nulla, allora anche e avrà media nulla.
Quello che si può fare è cercare la matrice L tale da minimizzare la varianza dell'errore. Si ricordi che la varianza è definita come:

$$\sigma_{ee}^{\ 2} = \int_M \left(e\left(t + \tau\right) - \mu_e\right)^2 dt \qquad \forall\, \tau$$

Si ponga:

$$\sigma_{ee}{}^2 = P$$

Si scriva ora l'equazione di Liapunov non stazionaria, in quanto η potrebbe non essere ergodico:

$$\dot{P} = \hat{A}P + P\hat{A}^T + BQ_{\eta\eta}B^T \tag{4.27}$$

Dalla dinamica dell'errore (4.26), si vede che $B = \mathbb{I}$. Inoltre si ha per $Q_{\eta\eta}$:

$$\begin{aligned} Q_{\eta\eta} &= \int_M \left(Fw(t) - Lv(t)\right)\left(Fw(t) - Lv(t)\right)^T dt = \\ &= F\int_M w(t)w(t)^T dt\, F^T + \ldots = \\ &= FWF^T + LVL^T - FXL^T - LXF^T \end{aligned}$$

Per cui la (4.27) diventa:

$$\dot{P} = \hat{A}P + P\hat{A}^T + FWF^T + LVL^T - FXL^T - LX^T F^T \tag{4.28}$$

Dove W e V sono le matrici delle autocovarianze di w e v, e X è la matrice delle intercovarianze tra w e v.

Disturbi scorrelati

In questo caso si ha $X = 0$, per cui, anche grazie alle (4.25), la (4.28) diviene:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \hat{A}P + P\hat{A}^T + FWF^T + LVL^T = \\ &= (A - LC)P + P\left(A^T - C^T L^T\right) + FWF^T + LVL^T = \\ &= AP + PA^T - LCP - PC^T L^T + FWF^T + LVL^T \end{aligned} \tag{4.29}$$

Ricordiamo ora quanto trovato per il controllo ottimo (equazione (4.10), qui riportata):

$$k = R^{-1}B^T P$$

Analogamente, supponiamo che la L cercata abbia una forma analoga:

$$L^T = V^{-1}CP$$

Considerando che W e P sono matrici simmetriche:

$$L = PC^T V^{-1} \tag{4.30}$$

Che sostituita nella (4.29) porta a:

$$\begin{aligned} \dot{P} &= AP + PA^T - \left(PC^T V^{-1}\right)CP - PC^T\left(V^{-1}CP\right) + FWF^T + \left(PC^T V^{-1}\right)V\left(V^{-1}CP\right) = \\ &= FWF^T + AP + PA^T - PC^T V^{-1}CP \end{aligned} \tag{4.31}$$

Questa equazione è analoga a quella di Riccati (4.13), che qui è riportata:

$$\dot{P} = Q - A^T P - PA - PBR^{-1}B^T P$$

A patto di adottare le seguenti corrispondenze:

Osservatore ottimo	Controllo ottimo
$\dot{P} = FWF^T + AP + PA^T - PC^T V^{-1}CP$	$\dot{P} = Q - A^T P - PA - PBR^{-1}B^T P$
$-A^T$	A
FWF^T	Q
C^T	B
V	R

È possibile allora risolvere l'equazione di Riccati per trovare P, quindi sostituirlo nella (4.30) per determinare il guadagno L dell'osservatore ottimo.

Disturbi correlati

Consideriamo il termine X come una perturbazione della condizione di ottimo. Consideriamo le matrici P, L come composte dalla soluzione ottima $\hat{P}, \hat{L}$ e dalla perturbazione U, Z.

$$P = \hat{P} + U$$

$$L = \hat{L} + Z$$

Sostituendo queste nell'equazione di Liapunov (4.28) si ha:

$$\dot{\hat{P}} + \dot{U} = \left(A - \left(\hat{L} + Z\right)C\right)\left(\hat{P} + U\right) + \left(\hat{P} + U\right)\left(A - \left(\hat{L} + Z\right)C\right)^T + FWF^T + \left(\hat{L} + Z\right)V\left(\hat{L} + Z\right)^T - FX\left(\hat{L} + Z\right)^T - \left(\hat{L} + Z\right)X^T F^T =$$

$$= \left(A - \hat{L}C\right)\hat{P} + \hat{P}\left(A - \hat{L}C\right)^T + FWF^T + \hat{L}V\hat{L}^T - FX\hat{L}^T - \hat{L}X^T F^T +$$

$$+ \left(A - \hat{L}C - ZC\right)U + U\left(A - \hat{L}C - ZC\right)^T + ZVZ^T +$$

$$- Z\left(C\hat{P} - V\hat{L}^T + X^T F^T\right) - \left(\hat{P}C^T - \hat{L}V + FX\right)Z^T$$

(4.32)

Poiché per ipotesi $\hat{P}$ è soluzione dell'equazione di Liapunov (4.28), si ha:

$$\dot{\hat{P}} = \left(A - \hat{L}C\right)\hat{P} + \hat{P}\left(A - \hat{L}C\right)^T + FWF^T + \hat{L}V\hat{L}^T - FX\hat{L}^T - \hat{L}X^T F^T \quad (4.33)$$

Quindi sottraendo membro a membro la (4.33) dalla (4.32) si ottiene:

$$\dot{U} = \left(A - \hat{L}C - ZC\right)U + U\left(A - \hat{L}C - ZC\right)^T + ZVZ^T - Z\left(C\hat{P} - V\hat{L}^T + X^T F^T\right) - \left(\hat{P}C^T - \hat{L}V + FX\right)Z^T \quad (4.34)$$

Per fare in modo che questa equazione diventi equivalente ad un'altra equazione di Riccati, dobbiamo annullare i termini non simmetrici:

$$C\hat{P} - V\hat{L}^T + X^T F^T = 0$$

Di conseguenza sarà nullo anche il suo trasposto:

$$\hat{P}C^T - \hat{L}V + FX = 0$$

Da cui possiamo ricavare $\hat{L}$:

$$\hat{L} = \left(\hat{P}C^T + FX\right)V^{-1} \quad (4.35)$$

In funzione della soluzione ottima $\hat{P}$.

Risposta a forzanti non deterministiche

Media: $\mu_x = \int_M x(t+\tau)\,dt, \qquad \forall \tau$

Varianza:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^2 &= \int_M \left[x(t+\tau) - \mu_x\right]^2 dt, \qquad \forall \tau \\ &= \int_M \left[\Delta x(t+\tau)\right]^2 dt, \qquad \forall \tau\end{aligned}$$

Integrale di convoluzione: $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau$

Proprietà: $\mu_y = \mu_u \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,d\tau = \mu_u H(0)$

$$\Delta y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)\,\Delta u(t-\tau)\,d\tau$$

Autocovarianza: $k_{xx}(\tau) = \int_M \Delta x(t)\,\Delta x(t+\tau)\,dt$

Intercovarianza: $k_{xy}(\tau) = \int_M \Delta x(t)\,\Delta y(t+\tau)\,dt$

Autocorrelazione: $r_{xx}(\tau) = \int_M x(t)\,x(t+\tau)\,dt$

Proprietà: $\sigma_{xx}^2 = k_{xx}(0)$

$$k_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau) - \mu_x^2$$

$$\sigma_{yy}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(v)\,k_{uu}(v-w)\,h(w)\,dv\,dw$$

Densità spettrale di potenza: $\Phi_{xx}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} k_{xx}(\tau)\,e^{-j\omega\tau}\,d\tau \quad \leftrightarrow \quad k_{xx}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(\omega)\,e^{j\omega\tau}\,d\omega$

Proprietà: $\Phi_{yy}(\omega) = \left|H(\omega)\right|^2 \Phi_{uu}(\omega)$

Per sistemi a più dimensioni: $\{\dot{x}\} = [A]\{x\} + [B]\{u\}$

$$[0] = [A]\left[\sigma_{xx}^2\right] + \left[\sigma_{xx}^2\right][A]^T + [B]\left[\sigma_{ux}^2\right] + \left[\sigma_{xu}^2\right][B]^T$$

Nel caso di rumori bianchi: $\left[k_{uu}(\tau)\right] = [W]\,\delta(\tau) \quad \leftrightarrow \quad \left[\Phi_{uu}(\omega)\right] = [W]$

Equazione di Liapunov: $[0] = [A]\left[\sigma_{xx}^2\right] + \left[\sigma_{xx}^2\right][A]^T + [B][W][B]^T$