

# Sistema di controllo per il pendolo inverso

*Luca Rancati 644292*

Servosistemi Aerospaziali

*prof. Franco Bernelli Zazzera*

# Indice

<b>1</b>	<b>Descrizione del sistema fisico</b>	<b>3</b>
1.1	Equazioni di moto del sistema . . . . .	3
1.2	Equilibri del sistema e linearizzazione delle equazioni differenziali	5
1.3	Modello agli stati . . . . .	5
1.4	Modello dell'attuatore . . . . .	6
1.5	I sensori . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Simulazione numerica</b>	<b>9</b>
2.1	Il sistema non controllato . . . . .	9
2.2	Il regolatore PID . . . . .	10
2.2.1	PID per il controllo dell'angolo $\theta$ . . . . .	10
2.2.2	PID per il controllo della posizione $x$ del carrello . . . . .	11
2.3	Modello numerico in Simulink e risultati . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Il modello in laboratorio</b>	<b>18</b>
<b>4</b>	<b>Appendice</b>	<b>20</b>
4.1	determinazione dell'attrito . . . . .	20
4.2	Metodo di Newton . . . . .	20
4.3	Funzioni matlab . . . . .	20

# Elenco delle figure

1.1	sistema fisico . . . . .	4
2.1	angolo (gradi) per 100 s di simulazione, $\theta(0) = 1.7 \text{ gradi}$ . . . . .	15
2.2	transitorio iniziale per l'angolo teta . . . . .	15
2.3	posizione del carrello (cm) per 100 s di simulazione . . . . .	16
2.4	posizione del carrello (cm) per 300 s di simulazione . . . . .	16
2.5	angolo (gradi) per 300 s di simulazione, $\theta(0) = 1.7 \text{ gradi}$ . . . . .	17
3.1	angolo (gradi), ottenuto in laboratorio . . . . .	18
3.2	posizione del carrello (cm) ottenuta in laboratorio . . . . .	19

# Capitolo 1

## Descrizione del sistema fisico

Si vuole descrivere il sistema di controllo per il pendolo inverso; per prima cosa viene sviluppato il modello numerico, poi quello di laboratorio una volta che il modello numerico soddisfa le specifiche richieste. In questo caso le specifiche sono:

- massa aggiunta al carrello di 37 g
- controllo PID
- massimo errore di 2 gradi per l'angolo dell'asta

Il sistema fisico consiste in un carrello che scorre su una guida orizzontale sul quale è incernierata un'asta; al carrello è aggiunta una massa di 0.037 kg; obiettivo del progetto è di controllare che l'asta resti verticale con un massimo errore consentito di due gradi.

### 1.1 Equazioni di moto del sistema

Per ricavare le equazioni di moto del sistema si individuano le coordinate libere, si ricava l'energia cinetica del sistema e l'energia potenziale, infine si utilizza la formula di *Lagrange*. Le coordinate libere sono la posizione  $x$  del carrello e l'angolo  $\theta$  dell'asta; l'angolo è considerato nullo sulla verticale. Ricaviamo l'energia cinetica del sistema; essa avrà un contributo traslazionale ed uno rotazionale e le generiche espressioni per entrambi i contributi sono<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}T_{trasl} &= \frac{1}{2}m v^2 \\T_{rot} &= \frac{1}{2}I \dot{\omega}^2\end{aligned}$$

L'energia potenziale è in generale<sup>2</sup>:

$$U = -m g y$$

---

<sup>1</sup>m è la massa del sistema e  $v$  la velocità,  $I$  è il momento di inerzia del sistema rispetto all'asse di rotazione e  $\dot{\omega}$  l'accelerazione angolare

<sup>2</sup>m è la massa e  $y$  la sua distanza normale al riferimento orizzontale

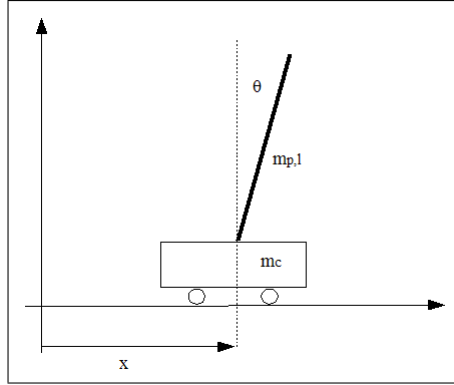


Figura 1.1: sistema fisico

Nel nostro caso l'energia cinetica e potenziale sono:

$$T = \frac{1}{2}(m_c + m_p) \dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_p/3) l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) \quad (1.1)$$

$$U = -\frac{m_p}{2} g l \cos(\theta) \quad (1.2)$$

Ricaviamo ora la Lagrangiana del sistema:

$$L = T + U$$

e sostituendo otteniamo:

$$L = \frac{1}{2}(m_c + m_p) \dot{x}^2 + \frac{1}{2}(m_p/3) l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p l \dot{x} \dot{\theta} \cos(\theta) - \frac{m_p}{2} g l \cos(\theta) \quad (1.3)$$

Sfruttiamo l'equazione di Lagrange per generare le due equazioni differenziali che descrivono il moto del sistema.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = f_k$$

Inserendo L trovata in precedenza e ricordando che  $\dot{q}_k$  sono le derivate temporali delle coordinate libere e  $q_k$  le coordinate libere stesse otteniamo:

$$\begin{cases} (m_c + m_p) \ddot{x} + \frac{1}{2} m_p l [\cos(\theta) \ddot{\theta} - \sin(\theta) \dot{\theta}^2] = f_x \\ \frac{m_p}{3} l^2 \ddot{\theta} + \frac{m_p}{2} l \cos(\theta) \ddot{x} - \frac{m_p}{2} g l \sin(\theta) = f_\theta \end{cases} \quad (1.4)$$

Va evidenziato che la forzante  $f_\theta$  è nulla visto che non c'è la possibilità di controllare direttamente l'angolo  $\theta$ . L'unica possibilità è di introdurre una forza di controllo direttamente sul carrello, forza in direzione x. Inoltre è stato aggiunto un termine di attrito proporzionale alla velocità del carrello per simulare l'attrito tra carrello e guida;<sup>3</sup> inoltre si considera:

$$m_{tot} = m_c + m_p \quad \text{dove ad } m_c \text{ si è aggiunta la massa di } 0.037 \text{ kg}$$

<sup>3</sup>successivamente verrà spiegato come è stato ricavato il coefficiente di attrito c

Il sistema di equazioni diventa:

$$\begin{cases} m_{tot} \ddot{x} + \frac{1}{2} m_p l [\cos(\theta) \ddot{\theta} - \sin(\theta) \dot{\theta}^2] + c \dot{x} = f_x \\ \frac{m_p}{3} l^2 \ddot{\theta} + \frac{m_p}{2} l \cos(\theta) \ddot{x} - \frac{m_p}{2} g l \sin(\theta) = 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

## 1.2 Equilibri del sistema e linearizzazione delle equazioni differenziali

Il sistema trovato è un generico sistema non lineare a tempo continuo del tipo:

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u(t))$$

in cui  $z(t) \in R^n$  è il vettore di stato (nel nostro caso sarà scelto  $z(t) = \{\theta(t), x(t), \dot{\theta}(t), \dot{x}(t)\}^T$ ),  $u(t) \in R^m$  è il vettore degli ingressi e  $t \in R$  è il tempo; si definisce stato di equilibrio per  $u(t) = \bar{u} \forall t$  costante uno stato  $z(t) = \bar{z} \forall t$  costante da cui discende che  $\dot{z}(t) = 0$ . Nel nostro caso troviamo:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{\theta}(t) = 0 \\ \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{\theta}(t) = 0 \end{cases} \quad (1.6)$$

da cui si ricava che:

$$\begin{cases} f_x = 0 \quad \forall x \\ \frac{m_p}{2} g l \sin(\theta) = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si evince che vi sono due posizioni di equilibrio per l'angolo  $\theta$ :

$$\begin{cases} \bar{\theta} = 0 \\ \bar{\theta} = \pi \end{cases} \quad (1.7)$$

L'unica posizione di equilibrio fisicamente plausibile è quella nulla ed è una posizione di equilibrio instabile. È possibile a questo punto linearizzare le equazioni attorno alla posizione di equilibrio instabile ottenendo:

$$\begin{cases} m_{tot} \ddot{x} + \frac{1}{2} m_p l \ddot{\theta} + c \dot{x} = f_x \\ \frac{m_p}{3} l^2 \ddot{\theta} + \frac{m_p}{2} l \ddot{x} - \frac{m_p}{2} g l \theta = 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

## 1.3 Modello agli stati

Il sistema lineare a tempo continuo trovato in precedenza è un sistema di due equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine; è possibile trasformarlo in un sistema di quattro equazioni differenziali ordinarie del primo ordine aggiungendo due equazioni in questo modo:

$$\begin{cases} \dot{\theta} - \dot{\theta} = 0 \\ \dot{x} - \dot{x} = 0 \\ m_{tot} \ddot{x} + \frac{1}{2} m_p l \ddot{\theta} + c \dot{x} = f_x \\ \frac{m_p}{3} l^2 \ddot{\theta} + \frac{m_p}{2} l \ddot{x} - \frac{m_p}{2} g l \theta = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Il sistema in forma matriciale diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_p}{2} l^2 & \frac{m_p}{2} l \\ 0 & 0 & \frac{m_p}{2} l & m_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{m_p}{2} g l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \{f_x\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Inoltre un generico sistema dinamico ha  $y \in R^p$  vettore delle uscite definite dalla relazione di trasformazione delle uscite  $g$ , così che il sistema completo diventa:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = f(z(t), u(t)) \\ y = g(z(t), u(t)) \end{cases}$$

Nel caso di sistemi lineari otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = A z(t) + B u(t) \\ y = C z(t) + D u(t) \end{cases}$$

Nel nostro caso le uscite sono due, date dalle due misure effettuabili per la posizione  $x$  e l'angolo  $\theta$ . Il sistema matriciale scritto in precedenza è della forma:

$$[V] \{\dot{z}(t)\} + [\bar{A}] \{z(t)\} + [\bar{B}] \{u(t)\} = \{0\}$$

Si possono quindi ricavare le matrici del sistema ponendo:

$$\begin{aligned} A &= -V^{-1} \bar{A} \\ B &= -V^{-1} \bar{B} \end{aligned}$$

Le matrici presenti nella trasformazione dell'uscita sono:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A questo sistema viene ora aggiunto il modello dell'attuatore, costituito da un motore elettrico.

## 1.4 Modello dell'attuatore

L'attuatore è un motore elettrico che ricevendo una tensione in ingresso fornisce una coppia in uscita. Indicando con  $T$  e  $V$  rispettivamente la coppia e la tensione applicate, e con  $\omega$  e  $i$  la velocità angolare del motore e la corrente circolante, sfruttando la legge di Kirchhoff alle maglie e un bilancio di coppie, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \dot{i} = -\frac{R_m}{L_m} i - \frac{h_m}{L_m} \omega + \frac{1}{L_m} V \\ \dot{\omega} = \frac{k_m}{J_m} i - \frac{B_m}{J_m} \omega - \frac{1}{J_m} T \end{cases} \quad (1.10)$$

dove  $R_m$  e  $L_m$  sono la resistenza e l'induttanza interne al motore,  $h_m$  è la costante della forza elettromotrice inversa,  $K_m$  è la costante di coppia,  $J_m$  il momento di inerzia del rotore,  $B_m$  il coefficiente di attrito viscoso. Il motore è anche dotato di un riduttore con rapporto  $\tau_m$  il quale è collegato mediante una ruota dentata di raggio  $r_m$  ad una cremagliera, quindi la coppia in uscita

è convertita in forza, e la velocità angolare in velocità lineare  $\dot{x}$  del carrello. Traduciamo quindi il tutto con le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} T = \frac{f_x r_m}{\tau_m} \\ \omega = \frac{\tau_m \dot{x}}{r_m} \implies \dot{\omega} = \frac{\tau_m \ddot{x}}{r_m} \end{cases}$$

Vi è inoltre il rendimento del motore  $\eta_m$ . Il sistema diventa quindi:

$$\begin{cases} \dot{i} = -\frac{R_m}{L_m} i - \frac{h_m \tau_m}{L_m r_m} \dot{x} + \frac{\eta_m}{L_m} V \\ \ddot{x} = \frac{k_m \tau_m}{J_m \tau_m} i - \frac{B_m}{J_m} \dot{x} - \frac{r_m^2}{J_m \tau_m^2} f_x \end{cases} \quad (1.11)$$

Questo sistema va inserito nel modello agli stati per completare la descrizione del sistema fisico; tuttavia possiamo trascurare il transitorio elettrico rispetto a quello meccanico, cioè considerare la corrente a regime durante il transitorio meccanico.<sup>4</sup> Il tutto si traduce nel considerare:

$$\begin{cases} \dot{i} = 0 \\ 0 = -\frac{R_m}{L_m} i - \frac{h_m \tau_m}{L_m r_m} \dot{x} + \frac{\eta_m}{L_m} V \\ \ddot{x} = \frac{k_m \tau_m}{J_m \tau_m} i - \frac{B_m}{J_m} \dot{x} - \frac{r_m^2}{J_m \tau_m^2} f_x \end{cases}$$

Ricavando  $i$  dalla seconda equazione e sostituendo nella terza si ricava la forza sul carrello in funzione di  $\dot{x}$  e  $V$ :

$$\begin{aligned} f_x &= \alpha \dot{x} + \beta V \\ \text{dove } \alpha \text{ e } \beta \text{ sono } \implies \alpha &= -\frac{\tau_m^2}{r_m^2} \left( \frac{k_m h_m}{R_m} + B_m \right) \\ \beta &= \frac{\eta_m k_m \tau_m}{R_m r_m} \end{aligned}$$

Il modello lineare completo comprendente anche l'attuatore diventa:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_p}{2} l^2 & \frac{m_p}{2} l \\ 0 & 0 & \frac{\dot{m}_p}{2} l & m_t \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{m_p}{2} g l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c + \alpha) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \\ \dot{\theta} \\ \dot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\beta \end{bmatrix} \{V\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

in cui  $\alpha$  e  $\beta$  sono stati definiti prima. Analogamente a prima si possono ricavare le matrici A,B,C,D del sistema. Nella simulazione numerica verrà utilizzato questo modello agli stati. Considerando che c'è una tensione minima al di sotto della quale non si ha forza prodotta ed una tensione massima al di sopra della quale si ha la saturazione dell'attuatore, nel modello si inseriranno un blocco *dead zone*<sup>5</sup> ed un blocco *saturation port*.<sup>6</sup>

<sup>4</sup>il tempo caratteristico del transitorio elettrico è molto molto piccolo rispetto a quello meccanico

<sup>5</sup>con zona morta tra  $\pm 0,4$  [V]

<sup>6</sup>con tensione limitata tra  $\pm 6$  [V]



## 1.5 I sensori

Come sensori sono presenti due potenziometri; uno misura la posizione dell'asta, l'altro quella del carrello. Per simulare correttamente il loro funzionamento si è seguito il seguente procedimento:

1. analisi del segnale misurato in laboratorio
2. esecuzione della densità spettrale di potenza
3. verifica dell'ergodicità del rumore presente
4. calcolo della sensibilità del potenziometro

Eseguendo la densità spettrale di potenza si nota che il rumore ha intensità praticamente costante a tutte le frequenze e può quindi essere modellato come un rumore bianco;<sup>7</sup> A questo punto è necessario filtrare il segnale; La funzione di trasferimento<sup>8</sup> del filtro è la seguente:

$$\xi_{filtrata} = G(s) \xi_{rumore} \quad \text{dove} \quad G(s) = \frac{\omega}{s + \omega}$$

Si è scelta una frequenza di taglio pari a 10 [Hz]. Per il calcolo della sensibilità sono stati misurati quanti volt si registravano in uscita rispetto ai centimetri percorsi dal carrello e dall'angolo dell'asta<sup>9</sup>. Si sono ricavati i seguenti valori:

- asta 4 [V/rad]
- carrello 11.11 [V/m]

---

<sup>7</sup>si utilizzerà il blocco simulink *Band limited white noise*

<sup>8</sup> $\xi$  è una generica variabile e  $\omega$  è la pulsazione corrispondente alla frequenza di taglio:  
 $\omega = 2\pi f$

<sup>9</sup>misure fatte con riga e goniometro per il carrello e l'asta; i volt sono stati registrati con matlab in laboratorio

## Capitolo 2

# Simulazione numerica

Vedremo ora l'analisi in anello aperto del sistema non controllato e le sue proprietà di stabilità. Vedremo poi come formulare una legge di controllo utilizzando un regolatore PID lavorando sulla matrice delle funzioni di trasferimento del sistema.

### 2.1 Il sistema non controllato

Dopo aver ricavato il modello agli stati, descritto nel capitolo precedente, si hanno le matrici A,B,C,D del sistema. Utilizzando matlab la matrice A ed i suoi autovalori sono:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 30.6043 & 0 & 0 & 49.4236 \\ -2.6357 & 0 & 0 & -20.0989 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.0421 \\ -4.7055 \\ -20.4355 \end{pmatrix}$$

Essendoci un autovalore a parte reale maggiore di zero si conclude che il punto di equilibrio  $\bar{\theta} = 0$  è instabile. L'autovalore nullo rappresenta la possibilità di avere una posizione di equilibrio per ogni x. È possibile calcolare la matrice delle funzioni di trasferimento date la matrici del sistema nel seguente modo:

$$N(s) = C (s I - A)^{-1} B + D$$

e si ottengono due funzioni di trasferimento, una che lega l'angolo dell'asta alla forza sul carrello ed una che lega la posizione del carrello alla forza su di esso; esse sono costituite da un numeratore e dallo stesso denominatore il quale è il polinomio caratteristico della matrice A:

$$\frac{\theta(s)}{f(s)} = \frac{-6.489 s^2}{s^4 + 20.1 s^3 - 30.6 s^2 - 484.8 s} \quad (2.1)$$

$$\frac{x(s)}{f(s)} = \frac{2.639 s^2 - 63.66}{s^4 + 20.1 s^3 - 30.6 s^2 - 484.8 s} \quad (2.2)$$

ottenibili con i comandi matlab:

`sis = ss(A,B,C,D)` crea il sistema dinamico date le matrici

$tf(sist)$  funzioni di trasferimento dato il sistema dinamico

Simbolicamente le due funzioni di trasferimento sono:

$$\frac{\theta(s)}{f(s)} = \frac{n_1 s^2}{s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s} \quad (2.3)$$

$$\frac{x(s)}{f(s)} = \frac{z_1 s^2 + z_2}{s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s} \quad (2.4)$$

È ora possibile lavorare separatamente su ciascuna funzione di trasferimento per controllare il sistema, elaborando un regolatore PID per ogni funzione.

## 2.2 Il regolatore PID

Questo tipo di regolatore prevede un controllo proporzionale all'errore rispetto ad un riferimento, derivativo ed integrale. L'effetto del controllo proporzionale è quello di contrastare l'errore, quello derivativo è quello di anticipare la risposta del sistema, quello integrale di annullare l'errore a regime. Questo si traduce nel calcolare i coefficienti del regolatore in modo tale che il sistema controllato abbia tutti i poli a parte reale minore di zero; lavorando sulle funzioni di trasferimento occorre quindi aggiungere al sistema non controllato la funzione di trasferimento del regolatore PID e studiare la stabilità del sistema in anello chiuso. La funzione di trasferimento del regolatore PID è:

$$R_{PID}(s) = \frac{k_p s + k_d s^2 + k_i}{s} \quad (2.5)$$

Questa verrà aggiunta alle due funzioni di trasferimento per l'angolo teta e la posizione del carrello.

### 2.2.1 PID per il controllo dell'angolo $\theta$

La funzione di trasferimento  $G(s)$  è quella ricavata prima per  $\theta$ . La funzione di trasferimento dell'anello chiuso è:

$$G_{CL}(s) = \frac{R_{PID}(s) G(s)}{1 + R_{PID}(s) G(s)}$$

e cioè:

$$G_{CL}(s) = \frac{num_{PID} num_G}{den_{PID} den_G + num_{PID} num_G}$$

quindi simbolicamente:

$$G_{CL}(s) = \frac{(n_1 s^2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}{s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + (n_1 s^2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}$$

Raccogliendo i termini dello stesso grado otteniamo:

$$G_{CL}(s) = \frac{(n_1 s^2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}{s^2 [s^3 + (d_1 + n_1 k_d) s^2 + (d_2 + n_1 k_p) s + (d_3 + n_1 k_i)]}$$

A questo punto al denominatore compaiono i coefficienti del regolatore in modo indipendente; è però possibile solo controllare tre poli su quattro potendo

agire solo sul polinomio di grado tre ed avendo tre gradi di libertà ovvero i tre coefficienti. per calcolarli analiticamente si confronta la parte di terzo grado del denominatore della funzione dell'anello chiuso con un generico polinomio di terzo grado le cui radici sono  $-p_1, -p_2, -p_3$ :

$$(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)$$

che sviluppata dà:

$$s^3 + (p_1 + p_2 + p_3)s^2 + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3)s + (p_1 p_2 p_3)$$

Uguagliando i coefficienti che moltiplicano i termini dello stesso grado otteniamo:

$$\begin{cases} k_d = \frac{[(p_1 + p_2 + p_3) - d_1]}{n_1} \\ k_p = \frac{[(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3) - d_2]}{n_1} \\ k_i = \frac{[(p_1 p_2 p_3) - d_3]}{n_1} \end{cases} \quad (2.6)$$

Quindi scegliendo i tre poli in anello chiuso  $p_1, p_2, p_3$  si calcolano i coefficienti del regolatore. Il polo a parte reale nulla non si riesce a spostare, quindi in anello chiuso si riesce a rendere questa parte di sistema semplicemente stabile. <sup>1</sup>La funzione matlab *coefpid.m* calcola i coefficienti del regolatore dati in ingresso i tre poli in anello chiuso.

## 2.2.2 PID per il controllo della posizione x del carrello

### PID sulla funzione di trasferimento $x(s)/f(s)$

Eseguendo lo stesso procedimento fatto per l'angolo teta si ottiene:

$$\frac{x(s)}{f(s)} = \frac{z_1 s^2 + z_2}{s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s}$$

aggiungendo il regolatore:

$$G_{CL}(s) = \frac{(z_1 s^2 + z_2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}{s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s^2 + (z_1 s^2 + z_2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}$$

e risolvendo si ottiene:

$$G_{CL}(s) = \frac{(z_1 s^2 + z_2)(k_p s + k_d s^2 + k_i)}{[s^5 + (d_1 + z_1 k_d) s^4 + (d_2 + z_1 k_p) s^3 + (d_3 + z_1 k_i + z_2 k_d) s^2 + z_2 k_p s + z_2 k_i]}$$

Come si nota, i coefficienti non sono più indipendenti; inoltre se confrontassi il denominatore con un generico polinomio di quinto grado del tipo  $(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)(s + p_5)$  otterrei cinque condizioni da verificare con solo tre parametri. Quindi non verrà presa questa soluzione.

<sup>1</sup>parte di sistema corrispondente alla funzione di trasferimento per teta

**Compensatore per la funzione di trasferimento  $x(s)/f(s)$** 

Si è quindi pensato di aggiungere solo un compensatore che avesse uno zero che cancellasse il polo instabile della funzione di trasferimento, un polo in alta frequenza ed un guadagno:

$$R(s) = \mu \frac{(s + z)}{(s + p)} \quad (2.7)$$

in cui  $z$  ha la funzione di cancellare il polo instabile e  $p$  è un polo in alta frequenza. Così facendo però in anello chiuso si otterrebbe un sistema che ha ancora un polo a parte reale maggiore di zero anche se molto vicino allo zero. Il sistema non diverge, le specifiche sull'angolo teta sono rispettate ma il carrello oscilla continuamente; il sistema è a regime su un ciclo per valori del guadagno prossimi a 350.

**PID sulla funzione di trasferimento  $(x + k\theta)(s)/f(s)$** 

Questa soluzione porta a definire una matrice  $C$  che abbia la seconda riga pari a  $[k, 1, 0, 0]$  con  $k$  parametro libero. La funzione di trasferimento diventa:

$$\frac{(x + k\theta)(s)}{f(s)} = \frac{(a k + z_1) s^2 + z_2}{s^4 + d_1 s^3 + d_2 s^2 + d_3 s}$$

con  $a$  coefficiente costante ricavato dai calcoli con Matlab. Aggiungendo il regolatore PID si ottiene in anello chiuso:

$$G_{CL}(s) = \frac{[(a k + z_1) s^2 + z_2](k_p s + k_d s^2 + k_i)}{[s^5 + (d_1 + z_1 k_d + a k k_d) s^4 + (d_2 + z_1 k_p + a k k_p) s^3 + (d_3 + z_1 k_i + z_2 k_d + a k k_i) s^2 + z_2 k_p s + z_2 k_i]}$$

Come si vede così facendo non si può confrontare il denominatore con un generico polinomio di quinto grado e scegliere i poli in anello chiuso, in quanto si avrebbero cinque condizioni da rispettare con quattro parametri. Tuttavia è possibile rendere tutti i coefficienti del denominatore concordi, condizione però solo necessaria perchè le radici siano tutte negative. le condizioni sono:

$$\begin{cases} d_1 + z_1 k_d + a k k_d > 0 \\ d_2 + z_1 k_p + a k k_p > 0 \\ d_3 + z_1 k_i + z_2 k_d + a k k_i > 0 \\ k_p < 0 \\ k_i < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

dove  $k_p$  e  $k_i$  devono essere negativi perchè  $z_2$  che li moltiplica negli ultimi due coefficienti è negativo. Ponendo per semplicità  $k = 1$  si ricava:

$$\begin{cases} k_p > -7.9483 \\ k_d > -7.3555 \\ k_i < -1 \end{cases} \quad (2.9)$$

I valori scelti per la simulazione sono:

- $k_p = -35$
- $k_d = -8$

- $k_i = -0.8$

Tuttavia, essendo verificata solo la condizione necessaria, se con questi coefficienti si calcolano le radici del denominatore della funzione di trasferimento in anello chiuso si scopre che è presente ancora un polo positivo e vicino allo zero, cadendo così nel problema trovato in precedenza. Comunque il sistema con questi valori ha oscillazioni limitate e rispetta la condizione per l'errore su teta.

### PID sulla funzione di trasferimento $(k_1x + k_2\theta)(s)/f(s)$

Questa soluzione porta a definire una matrice C che abbia la seconda riga pari a  $[k_1, k_2, 0, 0]$ . Si introducono due parametri liberi per ottenere una funzione in anello chiuso con cinque parametri, questi due e i tre del regolatore PID. Le cinque condizioni sul confronto con un polinomio di grado quinto del tipo  $(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)(s + p_5)$  dà luogo, scelti i poli ad un sistema non lineare nelle incognite  $k_1, k_2, k_p, k_d, k_i$ . A questo punto si è tentato di risolverlo con il metodo di Newton per diverse condizioni iniziali ma esso non converge<sup>2</sup>. La funzione di trasferimento è:

$$G_{CL}(s) = \frac{[(k_1 B_3 + k_2 B_4) + k_2 z_2] (k_p s + k_d s^2 + k_i)}{s^5 + d_1 s^4 + d_2 s^3 + d_3 s + (k_1 B_3 + k_2 B_4) + k_2 z_2] (k_p s + k_d s^2 + k_i)}$$

dove i termini  $B_3$  e  $B_4$  sono i coefficienti della matrice B. Confrontando il denominatore con il polinomio di quinto grado:

$$(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)(s + p_4)(s + p_5) \quad \text{che diventa} \\ s^5 + a_1 s^4 + b_1 s^3 + c_1 s^2 + d s + e_1$$

dove i coefficienti sono:

$$a_1 = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5$$

$$b_1 = p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + p_1 p_5 + p_2 p_3 + p_2 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_4 + p_3 p_5 + p_4 p_5$$

$$c_1 = p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 p_5 + p_1 p_3 p_4 + p_1 p_3 p_5 + p_1 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 + p_2 p_3 p_5 + p_2 p_4 p_5 + p_3 p_4 p_5$$

$$d = p_1 p_2 p_3 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_5 + p_1 p_2 p_4 p_5 + p_1 p_3 p_4 p_5 + p_2 p_3 p_4 p_5$$

$$e_1 = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$$

Si arriva uguagliando i coefficienti ad un sistema non lineare come detto in precedenza; il sistema è:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + k_d k_1 B_3 + k_d k_2 B_4 - a_1 = 0 \\ d_2 + k_p k_1 B_3 + k_p k_2 B_4 - b_1 = 0 \\ d_3 + k_i k_1 B_3 + k_i k_2 B_4 + k_d k_2 z_2 - c_1 = 0 \\ k_p k_2 z_2 - d = 0 \\ k_i k_2 z_2 - e_1 = 0 \end{array} \right. \quad (2.10)$$

<sup>2</sup>bisognerebbe avere una stima a priori della soluzione per dare la condizione iniziale sensata

Con il metodo di Newton<sup>3</sup> per i sistemi non lineari non si è arrivati alla soluzione per il vettore delle incognite  $[k_1, k_2, k_p, k_d, k_i]$ . Per cui si adotta nella simulazione la soluzione PID sulla funzione di trasferimento  $(x + k\theta)(s)/f(s)$  che è quella che minimizza l'oscillazione del carrello.

### 2.3 Modello numerico in Simulink e risultati

Il sistema fisico è rappresentato dal *sistema dinamico* linearizzato attorno alla posizione  $\theta = 0$ , il blocco *state space*, che dà in uscita le variabili  $x$  e  $\theta$ . Queste passano nel blocco *rumore e filtraggio* in cui viene aggiunto il rumore e viene poi filtrato.<sup>4</sup> Le variabili filtrate entrano nel blocco *controllo* in cui viene generato l'errore rispetto al riferimento nullo per le variabili  $\theta$  e  $x + k\theta$  data la scelta delle funzioni di trasferimento su cui implementare il PID. I coefficienti sono calcolati per il PID su  $\theta$  tramite la funzione *coefpid.m* mentre per l'altra sono calcolati rispettando i vincoli (2.6) ponendo  $k = 1$ . Per entrambi i regolatori PID i coefficienti sono moltiplicati per l'errore, la derivata dell'errore e l'integrale. Per ottenere la derivata e l'integrale dell'errore si sono utilizzate due funzioni di trasferimento rappresentanti uno *pseudoderivatore* ed uno *pseudointegratore* in questo modo:

$$\frac{s}{1/(2\pi f)s + 1} \quad \text{pseudoderivatore con } f = 10 [Hz]$$

$$\frac{s}{s^2 + 0.5s} \quad \text{pseudointegratore}$$

Il comando finale è la somma dei singoli comandi elaborati dai PID. Questo comando passa dai due blocchi *dead zone* e *saturation* come spiegato in precedenza e poi viene nuovamente filtrato sempre con frequenza di taglio  $f = 10 [Hz]$ , ed infine entra nel sistema dinamico costituito dal blocco *state space*. Vediamo l'andamento delle due variabili teta ed x:

<sup>3</sup>vedere appendice

<sup>4</sup>rumore e filtri sono come spiegato in precedenza

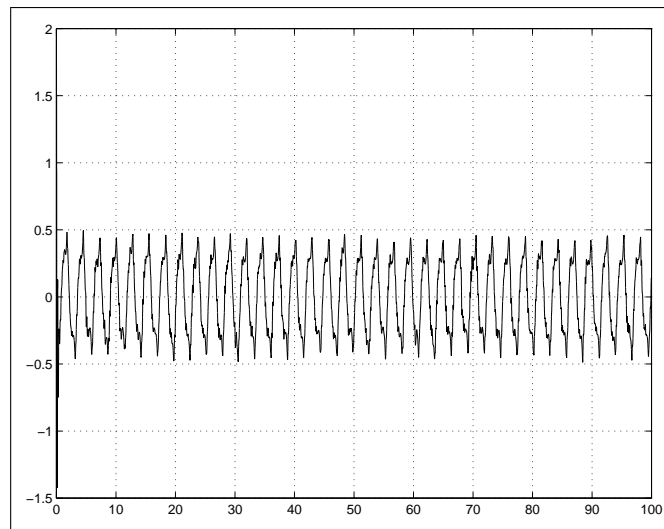


Figura 2.1: angolo (gradi) per 100 s di simulazione,  $\theta(0) = 1.7$  gradi

Le specifiche sull'angolo sono rispettate, partendo da una condizione iniziale perturbata; anche durante il transitorio iniziale le specifiche sono rispettate:

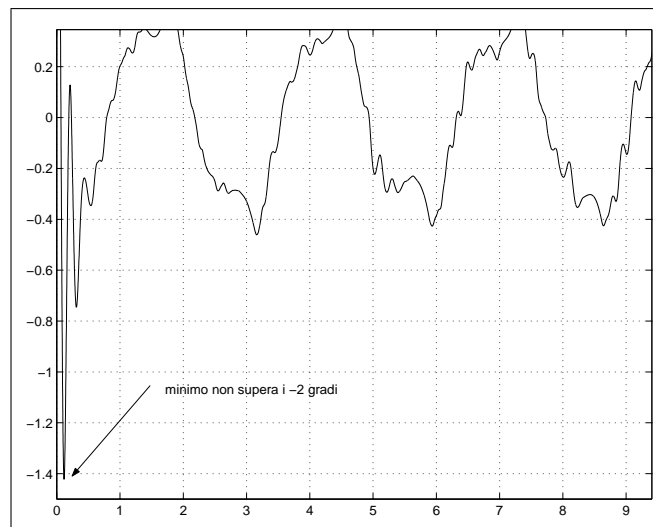


Figura 2.2: transitorio iniziale per l'angolo teta



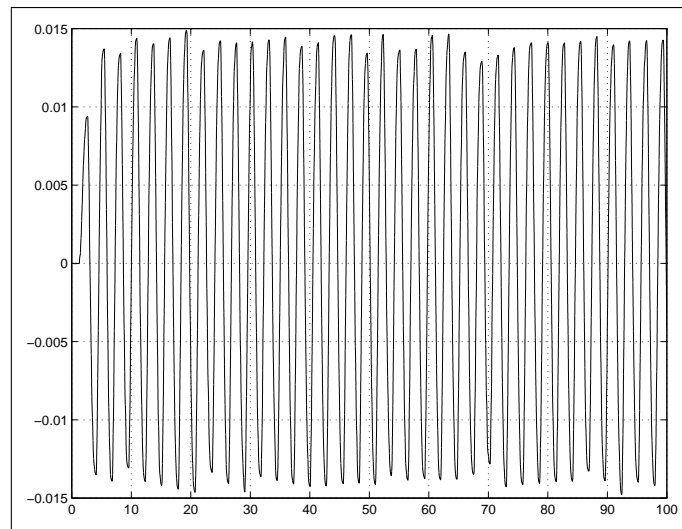


Figura 2.3: posizione del carrello (cm) per 100 s di simulazione

Come si vede il carrello si mantiene limitato nella sua oscillazione. Nel caso in cui si utilizzasse la soluzione di compensare semplicemente la funzione di trasferimento per il carrello si otterrebbero i seguenti risultati con:

$$R(s) = \mu \frac{s + z}{s + p}$$

con:

- $\mu = 350$  guadagno
- $z = -5.041$  zero che cancella il polo instabile
- $p = 100$  polo in alta frequenza

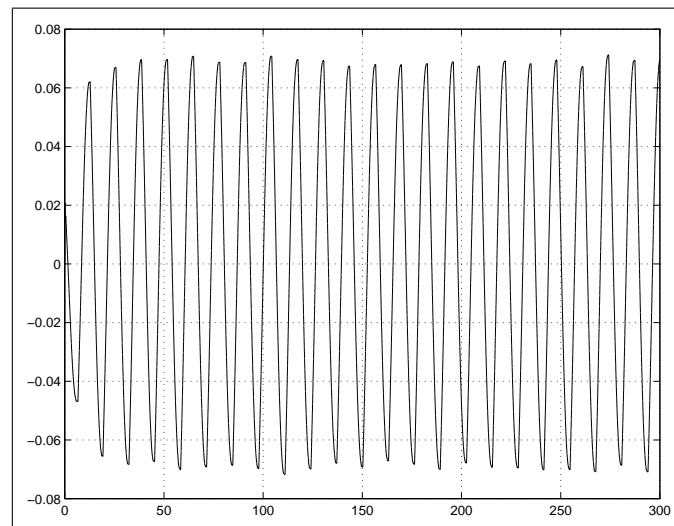


Figura 2.4: posizione del carrello (cm) per 300 s di simulazione

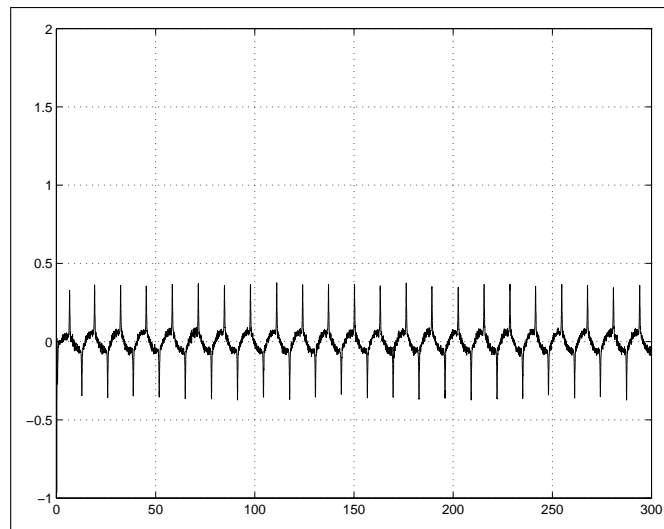


Figura 2.5: angolo (gradi) per 300 s di simulazione,  $\theta(0) = 1.7$  gradi

Come si vede le specifiche sull'angolo sono rispettate ed il carrello ha oscillazioni più marcate; questo perchè in anello chiuso la presenza di uno zero a parte reale maggiore di zero nella funzione di trasferimento del carrello, fa sì che nonostante il regolatore cancelli il polo positivo, il denominatore in anello chiuso presenta ancora un polo positivo ma molto vicino allo zero. Provando ad aggiungere un PID lasciando il guadagno come parametro libero si incappa nel problema di avere cinque condizioni da rispettare con quattro parametri. Si riesce a soddisfare solo la condizione necessaria<sup>5</sup>.

---

<sup>5</sup>sempre confrontando il denominatore con un polinomio di grado quinto e uguagliando i coefficienti

## Capitolo 3

# Il modello in laboratorio

Il modello linearizzato rappresentato dal blocco *state space* è sostituito dall'esperimento vero e proprio. Le variabili  $x$  e  $\theta$  vengono misurate dai sensori; attraverso una scheda di acquisizione dati i segnali entrano nel modello simulink che si interfaccia con gli ingressi della scheda con il blocco *analog input*; questi sono volt e vengono convertiti in radianti e metri moltiplicando per le sensibilità ricavate nei capitoli precedenti. Il modello è poi analogo a quello numerico; il comando calcolato dal controllo entra in un blocco *analog output* che attraverso la scheda manda il comando al motore elettrico del carrello. È necessario introdurre un blocco *time based* collegato ad un *terminator*. Il rumore è già presente nel segnale quindi sono presenti solo i filtri. Il resto è uguale a prima. Si riportano gli andamenti delle variabili:

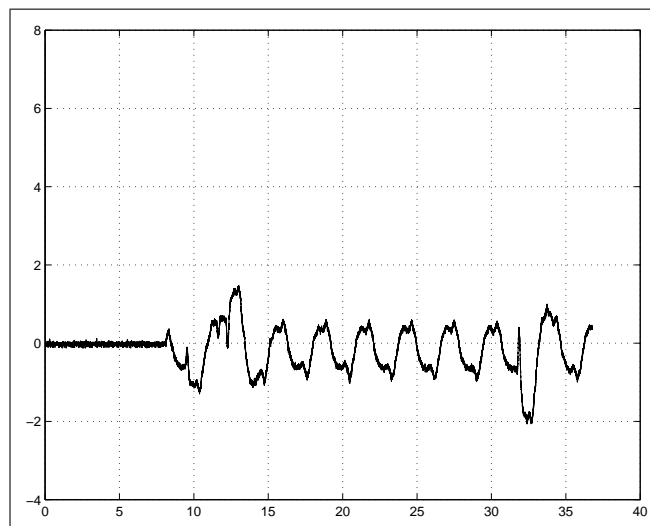


Figura 3.1: angolo (gradi), ottenuto in laboratorio

Le specifiche sono rispettate anche perturbando periodicamente l'asta. <sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>dando un colpo all'asta

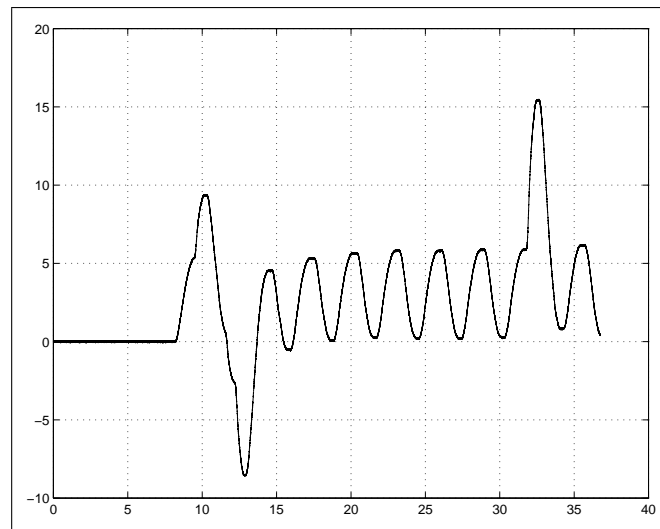


Figura 3.2: posizione del carrello (cm) ottenuta in laboratorio

## Capitolo 4

# Appendice

### 4.1 determinazione dell'attrito

Si valuta il coefficiente  $c$  dovuto all'attrito. È stato valutato per confronto e cioè: in laboratorio si è dato in ingresso al carrello un segnale a scalino di ampiezza 2 e si è registrata la posizione  $x$ . È poi stato fatto un modello numerico che simulasse l'esperimento in precedenza descritto. tale modello prevede che l'attrito sia proporzionale alla velocità del carrello ed è:

$$m_{tot} \ddot{x} + c \dot{x} = f_x \quad (4.1)$$

Sostituendo l'espressione trovata per la forza si ottiene:

$$m_{tot} \ddot{x} + (c - \alpha) \dot{x} = \beta V$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono i parametri del motore noti dal costruttore. si è variato il coefficiente  $c$  fino a che le risposte del sistema simulato ben rappresentassero il sistema reale di laboratorio. Scegliendo  $c$  pari a  $4.1 [N/(m/s)]$  si ottiene il risultato cercato.

### 4.2 Metodo di Newton

Si è utilizzata la funzione `qssnewtonxs`<sup>1</sup> per i sistemi non lineari di ordine  $N$ .

### 4.3 Funzioni matlab

Nel floppy sono contenute le due funzioni matlab utilizzate per il progetto:

- **datip.m** carica le costanti utilizzate<sup>2</sup>, crea le matrici del sistema linearizzato, crea il sistema dinamico e calcola gli autovalori; effettua il test di osservabilità e controllabilità e stampa a video gli autovalori ed un messaggio che indica se il sistema è osservabile e controllabile.

---

<sup>1</sup>funzione utilizzata nel corso di Calcolo Numerico

<sup>2</sup>dati fisici del costruttore

- **coefpid.m** dati i tre poli in anello chiuso per la funzione di trasferimento  $\theta(s)/f(s)$  calcola i coefficienti del regolatore PID.

Sono anche presenti i files dei modelli simulink.