Teoria dei sistemi di controllo

Luca Rancati

Sommario

Si vuole trattare la teoria dei sistemi di controllo, partendo dai risultati ricavati dalla trattazione della teoria del controllo ottimo. In più rispetto a prima si estende e si generalizza il controllo ottimo nel caso in cui si voglia mantenere lo stato del sistema a regime su un valore diverso da zero o fare in modo che egli insegua uno stato noto ma variabile nel tempo.

Controllo con riferimento costante diverso da zero

Abbiamo il sistema dinamico a tempo continuo, lineare e tempo invariante:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \implies \quad \underline{\text{sistema proprio}} \end{cases}$$

ed imponiamo una determinata uscita pari a $\bar{y} = C\,\bar{x}$; definiamo le tre nuove variabili che descrivono lo scostamento rispetto allo stato di equilibrio:

$$\begin{cases} \acute{u} = u - \bar{u} \\ \acute{x} = x - \bar{x} \\ \acute{y} = y - \bar{y} \end{cases}$$

sostituiamo nel modello di partenza ed otteniamo:

$$\begin{cases} \dot{\acute{x}} = A\,\acute{x} + B\,\acute{u} + A\,\bar{x} + B\,\bar{u} \\ \acute{y} = C\,\acute{x} \end{cases}$$

ma $A\,\bar{x} + B\,\bar{u} = \dot{\bar{x}}$ che a regime è nullo e quindi mi resta la dinamica della variazione dello stato dalla condizione di equilibrio. Posso scrivere la legge di controllo come:

$$u = \acute{u} + \bar{u} = K\,\acute{x} + \bar{u}$$

quindi ho un controllo proporzionale allo stato esattamente come prima, sommato ad una parte costante. Le ,matrici del sistema sono identiche a prima, i transitori sono uguali; tutto quello visto per il controllo ottimo va bene; manca da determinare la $\bar{u}$. Riscrivo il sistema:

$$\dot{x} = (A + B\,K)\,x + B\,\bar{u}$$

che descrive la dinamica del sistema controllato con una retroazione proporzionale allo stato ed una costante. La parte proporzionale allo stato stabilizza il sistema e a regime ho che $x \rightarrow \bar{x}$. per trovare la $\bar{u}$ impongo:

$$\boxed{\dot{x} = 0} \;\; \boxed{x = \bar{x}} \;\Rightarrow\; (A + B\,K)\,\bar{x} + B\,\bar{u} = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\bar{x} = -(A + B\,K)^{-1}\,B\,\bar{u}}$$

e quindi:

$$\bar{y} = C\,\bar{x} = -C\,(A + B\,K)^{-1}\,B\,\bar{u} \Longrightarrow \boxed{\bar{y} = G\,\bar{u}} \;\Rightarrow\quad \text{ricavo } \bar{u}$$

Trovo così la $\bar{u}$ imponendo una uscita prefissata e nota, invertendo la matrice G; questo è possibile solo se il problema è quadrato, altrimenti è necessario eseguire la pseudoinversa della matrice G.

Controllo con riferimento variabile nel tempo

Costruisco un modello in cui inserisco la dinamica del sistema da controllare, la dinamica dello stato di riferimento[1],e la dinamica del disturbo in questo modo:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u + F\,x_D \\ \dot{x_R} = A_R\,x_R \\ \dot{x_D} = A_D\,x_D \end{cases} \tag{1}$$

In forma matriciale il tutto diventa:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_R} \\ \dot{x_D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & F \\ 0 & A_R & 0 \\ 0 & 0 & A_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_R \\ x_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \{u\}$$

Per semplicità consideriamo $\dot{x_0} = \{\,\dot{x_R}, \dot{x_D}\}^T$ e consideriamo i blocchi; otteniamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u + E_0\,x_0 \\ \dot{x_0} = A_0\,x_0 \end{cases}$$

[1]che descrive con quale legge voglio fare evolvere lo stato del sistema; non è necessario che questo sia un modello fisico, può essere un modello puramente numerico

Scriviamo la dinamica dell'errore $e = x - x_R$:

$$\dot{e} = A\,e + B\,u + E_0\,x_0 + (A - A_R)\,x_R$$

e considerando $E = [(A - A_R), F]$ otteniamo:

$$\dot{e} = A\,e + B\,u + E\,x_0$$

Ora possiamo scrivere una legge di controllo generica che sia proporzionale all'errore e allo stato x_0 del tipo:

$$u = K\,e + B\,u + G\,x_0$$

in modo da ottenere in anello chiuso il seguente sistema:

$$\dot{e} = (A + B\,K)\,e + (E + B\,G)\,x_0$$

Per calcolare K vanno bene i metodi visti in precedenza[2] mentre per il calcolo della G ho diversi criteri:

Errore nullo a regime

Sicuramente a regime avremo che la derivata temporale dell'errore sarà nulla per cui il sistema che descrive la dinamica dell'errore diventa:

$$\dot{e} = (A{+}B\,K)\,e{+}(E{+}B\,G)\,x_0 \;\Rightarrow\; (A{+}B\,K)\,e{+}(E{+}B\,G)\,x_0 = 0 \;\Rightarrow\; e = -(A{+}B\,K)^{-1}\,(E{+}B\,G)\,x$$

Se imponiamo che l'errore sia nullo otteniamo:

$$\boxed{e = 0} \;\Rightarrow\; e = -(A{+}B\,K)^{-1}\,(E{+}B\,G)\,x_0 \;\Rightarrow\; -(A{+}B\,K)^{-1}\,(E{+}B\,G) = 0\ (\forall\,x_0)$$

e dalla relazione precedente si ricava la matrice G; se il problema non è quadrato si esegla pseudoinversa.

Combinazione lineare degli errori nulla a regime

Significa moltiplicare l'errore per una matrice C ottenendo:

$$C\,e = -C\,(A + B\,K)^{-1}\,(E + B\,G)\,x_0$$

Se la matrice C ha numero di righe pari al numero di ingressi quadriamo il problema; per errore nullo si ottiene:

$$-C\,(A{+}B\,K)^{-1}\,(E{+}B\,G)\,x_0 = 0\ (\forall\,x_0) \;\Longrightarrow\; \boxed{G = -[C\,(A + B\,K)^{-1}\,B]^{-1}\,C\,(A + B\,K)^{-1}\,E}$$

[2] come se lavorassi solo con l'errore e

Luca Rancati
luca.rancati@aliceposta.it

Si ottiene une matrice $G = [G_R, G_D]$ con due blocchi; uno per la dinamica del riferimento e l'altro per la dinamica del disturbo. Possiamo scrivere una legge di controllo in generale:

$$u = K\,x + (K + G_R)\,x_R + G_D\,x_D \implies u = K\,x + K_R\,x_R + G_D\,x_D$$

Come detto in precedenza è possibile considerare non la dinamica dell'errore ma una combinazione lineare comprendente solo gli stati che vogliamo contribuiscano all'errore, e cioè:

$$e = C\,(x - x_R) \implies e = C_e\,x - C_R\,x_R$$

in cui C_e indica quali sono gli stati del sistema a cui si vuole associare un riferimento e C_R è la matrice della trasformazione dell'uscita del sistema di riferimento che è noto. Per quanto riguarda x_D potremmo misurarlo ma non sempre è possibile; se si scrive il sistema dinamico aumentato con gli stati x_D si deve costruire un osservatore che ricostruisca anche x_D:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & F \\ 0 & A_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \{u\}$$

questo sistema deve essere osservabile. L'azione di controllo su x_R e x_D detta azione di *feed forward* va a sostituire praticamente l'azione integrale per il controllo dell'errore; in questo caso abbiamo un controllo solo proporzionale allo stato e questo permette di seguire bene anche riferimenti velocemente variabili nel tempo; con l'azione integrale si potrebbero avere dei problemi. Tornando alla relazione sulla combinazione lineare degli errori

$$e = C_e\,x - C_R\,x_R$$

possiamo valutare l'errore sulle uscite pensando che esse siano effettivamente degli stati selezionati dalle matrici C e C_R; il sistema è:

$$\begin{cases} \dot{x} = A\,x + B\,u \\ y = C\,x \\ \dot{x_R} = A_R\,x_R \\ y_R = C_R\,x_R \\ e = y - y_R \end{cases}$$

Quindi abbiamo:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x_R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ x_R \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \{u\}$$

che è un sistema dinamico del tipo:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{A}\,\bar{x} + \bar{B}\,u \\ \bar{y} = e = [C \quad -C_R]\,\bar{x} \end{cases}$$

È possibile tornare al problema di minimizzazione della funzione J costruita nel seguente modo:

$$J = \int_0^{\infty} (\bar{y}^T\,Q\,\bar{y} + \bar{u}^T\,R\,\bar{u})\,dt \tag{2}$$

che è il problema visto per il controllo ottimo con uscite ed ingressi; arrivando all'equazione di Riccati modificata per il fatto che in questo problema le matrici sono differenti dal caso discusso in generale si ottiene:

$$K = R^{-1}\,\bar{B}^T\,P = R^{-1}\,[B^T \quad 0] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

e quindi un controllo in cui non compaiono mai i termini p_{21} e p_{22} per la presenza dello zero nella matrice $\bar{B}$.

$$u = R^{-1}\,B^T\,[p_{11} \quad p_{12}]\,\bar{x}$$

quindi ho trovato:

$$K = R^{-1}\,B^T\,p_{11}$$

e

$$K_R = R^{-1}\,B^T\,p_{12}$$

in questo modo abbiamo disaccoppiato il problema; infatti la matrice K si trova dopo aver risolto l'equazione di Riccati per p_{11} e questo è esattamente uguale a quello che otterremmo se risolvessimo il problema di ottimo per la sola x senza il riferimento; nota p_{11} e K si risolve l'equazione di Riccati per p_{12} e si trova K_R. Nota la matrice K è possibile utilizzarla per il calcolo della matrice G che risolveva anche il controllo in presenza di disturbi

Luca Rancati
luca.rancati@aliceposta.it