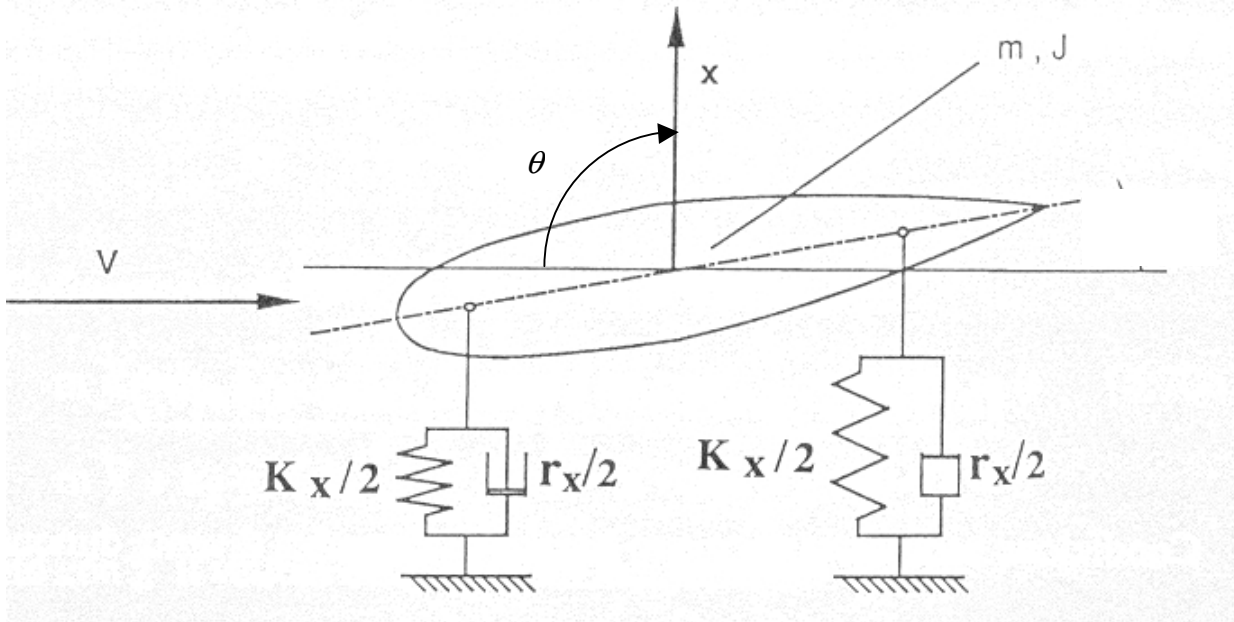


Il flutter di un profilo alare

Qualora un profilo alare si comporti come un sistema a due gradi di libertà, ovvero oltre a traslare in direzione ortogonale alla vena possa anche variare l'incidenza rispetto a questa, potremo ricondurci questo modello matematico



le cui equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$m\ddot{x} + r_x\dot{x} + k_x x = L \cos \psi + D \sin \psi$$

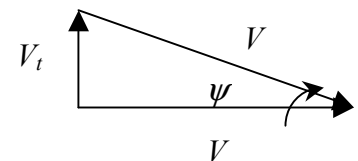
$$J\ddot{\theta} + r_x l^2 \dot{\theta} + k_x l^2 \theta = M$$

dove ψ è l'angolo tra la velocità relativa V_r della vena e la direzione della corrente indisturbata V , supposta costante.

Si noti che nel puro moto rotatorio, ogni punto della superficie del profilo possiede una velocità di trascinato diversa, quindi la velocità relativa V_r varia da punto a punto del profilo. Non sarebbe quindi lecito utilizzare la teoria quasi-statica se non fosse possibile dimostrare che riferendosi alla velocità di trascinato di un punto P_1 del profilo alare, in genere vicino al bordo d'attacco, posto a una certa distanza b_1 dall'asse di rotazione, è possibile utilizzare ancora la teoria quasi-statica. Di fatto immaginiamo che dal punto di vista delle azioni aerodinamiche il profilo trasli con la velocità di P_1 .

Varrà quindi che

$$V_t = \dot{x} + b_1 \dot{\theta}; V_r = \sqrt{V^2 + (\dot{x} + b_1 \dot{\theta})^2}; \psi = -\tan^{-1} \left(\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V} \right)$$



$$\sin \psi = -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V_r} \approx -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V}; \cos \psi = \frac{V}{V_r} \approx 1$$



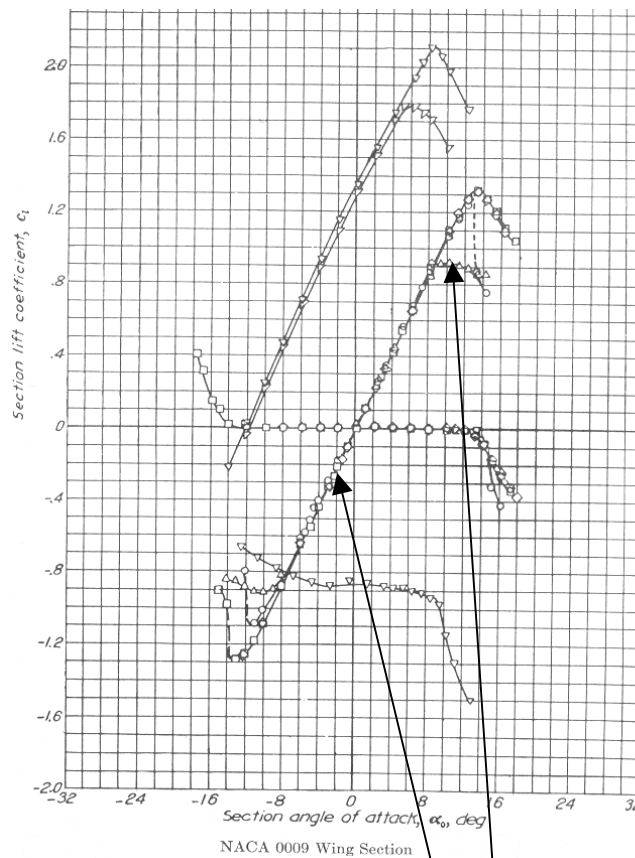
Istantaneamente, quindi, l'angolo d'incidenza sarà dato da

$$\alpha = \psi + \theta \approx -\frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V} + \theta$$

per cui il sistema di equazioni differenziali diventa

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_x l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_x l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \rho S V_r^2 \begin{Bmatrix} C_L(\alpha) \cos \psi + C_D(\alpha) \sin \psi \\ C M(\alpha) \end{Bmatrix}$$

ma linearizzando intorno alla posizione di equilibrio, che per un profilo simmetrico è $\alpha = \alpha_0 = 0$,
abbiamo che



$$\frac{1}{2} \rho S V_r^2 (C_L(\alpha) \cos \psi + C_D(\alpha) \sin \psi) = \frac{1}{2} \rho S V^2 \left[C_L(0) + \frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} (\alpha) - C_D(0) \frac{\dot{x} + b_1 \dot{\theta}}{V} \right]$$

$$\frac{1}{2} \rho S V_r^2 C M(\alpha) = \frac{1}{2} \rho S V^2 C \left[C_M(0) + \frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} (\alpha) \right]$$





Sostituendo ad α la sua espressione e riordinando, abbiamo che il campo di forze linearizzato è equivalente a

$$-\frac{1}{2}\rho SV^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{V} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) & \frac{b_1}{V} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) \\ \frac{C}{V} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) & \frac{Cb_1}{V} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{Bmatrix} - \frac{1}{2}\rho SV^2 \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \\ 0 & -C \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}$$

per cui

$$[R_T] = \begin{bmatrix} r_x + \frac{\rho SV}{2} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) & \frac{\rho SV b_1}{2} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) \\ \frac{\rho SVC}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) & r_x l^2 + \frac{\rho SV C b_1}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix}$$

$$[K_T] = \begin{bmatrix} k_x & -\frac{\rho SV^2}{2} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \\ 0 & k_x l^2 - \frac{\rho SV^2 C}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) \end{bmatrix}$$

Potremmo, quindi, avere instabilità dinamica a un grado flessionale se il termine

$$r_x + \frac{\rho SV}{2} \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} + C_D(0) \right) < 0, \text{ mentre il profilo sarebbe instabile torsionalmente se}$$

$$r_x l^2 + \frac{\rho SV C b_1}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right) < 0.$$

Come è ben noto, per i profili alari normalmente usati si ha $\frac{dC_L}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} > 0$ e

$\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} > 0$, per cui tali possibilità non sussistono, ma il fenomeno potrebbe

avvenire per profili con elevata sezione frontale (a.es. travi a semplice o doppio T ecc.).

Tuttavia, analizzando la matrice $[K_T]$, il termine $k_{T22} = k_x l^2 - \frac{\rho SV^2 C}{2} \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} \right)$

della matrice di rigidezza modifica la frequenza propria torsionale del profilo alare riducendola al crescere della velocità, mentre quella flessionale, dipendente da k_{T11} , rimane costante. Per cui se, come accade nella realtà, la frequenza propria torsionale in assenza di vento è più alta di quella flessionale, vi sarà sempre una velocità V per cui le due frequenze diverranno coincidenti, dando luogo al fenomeno del flutter.

