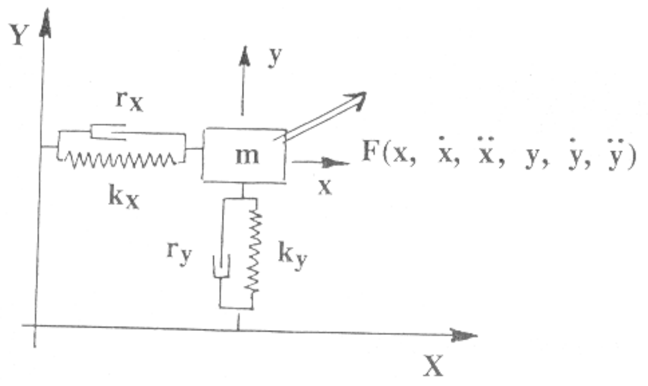
Sistemi vibranti a 2 gdl perturbati nell'intorno della posizione di equilibrio



Estendiamo ai sistemi a 2 gdl quanto già visto per i sistemi a un solo grado di libertà.

Le equazioni di equilibrio dinamico per il sistema di figura sono, ovviamente

$$m\ddot{x} + r_x\dot{x} + k_x x = F_x\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}\right)$$
$$m\ddot{y} + r_y\dot{y} + k_y y = F_y\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}\right)$$

dove i termini dovuti al campo di forze sono funzioni non lineari di x e y e delle loro derivate rispetto al tempo.

Il sistema di equazioni può essere riscritto in forma matriciale come

$$[M]\{\ddot{z}\} + [R]\{\dot{z}\} + [K]\{z\} = \left\{F\left(\{z\},\{\dot{z}\},\{\ddot{z}\}\right)\right\}$$

con

$$\{z\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}, \left\{F\left(\{z\},\{\dot{z}\},\{\ddot{z}\}\right)\right\} = \begin{Bmatrix} F_x\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}\right) \\ F_y\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{x}, \ddot{y}\right) \end{Bmatrix} \text{ e}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}, [R] = \begin{bmatrix} r_x & 0 \\ 0 & r_y \end{bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

Del sistema potremo calcolare la posizione di equilibrio statico, se esiste, definita da

$$[K]\{z_0\} = \left\{F\left(\{z_0\},\{0\},\{0\}\right)\right\}$$

e quindi linearizzare il campo di forze

$$\left\{F\left(\{z\},\{\dot{z}\},\{\ddot{z}\}\right)\right\} \simeq \left\{F\left(\{z_0\},\{0\},\{0\}\right)\right\} +$$
$$+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{z\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\left(\{z\}-\{z_0\}\right)+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\dot{z}\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\{\dot{z}\}+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\ddot{z}\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\{\ddot{z}\}$$

$$\left\{F\left(\{z\},\{\dot{z}\},\{\ddot{z}\}\right)\right\} \simeq \left\{F\left(\{z_0\},\{0\},\{0\}\right)\right\} +$$
$$+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{z\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\left(\{z\}-\{z_0\}\right)+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\dot{z}\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\{\dot{z}\}+\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\ddot{z}\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}\{\ddot{z}\}$$

ma

$$\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{z\}}\right]_{(z_0,0,0)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y}\\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y}\end{bmatrix}_{(z_0,0,0)};\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\dot{z}\}}\right]_{(z_0,0,0)}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\\ \frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\end{bmatrix}_{(z_0,0,0)}$$

e

$$\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{\ddot{z}\}}\right]_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}=\begin{bmatrix}\frac{\partial F_x}{\partial \ddot{x}} & \frac{\partial F_x}{\partial \ddot{y}}\\ \frac{\partial F_y}{\partial \ddot{x}} & \frac{\partial F_y}{\partial \ddot{y}}\end{bmatrix}_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}$$

Indicando con il vettore $\{\overline{z}\}$ gli spostamenti a partire dalla posizione di equilibrio statico

$$\{z\}=\{z_0\}+\{\overline{z}\}$$

il sistema di equazioni differenziali di partenza può essere riscritto come

$$\left[[M]+[M_F]\right]\{\ddot{\overline{z}}\}+\left[[R]+[R_F]\right]\{\dot{\overline{z}}\}+\left[[K]+[K_F]\right]\{\overline{z}\}=\{0\}$$

ovvero

$$[M_T]\{\ddot{\overline{z}}\}+[R_T]\{\dot{\overline{z}}\}+[K_T]\{\overline{z}\}=\{0\}$$

con, ovviamente,

$$[M_F] = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_x}{\partial \ddot{x}} & \dfrac{\partial F_x}{\partial \ddot{y}} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial \ddot{x}} & \dfrac{\partial F_y}{\partial \ddot{y}} \end{bmatrix}_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})} ;[R_F] = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_x}{\partial \dot{x}} & \dfrac{\partial F_x}{\partial \dot{y}} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial \dot{x}} & \dfrac{\partial F_y}{\partial \dot{y}} \end{bmatrix}_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})} ;[K_F] = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_x}{\partial x} & \dfrac{\partial F_x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial F_y}{\partial x} & \dfrac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}$$

$$[M_T]\{\ddot{\bar{z}}\}+[R_T]\{\dot{\bar{z}}\}+[K_T]\{\bar{z}\}=\{0\}$$

sistema di equazioni differenziali lineari omogenee a coefficienti costanti la cui soluzione è del tipo

$$\{\bar{z}(t)\}=\{\bar{Z}\}e^{\lambda t}$$

dove le λ sono le radici di

$$\left[[M_T]\lambda^2+[R_T]\lambda+[K_T]\right]\{\bar{Z}\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

Analizziamo separatamente i vari casi che potrebbero presentarsi

Campo di forze puramente posizionale

In questo caso il sistema si riduce a

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\}+[R]\{\dot{\bar{z}}\}+[K_T]\{\bar{z}\}=\{0\}$$

ovvero, trascurando lo smorzamento

$$[M]\{\ddot{\bar{z}}\}+[K_T]\{\bar{z}\}=\{0\}$$

da cui

$$\left[[M]\lambda^2+[K_T]\right]\{\bar{Z}\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

Essendo la matrice $[M]$ reale, simmetrica e definita positiva, tutti i suoi minori principali dominanti sono positivi, ovvero

$$p_0=1; p_1=m_{11}>0; p_2=m_{11}m_{22}-m_{12}m_{21}>0$$

e analogamente ciò vale per la matrice $[K]$

$$p_0=1; p_1=k_{11}>0; p_2=k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21}>0$$

Per quanto riguarda la matrice $\left[K_F\right]=-\begin{bmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial x} & \frac{\partial F_x}{\partial y} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} & \frac{\partial F_y}{\partial y} \end{bmatrix}_{(\{z_0\},\{0\},\{0\})}$ possono presentarsi due casi:

- il campo di forze è conservativo, per cui $\frac{\partial F_x}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $\left[K_F\right]$ risulta simmetrica;
- il campo di forze non è conservativo, per cui $\frac{\partial F_x}{\partial y}\neq\frac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $\left[K_F\right]$ non risulta simmetrica;

In entrambi i casi, tuttavia, i valori di λ sono comunque le radici del polinomio

$$m_{11}m_{22}\lambda^4+\left(m_{11}k_{T22}+m_{22}k_{T11}\right)\lambda^2+(k_{T11}k_{T22}-k_{T12}k_{T21})=0$$
$$a\lambda^4+b\lambda^2+c=0;a>0$$

Campo di forze conservativo

Si possono presentare due casi:

- la matrice $\left[K_T\right]$ è definita positiva ovvero

$$p_0=1;p_1=k_{T11}>0;p_2=k_{T11}k_{T22}-k_{T12}k_{T21}>0;b>0;c>0$$

$$\lambda_{1,2}^2=\frac{1}{2m_{11}m_{22}}\left[-(m_{11}k_{T22}+m_{22}k_{T11})\pm\sqrt{(m_{11}k_{T22}+m_{22}k_{T11})^2-4m_{11}m_{22}\left(k_{T11}k_{T22}-k_{T21}k_{T12}\right)}\right]<0$$

essendo

$$b>\sqrt{b^2-4ac}$$

per cui i quattro autovalori sono tutti immaginari e il moto libero risultante è asintoticamente stabile, ovvero si annulla per effetto dell'inevitabile smorzamento.

- la matrice $\left[K_T\right]$ non è definita positiva ovvero o $p_1 = k_{T11} < 0$ oppure $p_2 = k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21} < 0$, ovvero entrambe le condizioni sono verificate. Nell'ipotesi che $p_2 = k_{T11}k_{T22} - k_{T12}k_{T21} = c < 0$ avremo che

$$b^2 - 4ac > b^2 > 0$$

e quindi

$$\lambda_1^2 > 0; \lambda_2^2 < 0$$

La prima radice porta a due valori opposti reali che danno luogo per la soluzione positiva a un fenomeno di instabilità statica (divergenza) essendo la soluzione del tipo

$$\left\{\overline{z}(t)\right\} = \left\{\overline{Z}\right\} e^{\lambda t}$$

Campo di forze non conservativo

Accade che $\dfrac{\partial F_x}{\partial y} \neq \dfrac{\partial F_y}{\partial x}$ e la matrice $\left[K_F\right]$non risulta simmetrica.

Ricordando

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2m_{11}m_{22}}\left[-(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11}) \pm \sqrt{(m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 - 4m_{11}m_{22}\left(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}\right)}\right]$$

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{\Delta}\right]$$

se risulta che

$$4m_{11}m_{22}\left(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}\right) > (m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 \Rightarrow \Delta < 0$$

avremo che

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a}\left[-b \pm i\sqrt{|\Delta|}\right] = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}e^{\mp i \tan^{-1}(\Delta/b)} = \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}e^{\mp i\alpha}$$

e quindi

$$\lambda_{I,II} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}e^{i\alpha/2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}}\left(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2\right) = \pm\left(\psi_1 + i\psi_2\right)$$

$$\lambda_{III,IV} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}e^{-i\alpha/2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2 + \Delta}}\left(\cos\alpha/2 - i\sin\alpha/2\right) = \pm\left(\psi_1 - i\psi_2\right)$$

$$\lambda_{I,II} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2+\Delta}\,e^{i\alpha/2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2+\Delta}}\left(\cos\alpha/2 + i\sin\alpha/2\right) = \pm\left(\psi_1 + i\psi_2\right)$$

$$\lambda_{III,IV} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2+\Delta}\,e^{-i\alpha/2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{2a}\sqrt{b^2+\Delta}}\left(\cos\alpha/2 - i\sin\alpha/2\right) = \pm\left(\psi_1 - i\psi_2\right)$$

Ricordando la soluzione generale

$$\left\{\overline{z}(t)\right\} = \left\{\overline{Z}\right\} e^{\lambda t}$$

sappiamo che, come più volte dimostrato, ciascuna coppia di radici coniugate fornisce una sola soluzione puramente reale delle quali quella con parte reale positiva è esponenzalmente espansiva (asintoticamente instabile), mentre l'altra è esponenzialmente decrescente (asintoticamente stabile).
Ovvero il moto libero risultante è ellittico e instabile con pulsazione ψ_2. Il fenomeno prende il nome di flutter.

Se invece

$$4m_{11}m_{22}\left(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}\right) < (m_{11}k_{T22} + m_{22}k_{T11})^2 \Rightarrow \Delta > 0$$

con

$$\left(k_{T11}k_{T22} - k_{T21}k_{T12}\right) < 0$$

avremo anche che

$$b < \sqrt{\Delta}$$

e quindi, essendo

$$\lambda_{1,2}^2 = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{\Delta}\right]$$

avremo due soluzione reali opposte e due immaginarie coniugate, con quella positiva reale che porta alla divergenza.
Gli altri casi, portano a soluzioni armoniche stabili, differenti solo nei valori delle frequenze proprie da quello già trattato nel caso di campo di forze conservativo.

Banale è poi il caso in cui la matrice $\left[R_T\right]$sia definita non positiva. Il sistema sarà soggetto a fenomeni di instabilità dinamica, con ampiezze crescenti esponenzialmente nel tempo.