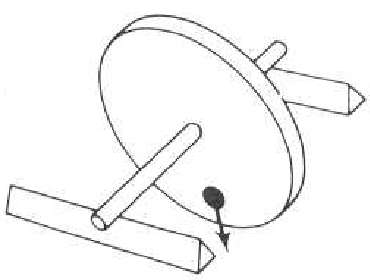
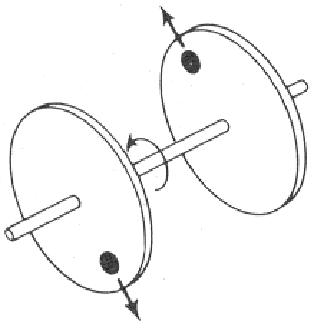
VELOCITA' CRITICHE FLESSIONALI

Bilanciamento dei rotori

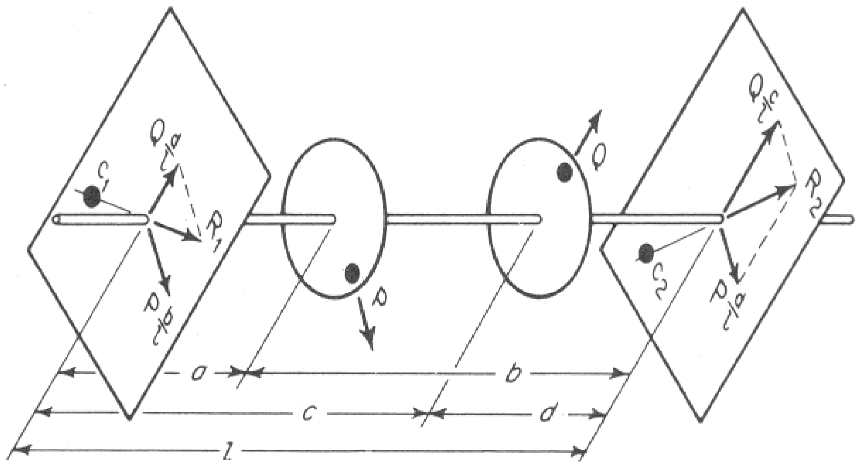


Lo sbilanciamento di un disco può essere determinato facendolo rotolare attorno al suo asse su due coltelli. Il disco ruoterà e si fermerà con la parte pesante più in basso. Questo tipo di sbilanciamento è detto *sbilanciamento statico*, dato che può essere rilevato con metodi statici.

Generalmente la massa del rotore è distribuita lungo l'albero come, a esempio, in un rotore di un motore elettrico o nell'albero a gomito di un motore automobilistico. Una prova simile a quella precedente potrebbe indicare che tali alberi sono staticamente bilanciati, ma il sistema potrebbe presentare uno sbilanciamento considerevole quando ruota.



Per esempio se le due masse non bilanciate sono uguali e disposte a 180 gradi l'una dall'altra, il sistema sarà staticamente bilanciato attorno all'asse. Tuttavia quando il sistema ruota, ciascun disco non bilanciato darà luogo a una forza centrifuga rotante che tende a scuotere l'albero sui cuscinetti. Dal momento che tale tipo di sbilanciamento si manifesta solo in rotazione, è detto *sbilanciamento dinamico*. N.B. dalla Meccanica Razionale sappiamo che un albero è bilanciato se l'asse è asse centrale d'inerzia del sistema.



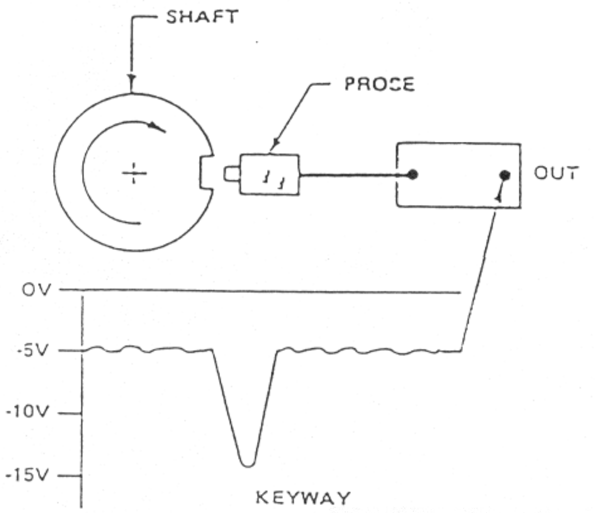
La figura mostra un caso generico in cui il sistema è sia staticamente che dinamicamente sbilanciato. Vedremo ora che le forze sbilancianti P e Q possono essere eliminate aggiungendo due masse correttive in due piani qualsivoglia perpendicolari all'asse di rotazione.

Consideriamo prima la forza sbilanciante P, che può essere sostituita da due forze parallele $\frac{Pa}{l}$ e $\frac{Pb}{l}$. Similmente Q può essere sostituita dalle forze parallele $\frac{Qc}{l}$ e $\frac{Qd}{l}$. Le due forze in ogni piano possono allora essere combinate tra loro in una singola forza risultante facilmente bilanciabile da una singola massa correttiva come indicato. Le due masse correttive C_1 e C_2, introdotte nei due piani di equilibramento scelti, bilanciano completamente P e Q così che il sistema risulta staticamente e dinamicamente bilanciato.

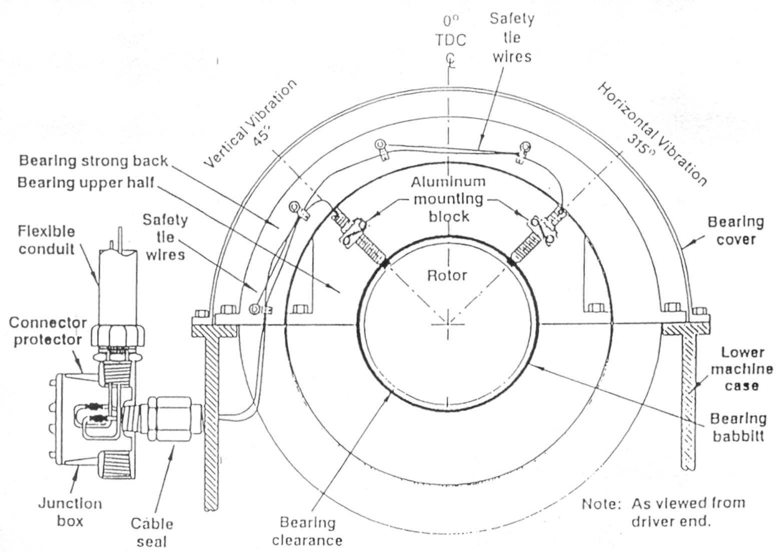
Un sistema dinamicamente bilanciato è pure staticamente bilanciato, il contrario invece non è sempre vero.

Il valore e la posizione dello sbilanciamento in una macchina rotante sono generalmente incogniti e le opportune masse di bilanciamento devono essere calcolate sperimentalmente.

Se, a esempio, pratichiamo una tacca sul rotore e sulla parte statorica montiamo un trasduttore a correnti parassite, il cui segnale in uscita è proporzionale al traferro tra la sonda e la superficie metallica del rotore, avremo così un segnale temporale tipo quello di figura che con opportuni operatori analogici può essere elettricamente invertito (ovvero moltiplicato per –1), eventualmente squadrato e al quale si può sottrarre –5V.

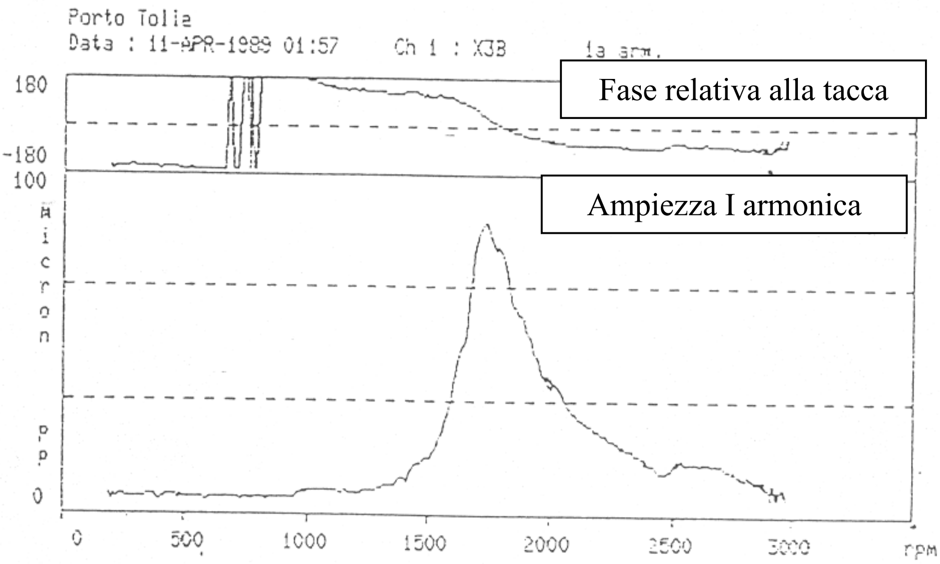


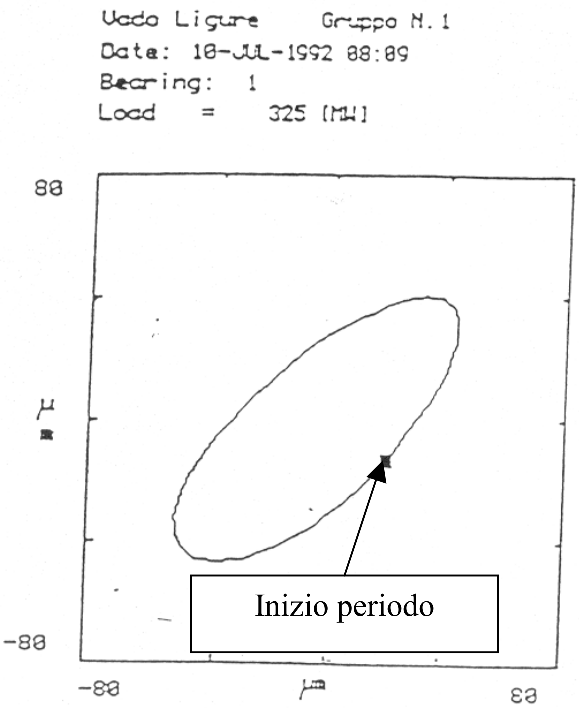
I supporti possono, poi, essere opportunamente strumentati con due trasduttori di spostamento relativo o assoluto, posti tra loro a 90°.
Campionando i segnali provenienti sia dal key-phasor sia dai due trasduttori di spostamento tra due picchi del segnale temporale del key-phasor avremo quindi l'andamento temporale delle vibrazioni in un periodo a una certa velocità angolare dell'albero.



Se ne possono dare due rappresentazioni grafiche:

- una con Bode, ove si rappresenta l'andamento di una componente armonica del segnale di un traduttore in funzione della velocità di rotazione



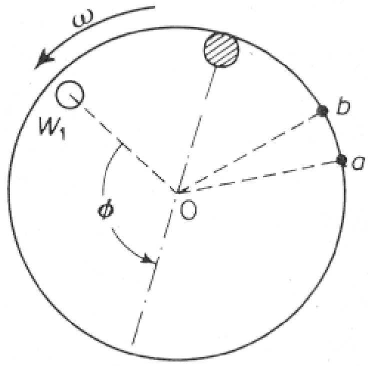


- l'altra con un diagramma alla Nyquist dell'andamento temporale delle vibrazioni rilevate dai due trasduttori in un periodo a una certa velocità angolare.

Sappiamo quindi come misurare l'ampiezza di vibrazione e la sua fase rispetto al riferimento posto sull'albero.

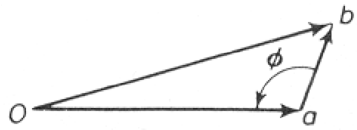
Dischi

Un disco sottile può essere bilanciato dinamicamente come segue: si fa ruotare il disco, montato a sbalzo sulla macchina equilibratrice, ad una velocità tale che ne risulti una vibrazione di ampiezza misurabile da uno dei trasduttori di spostamento.



Dallo spettro della risposta potremo conoscere la componente sincrona

$$|a|e^{i\phi_1} = h_{11}(\omega) M\varepsilon e^{i\psi_1}\omega^2$$



dove sono incognite tanto la funzione di trasferimento $h_{11}(\omega) = h_{11}$ quanto sia il momento statico della massa sbilanciante $M\varepsilon$, sia la giacitura sul disco ψ_1, relativa al riferimento, della massa

Per via dello smorzamento, la fase del vettore vibrazione non coinciderà con la posizione incognita dello sbilanciamento.

Si pone, poi, un peso W_t di prova in una posizione nota ($\varepsilon_2 e^{i\psi_2}$) e con il disco che gira alla stessa velocità di prima si misura la nuova vibrazione indotta. Supponendo un comportamento lineare del sistema, avremo

$$|b|e^{i\phi_2} = h_{11}\omega^2\left(M\varepsilon e^{i\psi_1} + \frac{W_t}{g}\varepsilon_2 e^{i\psi_2}\right)$$

La nuova ampiezza rappresenta 1'effetto dello sbilanciamento iniziale più quello del peso aggiunto W_t. Se, come detto, il sistema si comporta linearmente, la differenza vettoriale permette di calcolare la funzione di trasferimento a quella frequenza

$$|b|e^{i\phi_2} - |a|e^{i\phi_1} = h_{11}\omega^2\left(M\varepsilon e^{i\psi_1} + \frac{W_t}{g}\varepsilon_2 e^{i\psi_2}\right) - h_{11}M\varepsilon e^{i\psi_1}\omega^2 = h_{11}\omega^2\frac{W_t}{g}\varepsilon_2 e^{i\psi_2}$$

da cui

$$h_{11}\omega^2 = \frac{|b|e^{i\phi_2} - |a|e^{i\phi_1}}{\frac{W_t}{g}\varepsilon_2}e^{-i\psi_2}$$

per cui

$$|a|e^{i\phi_1} = h_{11}\omega^2 = \frac{|b|e^{i\phi_2} - |a|e^{i\phi_1}}{\frac{W_t}{g}\varepsilon_2}e^{-i\psi_2}M\varepsilon e^{i\psi_1} \Rightarrow M\varepsilon e^{i\psi_1} = |a|e^{i(\phi_1+\psi_2)}\frac{\frac{W_t}{g}\varepsilon_2}{|b|e^{i\phi_2} - |a|e^{i\phi_1}}$$

$$M\varepsilon e^{i\psi_1} = |a| e^{i(\phi_1+\psi_2)} \frac{\frac{W_t}{g}\varepsilon_2}{|b|e^{i\phi_2} - |a|e^{i\phi_1}}$$

equazione complessa che equivale a due equazioni scalari e che permette di valutare tanto l'incognita $M\varepsilon$, quanto l'anomalia ψ_1. Una volta determinate le incognite ponendo una massa di momento statico pari a $M\varepsilon$ con un'anomalia pari a $\psi_1 + \pi$, otterremo l'annullamento della forzante.

Nel caso di cerchi di veicoli, si pone normalmente

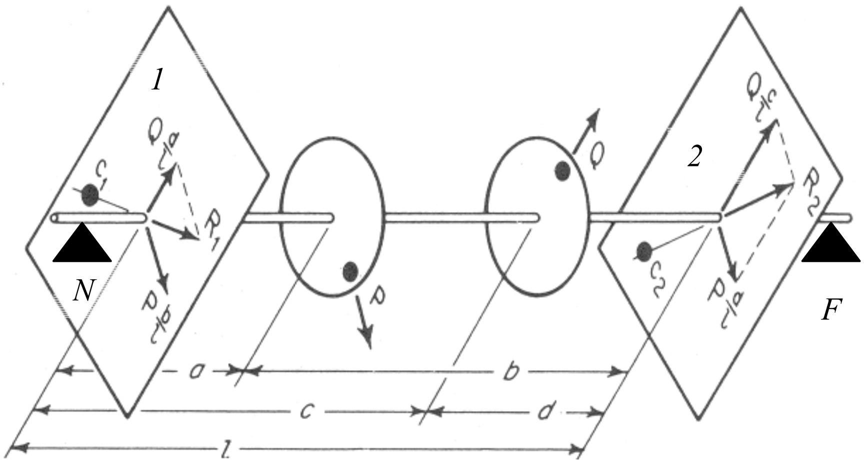
$$\varepsilon = \varepsilon_2 = raggio\ del\ labbro\ esterno\ del\ canale\ del\ cerchio$$

Rotori

Nel caso di rotori su due o più supporti il procedimento è un'estensione del metodo usato per il disco, ma in generale non è più possibile considerare la *receptance matrix* costante e indipendente dalla velocità angolare, per cui l'equilibramento varrà solo nell'intorno della velocità angolare alla quale viene effettuato.

Prescindendo da opportune macchine, chiamate macchine equilibratrici, che permettono il bilanciamento di un rotore attraverso la misura o delle vibrazioni sui supporti o delle reazioni su questi, analizziamo come si possa operare in campo strumentando, come visto, i supporti e dotando l'albero di un *key-phasor*.

Indichiamo i due supporti con le lettere *N* e *F*, mentre i due piani di equilibramento, definiti come *1* e *2* sono scelti in numero pari a quello dei supporti per avere un sistema deterministico e di locazione tale da poter essere facilmente raggiunti dagli operatori.



Facendo girare il rotore a una certa velocità angolare ω potremo rilevare le componenti sincrone delle vibrazioni lungo una medesima direzione nei supporti

$$X_N e^{i\psi_N} = h_{N1}(\omega) R_1 e^{i\rho_1} + h_{N2}(\omega) R_2 e^{i\rho_2}$$

$$X_F e^{i\psi_F} = h_{F1}(\omega) R_1 e^{i\rho_1} + h_{F2}(\omega) R_2 e^{i\rho_2}$$

Ponendo una massa di prova in una posizione angolare nota e a una nota distanza dall'asse di rotazione sul piano *1* e rilanciando il rotore alla medesima velocità di prima misureremo le seguenti vibrazioni

$$X_N^1 e^{i\psi_N^1} = h_{N1}(\omega)\left(R_1 e^{i\rho_1} + M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2\right) + h_{N2}(\omega) R_2 e^{i\rho_2}$$

$$X_F^1 e^{i\psi_F^1} = h_{F1}(\omega)\left(R_1 e^{i\rho_1} + M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2\right) + h_{F2}(\omega) R_2 e^{i\rho_2}$$

da cui

$$X_N^1 e^{i\psi_N^1} - X_N e^{i\psi_N} = h_{N1}(\omega) M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2 \Rightarrow h_{N1}(\omega) = \frac{X_N^1 e^{i\psi_N^1} - X_N e^{i\psi_N}}{M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2}$$

$$X_F^1 e^{i\psi_F^1} - X_F e^{i\psi_F} = h_{F1}(\omega) M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2 \Rightarrow h_{F1}(\omega) = \frac{X_F^1 e^{i\psi_F^1} - X_F e^{i\psi_F}}{M_1 e^{i\mu_1}\varepsilon_1\omega^2}$$

Togliamo ora la massa di prova dal piano *1* applicando una massa nota sul piano *2* e ripetiamo la misura precedente.

$$X_N^2 e^{i\psi_N^2} = h_{N1}(\omega)\left(R_1 e^{i\rho_1}\right) + h_{N2}(\omega)\left(R_2 e^{i\rho_2} + M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2\right)$$

$$X_F^2 e^{i\psi_F^2} = h_{F1}(\omega)\left(R_1 e^{i\rho_1}\right) + h_{F2}(\omega)\left(R_2 e^{i\rho_2} + M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2\right)$$

da cui

$$X_N^2 e^{i\psi_N^2} - X_N e^{i\psi_N} = h_{N2}(\omega) M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2 \Rightarrow h_{N2}(\omega) = \frac{X_N^2 e^{i\psi_N^2} - X_N e^{i\psi_N}}{M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2}$$

$$X_F^2 e^{i\psi_F^2} - X_F e^{i\psi_F} = h_{F2}(\omega) M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2 \Rightarrow h_{F2}(\omega) = \frac{X_F^2 e^{i\psi_F^2} - X_F e^{i\psi_F}}{M_2 e^{i\mu_2}\varepsilon_2\omega^2}$$

Possiamo quindi risolvere il sistema di due equazioni complesse

$$X_N e^{i\psi_N} + h_{N1}(\omega) M_1^*\varepsilon_1^* e^{i\mu_1^*}\omega^2 + h_{N2}(\omega) M_2^*\varepsilon_2^* e^{i\mu_2^*}\omega^2 = 0$$

$$X_F e^{i\psi_F} + h_{F1}(\omega) M_1^*\varepsilon_1^* e^{i\mu_1^*}\omega^2 + h_{F2}(\omega) M_2^*\varepsilon_2^* e^{i\mu_2^*}\omega^2 = 0$$

nelle quattro incognite $M_1^*\varepsilon_1^*$, $\mu_1^*, M_2^*\varepsilon_2^*$ e μ_2^*.

Se il rotore ha un campo di funzionamento tale per cui $0 < \omega \ll \overline{\omega}_1$ il rotore è detto *rigido* e

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_rX_i \cdot {}_rX_j}{\left(k_{rr} - m_{rr}\omega^2\right) + i(\eta k_{rr})} = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_rX_i \cdot {}_rX_j}{k_{rr}\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\overline{\omega}_r^2}\right) + i(\eta k_{rr})}$$

può essere considerato costante per cui l'equilibramento può essere effettuato a una qualsiasi velocità angolare e il rotore, in questo caso particolare, risulta equilibrato in tutto il campo di funzionamento.
In caso contrario il rotore è detto *flessibile* e l'equilibramento funziona solo nell'intorno della velocità alla quale viene effettuato.