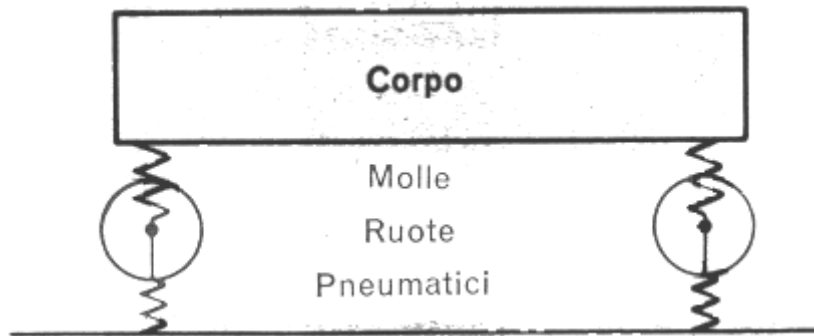


Applicazioni: studio del comportamento dinamico di un'autovettura

Ci sono molti sistemi a due gradi di libertà di interesse pratico nel campo ingegneristico. Discuteremo diverse di queste applicazioni che illustrano le caratteristiche dei sistemi a due gradi di libertà.

L'automobile rappresenta un sistema complesso a più gradi di libertà. È possibile, tuttavia, semplificare il sistema considerandone solo alcuni moti quali



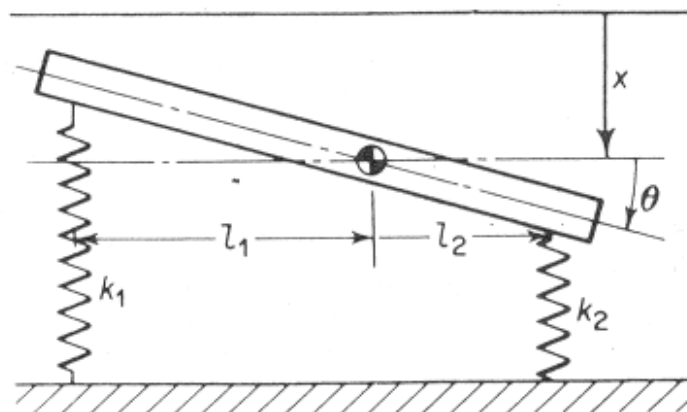
- (1) movimento traslatorio verticale del telaio;
- (2) moto angolare di beccheggio del telaio;
- (3) moto verticale delle ruote.

Le frequenze proprie per i primi due tipi di moto sono dello stesso ordine di grandezza e generalmente inferiori a 1 Hz. Le ruote, invece, si muovono in senso verticale con rapidità maggiore e la loro frequenza è dalle 6 alle 10 volte più grande di quella della cassa.

A causa di questa notevole differenza delle frequenze proprie, i moti del corpo (1) e (2) e quello delle ruote (3) avvengono pressoché indipendentemente.

Per esempio il movimento delle ruote è a frequenza troppo alta per influenzare apprezzabilmente i movimenti del telaio e i movimenti del telaio sono a frequenza bassa per influenzare quello delle ruote.

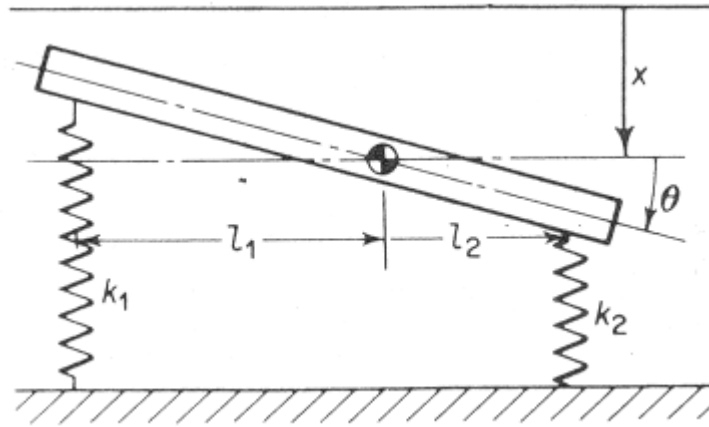
È evidente quindi che possiamo studiare i moti del telaio e quelli delle ruote separatamente, semplificando notevolmente il problema.





Lezione XXX
Sistemi vibranti a 2-n gdl

Per studiare il moto del telaio adottiamo la rappresentazione schematica di figura, dove



m = massa sospesa del veicolo

J = momento d'inerzia del veicolo attorno al baricentro

k_1, k_2 = rigidezza complessiva delle sospensioni anteriore e posteriore

Le equazioni di equilibrio dinamico sono:

$$\begin{cases} m\ddot{x} + (k_1 + k_2)x + (k_2l_2 - k_1l_1)\theta = 0 \\ J\ddot{\theta} + (k_2l_2 - k_1l_1)x + (k_1l_1^2 + k_2l_2^2)\theta = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2l_2 - k_1l_1 \\ k_2l_2 - k_1l_1 & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Utilizzando diverse coordinate libere, ovvero gli spostamenti x_1 e x_2 degli estremi della due molle avremmo avuto che

$$\begin{cases} x = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{l_1 + l_2} l_1 \\ \theta = \frac{x_2 - x_1}{l_1 + l_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{l_2}{l_1 + l_2} & \frac{l_1}{l_1 + l_2} \\ -\frac{1}{l_1 + l_2} & \frac{1}{l_1 + l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = [\Lambda] \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} m \frac{l_2}{l_1 + l_2} & m \frac{l_1}{l_1 + l_2} \\ -\frac{J}{l_1 + l_2} & \frac{J}{l_1 + l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1l_1 & k_2l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove le matrici $[M]$ e $[K]$ sono piene e non simmetriche.





Lezione XXX
Sistemi vibranti a 2-n gdl

Utilizzando quest'ultimo sistema di coordinate libere e utilizzando Lagrange avremmo che

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}l_1\right)^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}\right)^2$$

da cui

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m\left(\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}l_1\right)\frac{l_2}{l_1 + l_2} - J\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}\right)\frac{1}{l_1 + l_2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \ddot{x}_1\frac{ml_1^2 + J}{(l_1 + l_2)^2} + \ddot{x}_2\frac{ml_1l_2 - J}{(l_1 + l_2)^2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\left(\dot{x}_1 + \frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}l_1\right)\frac{l_1}{l_1 + l_2} + J\left(\frac{\dot{x}_2 - \dot{x}_1}{l_1 + l_2}\right)\frac{1}{l_1 + l_2} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = \ddot{x}_1\frac{ml_1l_2 - J}{(l_1 + l_2)^2} + \ddot{x}_2\frac{ml_2^2 + J}{(l_1 + l_2)^2}$$

mentre

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \frac{ml_1^2 + J}{(l_1 + l_2)^2} & \frac{ml_1l_2 - J}{(l_1 + l_2)^2} \\ \frac{ml_1l_2 - J}{(l_1 + l_2)^2} & \frac{ml_2^2 + J}{(l_1 + l_2)^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

dove le matrici $[M]$ e $[K]$ sono sempre simmetriche, indipendentemente dalla scelta delle coordinate libere, in quanto derivanti da forme quadratiche definitive positive.

Se poi volessimo studiare la risposta del sistema quando l'autovettura viaggia con una velocità costante v su un suolo accidentato definito da una legge

$$y(x) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sin\left(\frac{r2\pi}{\lambda}x\right)$$

con λ lunghezza d'onda fondamentale, possiamo ricordare che

$$x = vt + x_0$$

ovvero

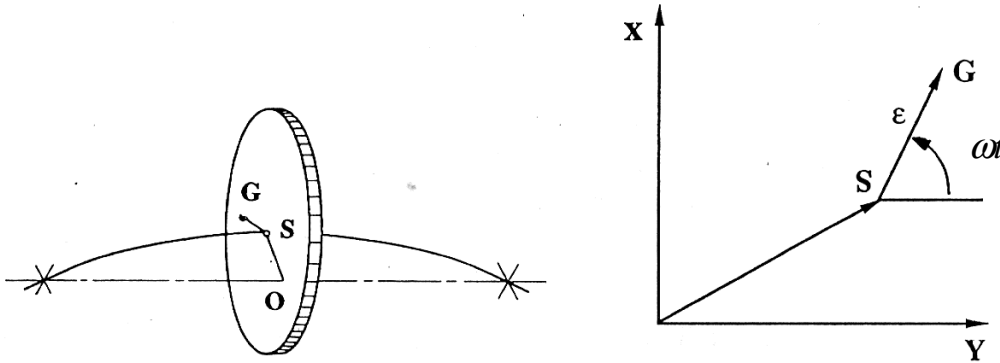
$$y(x) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sin\left(\frac{r2\pi}{\lambda}vt + \frac{r2\pi}{\lambda}x_0\right) = \sum_{r=1}^{\infty} Y_r \sin(r\omega_0t + r\varphi_0)$$

$$\text{con } \omega_0 = \frac{2\pi}{\lambda}v; \varphi_0 = \frac{2\pi}{\lambda}x_0$$



Velocità critiche flessionali

Per introdurre il problema, in forma semplificata, facciamo riferimento al cosiddetto “rotore di Jeffcott” o “di Laval”, rappresentato in figura



Supponiamo che il rotore sia costituito da

- un albero omogeneo, deformabile elasticamente, pensato privo di massa e vincolato a ruotare attorno alla propria linea elastica con velocità angolare costante ω ;
- un disco rigido sottile, calettato sull'albero in mezz'ora di questo in modo perfettamente perpendicolare all'asse di rotazione così da poter trascurare l'effetto giroscopico;
- che i supporti siano infinitamente rigidi.

Sia k l'elasticità flessionale dell'albero, supposta costante in tutte le direzioni, e S la traccia al generico istante t dell'asse di rotazione e questa coincida con il centro geometrico del disco, mentre con G indichiamo la posizione del suo baricentro eccentrico con eccentricità ε .

Per le ipotesi semplificative fatte il moto del disco è piano e siano $x(t)$ e $y(t)$ le coordinate del centro del disco al generico istante t , ovvero potremo definire un vettore $\vec{z}(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix}$ e di conseguenza

l'equazione vettoriale di equilibrio del sistema risulta

$$-m\ddot{\vec{z}}_G - k\vec{z} + m\vec{g} = 0$$

dove

$$\vec{z}_G(t) = \begin{Bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} + \varepsilon \cdot e^{i\omega t}$$



Lezione XXX
Sistemi vibranti a 2-n gdl

$$-m\ddot{\vec{z}}_G - k\vec{z} + m\vec{g} = 0$$

che, riscritta in forma scalare, porta a

$$\begin{cases} m\ddot{x} + kx = -mg + m\varepsilon\omega^2 \cos \omega t \\ m\ddot{y} + ky = m\varepsilon\omega^2 \sin \omega t \end{cases}$$

equazioni caratteristiche di un sistema a due gradi di libertà forzato da una forzante armonica di pulsazione ω . Nasceranno quindi fenomeni di risonanza qualora

$$\omega = \omega_{0x} = \omega_{0y} = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Analizzando le soluzioni a regime, ovvero i due integrali particolari, avremo ovviamente che

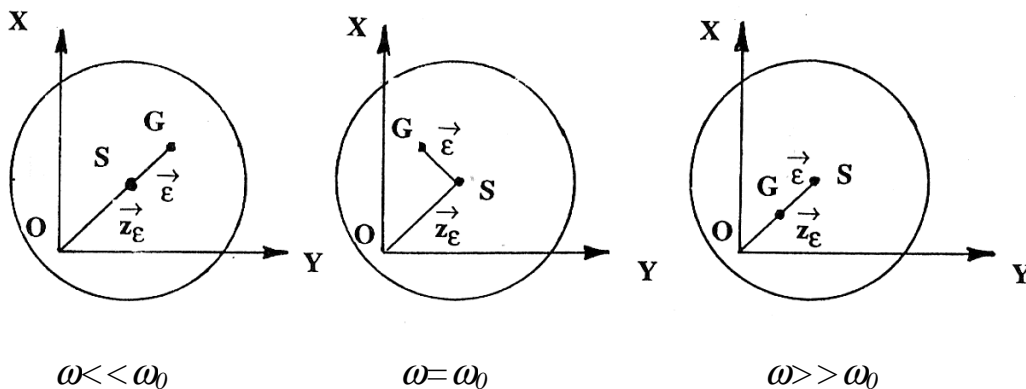
$$\vec{z}_{P1} = \begin{Bmatrix} X_{P1} \\ Y_{P1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{mg}{k} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

ovvero che il sistema ruoterà attorno alla posizione dovuta alla freccia statica, mentre

$$\vec{z}_{P2} = \begin{Bmatrix} X_{P2} \\ Y_{P2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1} \\ \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 - 1} \end{Bmatrix} e^{i\alpha}$$

ovvero la traccia dell'asse di rotazione dell'albero percorre una traiettoria circolare di raggio pari a X_{P2} con velocità angolare del raggio vettore pari a ω , identica a quella con la quale il baricentro G percorre una circonferenza di raggio ε .

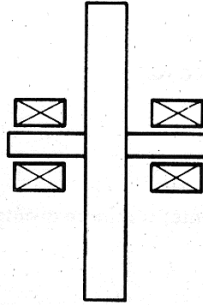
Ne risulta ovviamente che





Lezione XXX
Sistemi vibranti a 2-n gdl

Ad analoghi risultati saremmo pervenuti se avessimo potuto considerare il rotore come infinitamente rigido, ma su supporti flessibili di differente rigidezza k_x e k_y , come avviene a esempio nei perni lubrificati, dove la risultante del campo di forze agente tra perno e cuscinetto, per effetto del meato formatosi, è funzione della posizione relativa del centro del perno rispetto a quello del cuscinetto.



Dette F_{xi} e F_{yi} le due componenti della risultante di ogni i-simo cuscinetto, risulterà:

$$F_{xi}(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i) = F_{xi} + \left. \frac{\partial F_{xi}}{\partial x_i} \right|_{\{0\}} (x_i - x_{i0}) + \left. \frac{\partial F_{xi}}{\partial y_i} \right|_{\{0\}} (y_i - y_{i0}) + \left. \frac{\partial F_{xi}}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\{0\}} \dot{x}_i + \left. \frac{\partial F_{xi}}{\partial \dot{y}_i} \right|_{\{0\}} \dot{y}_i$$

$$F_{yi}(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i) = F_{yi} + \left. \frac{\partial F_{yi}}{\partial x_i} \right|_{\{0\}} (x_i - x_{i0}) + \left. \frac{\partial F_{yi}}{\partial y_i} \right|_{\{0\}} (y_i - y_{i0}) + \left. \frac{\partial F_{yi}}{\partial \dot{x}_i} \right|_{\{0\}} \dot{x}_i + \left. \frac{\partial F_{yi}}{\partial \dot{y}_i} \right|_{\{0\}} \dot{y}_i$$

dove $\{0\} = \begin{cases} x_i = x_{0i} \\ y_i = y_{0i} \\ \dot{x}_i = 0 \\ \dot{y}_i = 0 \end{cases}$ e x_{0i} e y_{0i} sono le posizioni di equilibrio statico di ogni cuscinetto per effetto

dei carichi statici gravanti.

Trascuriamo per ora i termini di velocità e i termini misti di posizione dello sviluppo di Taylor e scriviamo le equazioni misurando gli spostamenti a partire dalla posizione di equilibrio, ovvero

$$F_{xi}(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i) \cong F_{xi} \Big|_{\{0\}} + \left. \frac{\partial F_{xi}}{\partial x_i} \right|_{\{0\}} \bar{x}_i = F_{xi} \Big|_{\{0\}} - k_x \bar{x}_i$$

$$F_{yi}(x_i, y_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i) \cong F_{yi} \Big|_{\{0\}} + \left. \frac{\partial F_{yi}}{\partial y_i} \right|_{\{0\}} \bar{y}_i = F_{yi} \Big|_{\{0\}} - k_y \bar{y}_i$$

Le equazioni diventano ovviamente:

$$m\ddot{\bar{x}} + k_x \bar{x} = m\epsilon\omega^2 \cos \omega t$$

$$m\ddot{\bar{y}} + k_y \bar{y} = m\epsilon\omega^2 \sin \omega t$$





Lezione XXX
Sistemi vibranti a 2-n gdl

$$m\ddot{\bar{x}} + k_x\bar{x} = m\epsilon\omega^2 \cos \omega t$$

$$m\ddot{\bar{y}} + k_y\bar{y} = m\epsilon\omega^2 \sin \omega t$$

le cui soluzioni particolari sono date da

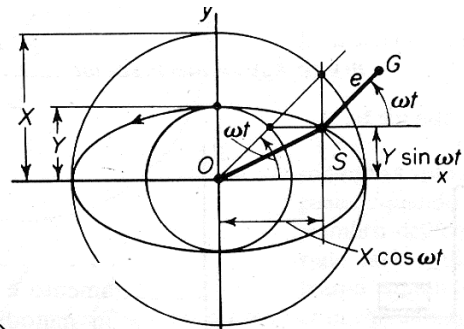
$$\bar{x}(t) = \frac{m\epsilon\omega^2}{k_x - m\omega^2} \cos \omega t = \bar{X} \cos \omega t$$

$$\bar{y}(t) = \frac{m\epsilon\omega^2}{k_y - m\omega^2} \sin \omega t = \bar{Y} \sin \omega t$$

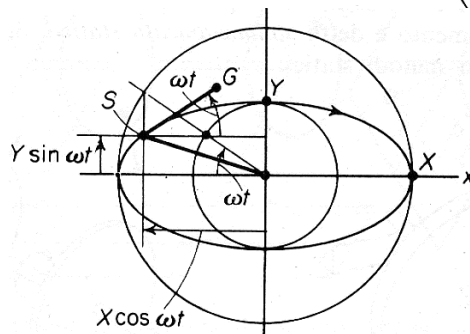
che quadrate e sommate danno la semplice equazione di un'ellisse

$$\left(\frac{\bar{x}(t)}{\bar{X}}\right)^2 + \left(\frac{\bar{y}(t)}{\bar{Y}}\right)^2 = 1$$

Nell'ipotesi che $k_x < k_y$ e $\omega < \sqrt{\frac{k_x}{m}}$



se $\sqrt{\frac{k_x}{m}} < \omega < \sqrt{\frac{k_y}{m}}$



se, infine, $\sqrt{\frac{k_y}{m}} < \omega$

