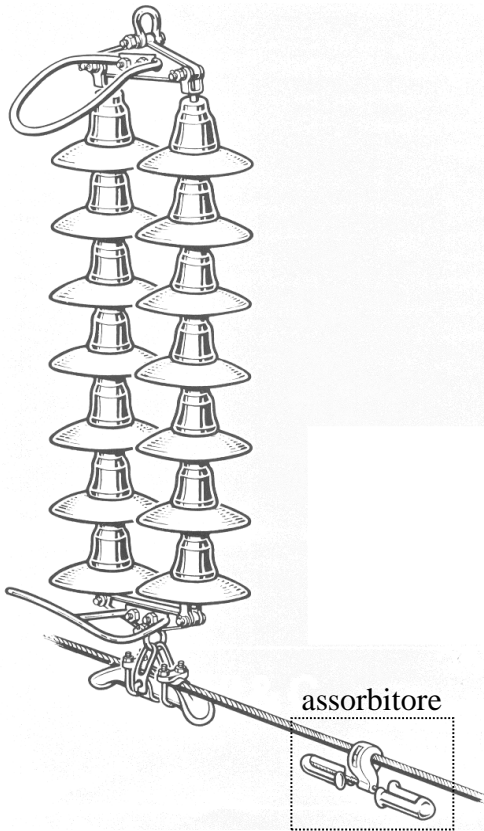


**Applicazioni: l'assorbitore dinamico**

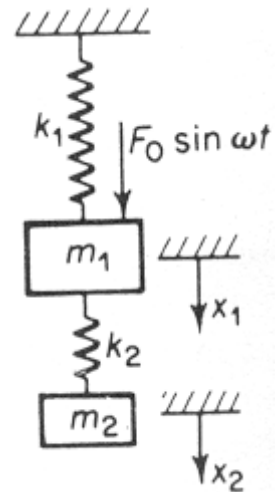


Il concetto su cui si basa l'assorbitore dinamico è quello di dissipare tutta l'energia introdotta da un campo di forze in un sistema vibrante mandandone volutamente in risonanza un particolare e preservando il resto.

Nella figura è rappresentata la sospensione di una linea elettrica ad alta tensione. Ovvii problemi impediscono dal collegare il cavo a terra, a esempio con un elemento dissipativo. D'altronde il basso smorzamento del cavo e l'ampio spettro del vento incidente, oltre al fenomeno delle vibrazioni indotte per distacco di vortici, rendono molto probabile l'eccitazione in risonanza della campata.

Consideriamo il comportamento del cavo con l'assorbitore dinamico, considerando quest'ultimo, per semplicità, a un solo grado di libertà anziché a

quattro, ovvero ci si riconduca allo schema seguente dove  $m_1$  e  $k_1$  sono rispettivamente la massa e la rigidità a flessione del cavo, mentre  $m_2$  e  $k_2$  sono quelle di uno dei due contrappesi. Essendo il sistema lineare, o a questo approssimato, la forzante armonica è una delle componenti dello sviluppo in serie di Fourier dell'azione del vento.



Le equazioni di moto sono le soluzioni a regime del sistema

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) &= F_0 \sin \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned}$$

Effettuiamo le seguenti sostituzioni

$$\omega_{11} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{22} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad \text{e} \quad X_0 = \frac{F_0}{k_1}$$

e imponiamo come soluzioni degli integrali particolari

$$x_1(t) = X_1 \sin \omega t \quad \text{e} \quad x_2(t) = X_2 \sin \omega t$$



Lezione XXIX  
Sistemi vibranti a 2-n gdl

otterremo

$$\begin{aligned} \left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} - \left( \frac{\omega}{\omega_{11}} \right)^2 \right] X_1 - \frac{k_2}{k_1} X_2 &= X_0 \\ -X_1 + \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{22}} \right)^2 \right] X_2 &= 0 \end{aligned}$$

ovvero

$$\begin{aligned} \frac{X_1}{X_0} &= \frac{1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{22}} \right)^2}{\left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} - \left( \frac{\omega}{\omega_{11}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{22}} \right)^2 \right] - \frac{k_2}{k_1}} \\ \frac{X_2}{X_0} &= \frac{1}{\left[ 1 + \frac{k_2}{k_1} - \left( \frac{\omega}{\omega_{11}} \right)^2 \right] \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{22}} \right)^2 \right] - \frac{k_2}{k_1}} \end{aligned}$$

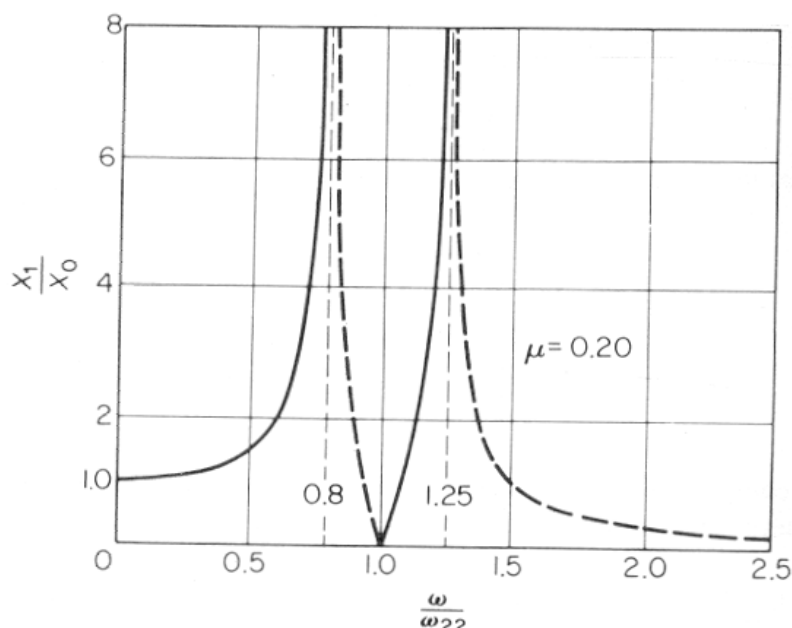
Si nota immediatamente che per  $\omega = \omega_{22}$ , pari alla frequenza propria del solo assorbitore,

$\frac{X_1}{X_0}$  tende a zero mentre  $\frac{X_2}{X_0}$  vale  $-\frac{k_1}{k_2}$  ovvero

$$k_2 X_2 = F_0 = \omega^2 m_2 X_2$$

che ci permette, noto  $F_0$  e  $\omega^2$ , di determinare l'entità della massa  $m_2$  imposta la massima freccia ammissibile per il trefolo che regge la massa stessa.

Le due frequenze proprie del sistema dipendono, ovviamente dal rapporto  $\mu = \frac{m_{22}}{m_{11}}$

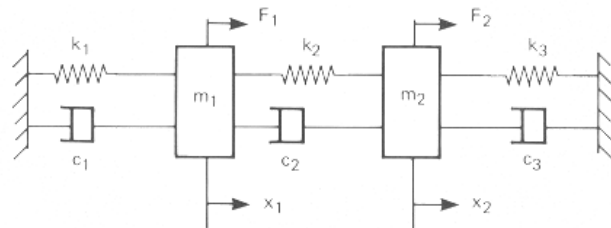


### Vibrazioni forzate smorzate - Smorzamento proporzionale

Come sappiamo esistono diversi tipi di smorzamento quali il viscoso, l'isteretico, quello dovuto ad attrito coulombiano, quello aerodinamico, ecc.

E' in generale difficile valutare quale tipo di smorzamento agisca in una particolare struttura e spesso il fenomeno dissipativo è dovuto alla presenza contemporanea di più di tipi di smorzamento. In molti casi, tuttavia, lo smorzamento è piccolo e possono essere fatte alcune ipotesi semplificative.

Il sistema di equazioni di equilibrio dinamico per il sistema vibrante di figura è ovviamente dato da



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Diremo che lo smorzamento è proporzionale se

- $[C] = \alpha[M]$ ;
- oppure  $[C] = \beta[K]$ ;
- ovvero  $[C] = \alpha[M] + \beta[K]$ .

In tutti e tre i casi, si dimostra facilmente che la matrice modale  $[\psi]$  del sistema conservativo associato, ovvero quello senza smorzamento, che diagonalizza tanto la matrice di massa  $[M]$ , quanto quella di rigidità  $[K]$ , rende diagonale anche la matrice  $[C]$ .

Infatti nel caso più generale

$$[\psi]^T [C] [\psi] = [\psi]^T [\alpha[M] + \beta[K]] [\psi] = \alpha \cdot \text{diag}[m] + \beta \cdot \text{diag}[k] = \text{diag}[c]$$

e quindi, passando in coordinate principali

$$\text{diag}[m]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[c]\{\dot{q}\} + \text{diag}[k]\{q\} = [\psi]^T \{F\}$$



Lezione XXIX  
Sistemi vibranti a 2-n gdl

$$\text{diag}[m]\{\ddot{q}\} + \text{diag}[c]\{\dot{q}\} + \text{diag}[k]\{q\} = [\psi]^T \{F\}$$

che rappresenta un set di  $N$  equazioni disaccoppiate, tante quante sono i gradi di libertà del sistema, del tipo

$$m_{ii}\ddot{q}_i + c_{ii}\dot{q}_i + k_{ii}q_i = \{X\}_i^T \{F\}$$

dove  $\{X\}_i$  è l' $i$ -simo autovettore del sistema conservativo associato.

L'equazione, che risolta fornisce la legge del moto di un sistema a un grado di libertà forzato, mette in luce che, a meno di una costante arbitraria, la forzante è data dal lavoro che le restanti forze agenti sul sistema compiono per l' $i$ -simo modo di vibrare.

La frequenza proprie del sistema sono date da

$$\omega_{Di} = \bar{\omega}_i \sqrt{1 - \xi_i^2}; \bar{\omega}_i^2 = \frac{k_{ii}}{m_{ii}}; \xi_i = \frac{c_{ii}}{2m_{ii}\bar{\omega}_i} = \frac{\alpha}{2\bar{\omega}_i} + \frac{\beta\bar{\omega}_i}{2}$$

mentre il decay avviene con le ampiezze che decrescono esponenzialmente con legge del tipo

$$e^{-\xi_i\bar{\omega}_i t}$$

e il generico termine della matrice di trasferimento vale

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r X_i \cdot {}_r X_j}{(k_{rr} - m_{rr}\omega^2) + i(\omega c_{rr})}$$





### *Smorzamento isteretico*

Nel caso di smorzamento isteretico o strutturale abbiamo già visto che l'energia dissipata in un ciclo è indipendente dalla pulsazione ma dipende solo dalla ampiezza di vibrazione ovvero

$$[M]\{\ddot{x}\} + i\eta[K]\{x\} + [K]\{x\} = \{F\}$$

Passando in coordinate principali

$$diag[m]\{\ddot{q}\} + (1 + i\eta)diag[k]\{q\} = [\psi]^T \{F\}$$

ovvero un set di  $N$  equazioni disaccoppiate, tante quante sono i gradi di libertà del sistema, del tipo

$$m_{ii}\ddot{q}_i + (1 + i\eta)k_{ii}q_i = \{X\}_i^T \{F\}$$

dove  $\{X\}_i$  è l' $i$ -simo autovettore del sistema conservativo associato.

Ovviamente

$$\lambda_i^2 = -\frac{k_{ii}}{m_{ii}}(1 + i\eta) = -\bar{\omega}_i^2 \sqrt{1 + \eta^2} e^{i \tan^{-1}(\eta)}$$

mentre il generico termine della matrice di trasferimento vale

$$h_{ij}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{{}_r X_i \cdot {}_r X_j}{(k_{rr} - m_{rr}\omega^2) + i(\eta k_{rr})}$$





### Smorzamento non proporzionale

Quando lo smorzamento non è proporzionale alla matrice di massa e o a quella di rigidità, la matrice modale del sistema conservativo associato non diagonalizza la matrice di smorzamento.

Si può, tuttavia, ottenere un sistema disaccoppiato in questo modo. Il set di  $N$  equazioni differenziali del II ordine sono convertite in un set  $2N$  equazioni differenziali del primo ordine, assegnando nuove variabili (chiamate variabili di stato) a ciascuna delle coordinate libere originali e delle loro derivate nel tempo

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Sostituendo

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 & \dot{x}_1 &= \dot{z}_1 = z_3 & \ddot{x}_1 &= \dot{z}_3 \\ x_2 &= z_2 & \dot{x}_2 &= \dot{z}_2 = z_4 & \ddot{x}_2 &= \dot{z}_4 \end{aligned}$$

otteniamo

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

ovvero

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{G\}$$





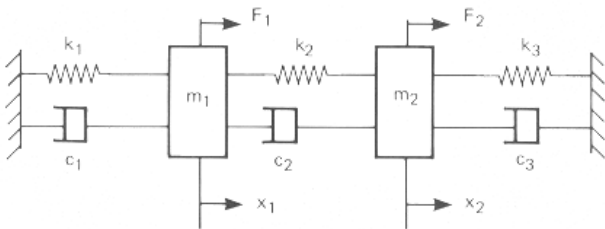
Lezione XXIX  
Sistemi vibranti a 2-n gdl

$$[A]\{\dot{z}\} + [B]\{z\} = \{G\}$$

dove  $[A] = \begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} = [A]^T$   $[B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} = [B]^T$   $\{G\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$

che può essere risolta con il metodo degli autovalori con  $\lambda_i = \omega_{Di}$   
Supponiamo che

$$m_1 = m_2 = m \quad c_1 = c_2 = c_3 = c \quad k_1 = k_2 = k_3 = k$$



In questo caso particolare di smorzamento proporzionale otteniamo dal calcolo degli autovalori e autovettori

$$diag[\omega_D] = \begin{bmatrix} \frac{3c + \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3c - \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \end{bmatrix}$$

$$[\psi] = \begin{bmatrix} \frac{3c + \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & \frac{3c - \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & \frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} & \frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ \frac{3c + \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & \frac{3c - \sqrt{9c^2 - 12mk}}{2m} & \frac{c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} & \frac{c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

dove gli elementi delle prime due righe, come ci aspettavamo, soddisfano la condizione

$$x_1 = z_1 \quad \dot{x}_1 = \dot{z}_1 = z_3 = \omega_{Di} x_1$$

$$x_2 = z_2 \quad \dot{x}_2 = \dot{z}_2 = z_4 = \omega_{Di} x_2$$

e i modi propri del sistema sono quelli puramente reali del sistema conservativo.

Nel caso, invece, generale di smorzamento non proporzionale i modi propri smorzati





Lezione XXIX  
Sistemi vibranti a 2-n gdl

esistono, ma non sono più identici a quelli del sistema conservativo e vi sono differenze di fase (non più  $0$  o  $\pi$ ) tra le componenti delle coordinate libere.

I modi sono quindi complessi e non sono più definibili punti nodali (aventi componente nulla dello spostamento).

