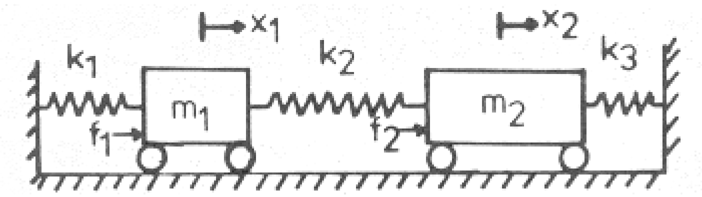
Sistemi a più gradi di libertà non smorzati

Per un sistema non smorzato con *N* gradi di libertà, le equazioni che ne governano il moto possono essere sempre scritte nella forma matriciale

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f(t)\}$$

dove

- $[M]$ e $[K]$ sono rispettivamente le matrici quadrate di massa e di rigidezza di ordine *N;*
- $\{x(t)\}$ e $\{f(t)\}$ sono i vettori di ordine *N* degli spostamenti e delle forze agenti, entrambi funzione del tempo.



Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, ovvero calcolando le forze che agiscono sul sistema prima per $x_1 \neq 0, x_2 = 0$ e poi quelle per $x_1 = 0, x_2 \neq 0$, si possono facilmente determinare le equazioni di equilibrio dinamico delle due masse, ovvero

$$m_1\ddot{x}_1 + k_1 x_1 + k_2(x_1 - x_2) = f_1$$
$$m_2\ddot{x}_2 + k_3 x_2 + k_2(x_2 - x_1) = f_2$$

che può essere riscritta come

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$$
$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$

con

- $[M]=\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$
- $[K]=\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}$
- $\{x(t)\}=\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$ e $\{f(t)\}=\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix}$

Consideriamo, dapprima la soluzione del moto libero che sarà del tipo

$$\{x(t)\} = \{X\} e^{\lambda t}$$

dove $\{X\}$ è un vettore di ordine *N* di ampiezze indipendenti dal tempo.
Imponendo la soluzione all'equazione differenziale otteniamo

$$\left([K] + \lambda^2 [M]\right)\{X\} e^{\lambda t} = \{0\}$$

la cui unica soluzione non banale è data da

$$\det\left\|[k] + \lambda^2 [M]\right\| = \det\left\|\begin{bmatrix} k_1 + k_2 + \lambda^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 + \lambda^2 m_2 \end{bmatrix}\right\| = 0$$

che è il polinomio di grado *2N* in λ

$$m_1 m_2 \lambda^4 + \left(m_1(k_2 + k_3) + m_2\left(k_1 + k_2\right)\right)\lambda^2 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$a\lambda^4 + b\lambda^2 + c = 0$$

le cui radici sono

$$\lambda_1^2 = \frac{-b}{2a} + \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$$

$$\lambda_2^2 = \frac{-b}{2a} - \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}} < 0 \Rightarrow \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$$

Sostituendo le radici nell'equazione di partenza, avremo

$$\left([K] - \omega_1^2 [M]\right)\{X\}_1 = \{0\}$$

e

$$\left([K] - \omega_2^2 [M]\right)\{X\}_2 = \{0\}$$

che ci permettono di calcolare a meno di una costante arbitraria, dipendente dalle condizioni iniziali, le deformate modali $\left\{X\right\}_i$, o modi, del sistema associate a ogni frequenza propria ω_i.

Nel nostro caso

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega_1^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3-\omega_1^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_1X_1 \\ {}_1X_2 \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Risolvendo la prima equazione

$$\left(k_1+k_2-\omega_1^2 m_1\right) {}_1X_1 - k_2\, {}_1X_2 = 0$$

ovvero

$$\left\{X\right\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1+k_2-\omega_1^2 m_1}{k_2} \end{Bmatrix} {}_1X_1$$

e analogamente

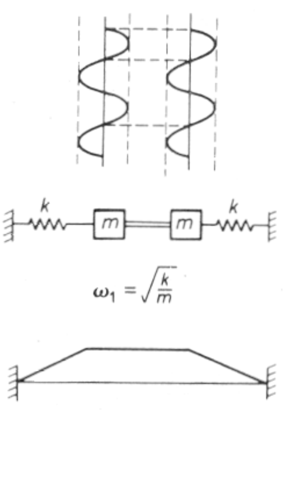
$$\left\{X\right\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ \dfrac{k_1+k_2-\omega_2^2 m_1}{k_2} \end{Bmatrix} {}_2X_1$$

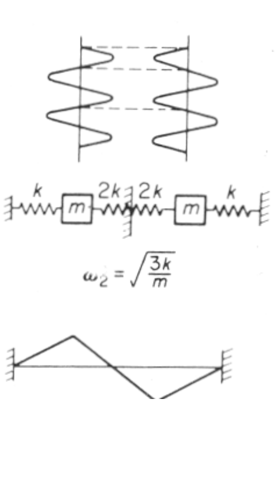
Nel caso, a esempio, che $m_1 = m_2 = m$ e $k_1 = k_2 = k_3 = k$, abbiamo che

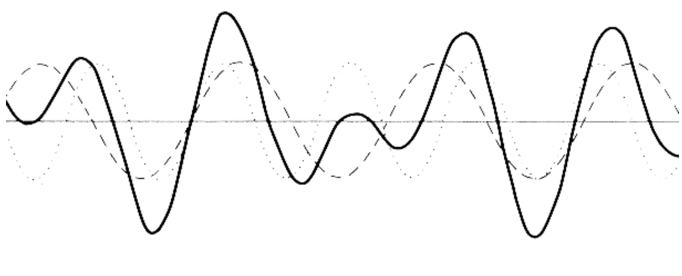
$$\omega_1^2 = \frac{k}{m} \text{ e } \omega_2^2 = \frac{3k}{m}$$

e corrispondentemente

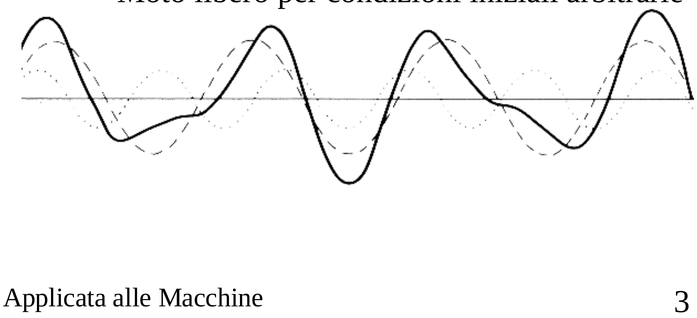
$$\left\{X\right\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} {}_1X_1 \text{ e } \left\{X\right\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} {}_2X_1$$







Moto libero per condizioni iniziali arbitrarie



Ritornando all'equazione di partenza

$$\left([K]+\lambda^2[M]\right)\{X\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

potremmo premoltiplicarla per l'inversa della matrice di massa ottenendo

$$\left([M]^{-1}[K]+\lambda^2[I]\right)\{X\}e^{\lambda t}=\{0\}$$

forma del tutto analoga a

$$\left([A]-\gamma[I]\right)\{V\}=\{0\}$$

dove γ sono gli autovalori della matrice *[A]* e $\{V\}$ i corrispondenti autovettori.
E' ovvio che

$$-\gamma\equiv\lambda^2 \text{ e } \{V\}\equiv\{X\}$$

Nel nostro caso si ha

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/m & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix}$$

$$[A]=[M]^{-1}[K]\begin{bmatrix} 2k/m & -k/m \\ -k/m & 2k/m \end{bmatrix}$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$\{\gamma\}=\begin{Bmatrix} 3k/m \\ k/m \end{Bmatrix} \text{ e } [V]=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Possiamo ora dimostrare l'ortogonalità dei modi di vibrare. Infatti, abbiamo che

$$\left([K]-\omega_1^2[M]\right)\{X\}_1=\{0\}$$

e

$$\left([K]-\omega_2^2[M]\right)\{X\}_2=\{0\}$$

Premoltiplicando la prima espressione per $\{X\}_2^T$ abbiamo

$$\{X\}_2^T\left([K]-\omega_1^2[M]\right)\{X\}_1=\{0\}\Rightarrow\{X\}_2^T[K]\{X\}_1=\omega_1^2\{X\}_2^T[M]\{X\}_1$$

Trasponendo la seconda espressione e postmoltiplicandola per $\{X\}_1$ otteniamo invece

$$\{X\}_2^T\left([K]^T-\omega_2^2[M]^T\right)\{X\}_1=\{0\}\Rightarrow\{X\}_2^T[K]^T\{X\}_1=\{X\}_2^T\omega_2^2[M]^T\{X\}_1$$

Ma le matrici $[M]$ e $[K]$ sono simmetriche per cui

$$\omega_2^2\{X\}_2^T[M]\{X\}_1=\omega_1^2\{X\}_2^T[M]\{X\}_1\Rightarrow\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\{X\}_2^T[M]\{X\}_1=0$$

ovvero se $\left(\omega_2^2-\omega_1^2\right)\neq 0$, cioè le frequenze proprie sono distinte, abbiamo che

$$\{X\}_2^T[M]\{X\}_1=\{X\}_2^T[K]\{X\}_1=0$$

ovvero i modi propri vibrare, associati a frequenze proprie distinte, sono ortogonali rispetto alla matrice di massa e rigidezza.
Inoltre

$$\{X\}_i^T[M]\{X\}_i=m_{ii}\text{ e }\{X\}_i^T[K]\{X\}_i=k_{ii}$$

dove m_{ii} e k_{ii} sono chiamate rispettivamente massa e rigidezza generalizzata.
Nel nostro esempio

$$m_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=2m;m_{22}=2m;k_{11}=2k;k_{22}=6k$$

Cerchiamo ora un sistema di coordinate libere che disaccoppi contemporaneamente il sistema tanto inerzialmente, quanto elasticamente, ovvero tale per cui le equazioni che, risolte, descrivano il moto del sistema siano disaccoppiate.

Se costruiamo una matrice quadrata ψ le cui colonne siano costituite dai modi propri di vibrare, ovvero

$$[\psi]=\begin{bmatrix} {}_1X_1 & {}_2X_1 \\ {}_1X_2 & {}_2X_2 \end{bmatrix} \text{ detta anche matrice modale}$$

e definiamo la trasformazione

$$\{x(t)\}=[\psi]\{q(t)\} \text{con } \{q(t)\} \text{detto vettore delle coordinate principali}$$

$$[M][\psi]\{\ddot{q}\}+[K][\psi]\{q\}=\{f\}$$

ovvero

$$[\psi]^T[M][\psi]\{\ddot{q}\}+[\psi]^T[K][\psi]\{q\}=[\psi]^T\{f\}$$

Da quanto sopra detto, si vede che

$$[\psi]^T[M][\psi]=diag[m] \text{ e } [\psi]^T[K][\psi]=diag[k]$$

dove $diag[m]$e $diag[k]$sono matrici diagonali, tali per cui i elementi $m_{ij}=0$e $k_{ij}=0$ se $j\neq i$

Nel nostro caso con le due masse uguali tra loro, così come le tre rigidezze, si ha

$$diag[m]=\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \text{ e } diag[k]=\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & 6k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f_1+f_2 \\ f_1-f_2 \end{Bmatrix}$$

Ma

$$[\psi]^T\left([K]-\omega^2[M]\right)[\psi]=\{0\}\Rightarrow diag[k]-\omega^2 diag[m]=\{0\}$$

Poiché esiste l'inversa di [ ]potremmo premoltiplicare l'equazione per l'inversa di [ ] ovvero

$$\left(diag[m]\right)^{-1}\left(diag[k]-\omega^2 diag[m]\right)=\{0\}\Rightarrow\left(diag[m]\right)^{-1}diag[k]-\omega^2[I]=\{0\}$$

$$\left(diag[m]\right)^{-1}\left(diag[k]-\omega^2 diag[m]\right)=\{0\}\Rightarrow\left(diag[m]\right)^{-1}diag[k]-\omega^2[I]=\{0\}$$

dove

$$\left(diag[m]\right)^{-1}diag[k]=\begin{bmatrix}k/m & 0\\ 0 & 3k/m\end{bmatrix}=diag\left[\bar{\omega}^2\right]$$

Al medesimo risultato, saremmo pervenuti se avessimo normalizzato i modi di vibrare, dividendone tutte le componenti per la costante $1/\sqrt{2m}$.

Analizziamo, ora, la risposta forzata.

$$[M]\{\ddot{x}(t)\}+[K]\{x(t)\}=\{f\}e^{i\omega t}$$

che a regime ammetterà una soluzione del tipo

$$\{x(t)\}=\{x\}e^{i\omega t}$$

dove il vettore delle ampiezze di vibrazione $\{x\}$ è soluzione di

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{x\}=\{f\}\Rightarrow\{x\}=\left([K]-\omega^2[M]\right)^{-1}\{f\}$$

che può essere anche riscritta come

$$\{x\}=H(\omega)\{f\}$$

dove $H(\omega)$ è la *receptance matrix* del sistema, quadrata di ordine *N*, e ne costituisce il modello della sua risposta in frequenza.

Ritornando alla definizione

$$H(\omega)=\left([K]-\omega^2[M]\right)^{-1}\Rightarrow\left([K]-\omega^2[M]\right)=\left(H(\omega)\right)^{-1}$$

Ma

$$[\psi]^T\left([K]-\omega^2[M]\right)[\psi]=\left(diag\left[\bar{\omega}^2\right]-\omega^2[I]\right)=[\psi]^T\left(H(\omega)\right)^{-1}[\psi]$$

e quindi

$$H(\omega)=[\psi]\left(diag\left[\bar{\omega}^2\right]-\omega^2[I]\right)^{-1}[\psi]^T$$

da cui si evince che la *receptance matrix* è simmetrica

$$H(\omega) = [\psi]\left(diag\left[\bar{\omega}^2\right] - \omega^2 [I]\right)^{-1} [\psi]^T$$

$$h_{jk}(\omega) = \frac{x_j(\omega)}{f_k(\omega)} = h_{kj}(\omega) = \frac{x_k(\omega)}{f_j(\omega)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_rX_j \cdot {}_rX_k}{\bar{\omega}_r^2 - \omega^2}$$

da cui si nota come il sistema possa andare in risonanza, qualora la pulsazione della forzante ω uguagli una delle N frequenze $\bar{\omega}_r$ proprie del sistema vibrante.

Ritornando al nostro sistema vibrante, risulta che risolvendo il sistema di equazioni lineari

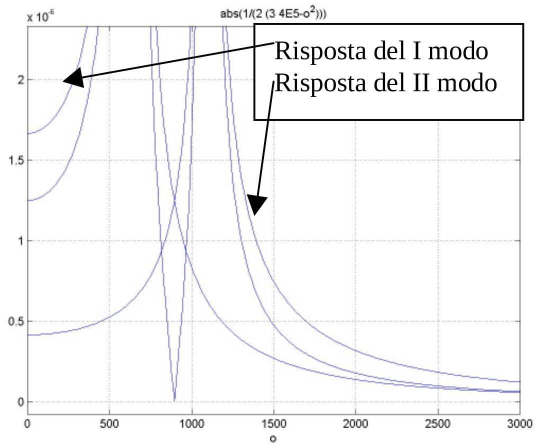
$$h_{11}(\omega) = -\frac{-2k + \omega^2 m}{3k^2 - 4km\omega^2 + \omega^4 m^2} = \frac{2k - \omega^2 m}{m^2 (k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

$$h_{21}(\omega) = \frac{k}{3k^2 - 4km\omega^2 + \omega^4 m^2} = \frac{k}{m^2 (k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

mentre in termini modali

$$h_{11}(\omega) = \frac{1}{2m(k/m - \omega^2)} + \frac{1}{2m(3k/m - \omega^2)} = \frac{2k - m\omega^2}{m^2 (k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$

$$h_{21}(\omega) = \frac{1}{2m(k/m - \omega^2)} - \frac{1}{2m(3k/m - \omega^2)} = \frac{k}{m^2 (k/m - \omega^2)(3k/m - \omega^2)}$$



Come si vede dal grafico a fianco, ove è mostrato l'andamento del modulo di h_{11}, non si commette un grande errore se studiamo la risposta del sistema nell'intorno della prima frequenza propria considerando la risposta di un sistema che abbia massa modale pari a m_{11} e rigidezza pari a k_{11}. Analogo discorso si può fare considerando la sola risposta dovuta alla seconda frequenza propria se la pulsazione della forzante è di valore non dissimile da questa. Ovvero abbiamo, empiricamente, dimostrato che pur essendo i modelli fisici continui, poiché le loro frequenze proprie sono ragionevolmente separate nel dominio delle frequenze, è lecito, nell'ipotesi che lo spettro della forzante sia limitato nello stesso dominio, considerare il contributo di un numero limitato di modi le cui frequenze

proprie associate stanno nel dominio dello spettro della forzante.
Ovvero: è possibile studiare la risposta dinamica a regime di un sistema continuo con un modello matematico con un numero discreto di gradi di libertà.

Ne consegue, inoltre, che misurando sperimentalmente la *receptance matrix*, dalla risposta misurata nell'intorno di una risonanza possiamo ricavare i parametri modali (massa modale o massa generalizzata m_{ii} e rigidezza modale o rigidezza generalizzata k_{ii}) così come il modo di vibrare.