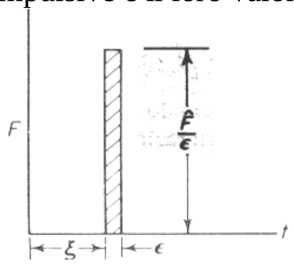
VIBRAZIONI TRANSITORIE

Quando un sistema dinamico viene sollecitato da una eccitazione non periodica applicata improvvisamente, come nel caso di un impulso, le risposte a tali eccitazioni sono dette transitori, dal momento che generalmente non si producono oscillazioni di regime. Tali oscillazioni avvengono con le frequenze proprie del sistema e l'ampiezza varierà a seconda del tipo di eccitazione.
Per prima cosa studiamo la risposta del solito oscillatore a una eccitazione impulsiva, dal momento che questo caso è importante per la comprensione del problema più generale dei transitori.

Incontriamo frequentemente forze molto grandi agenti per un tempo molto breve, ma con integrale finito rispetto al tempo. Chiamiamo tali forze impulsive e il loro valore è definito dall'equazione

$$\hat{F} = \int_t^{t+\varepsilon} F dt$$



La figura mostra una forza impulsiva di grandezza F/ε con durata nel tempo ε. Se ε tende a zero, tali forze tendono all'infinito; l'impulso definito dal suo integrale rispetto al tempo è $\hat{F}$. Quando $\hat{F}$ è uguale all'unità, tale forza nel caso limite di $\varepsilon \to 0$ viene chiamata *impulso unitario o funzione delta*, e viene indicata con il simbolo $\delta(t-\xi)$ e gode delle seguenti proprietà

$$\delta(t-\xi) = 0 \text{ per } t \neq \xi$$

$$\int_0^{\infty} \delta(t-\xi) d\xi = 1$$

$$\int_0^{\infty} f(\xi)\delta(t-\xi) d\xi = f(\xi)$$

Dal momento che $F\,dt = m\,dv$, 1'impulso $\hat{\ }$ agente sulla massa darà luogo a una improvvisa variazione di velocità senza un apprezzabile cambiamento di posizione. Allora un oscillatore, eccitato da un impulso $\hat{\ }$, nel caso di vibrazioni libere presenterà le condizioni iniziali

$$x(0) = 0; \dot{x}(0) = v_0 = \frac{\hat{F}}{m}$$

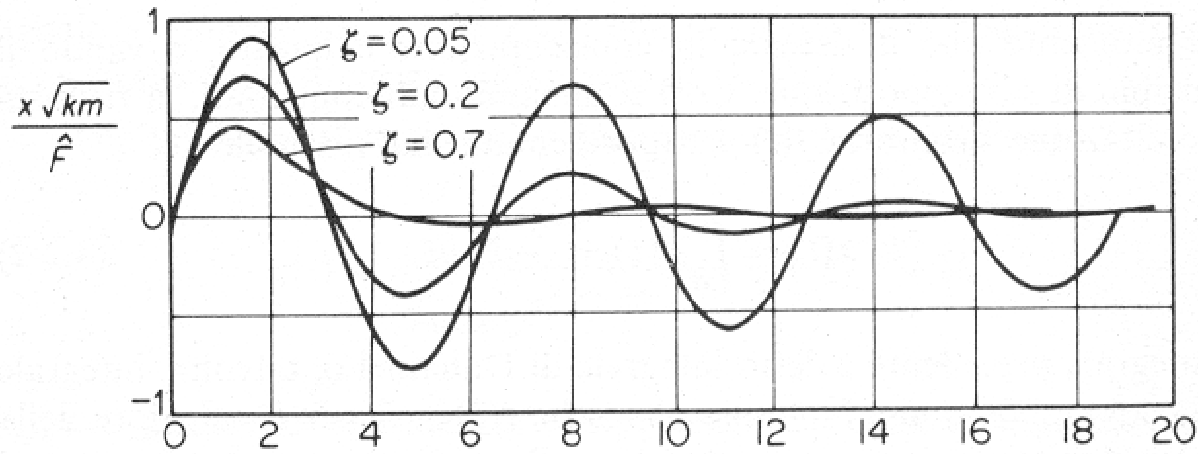
Se il sistema non è smorzato, la soluzione dell'integrale generale dell'equazione differenziale omogenea è data da

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_0}\sin\omega_0 t = h(t)\hat{F}$$

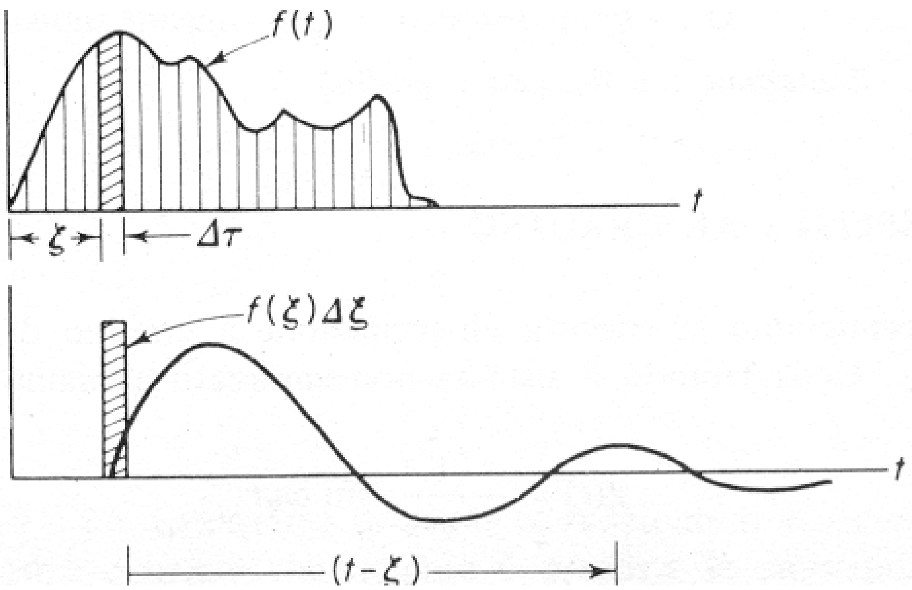
mentre nel caso smorzato

$$x(t) = \frac{\hat{F}}{m\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0 t}\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t\right) = h(t)\hat{F}$$

dove con *h(t)* si indica la risposta all'impulso unitario.



Nota la risposta *h(t)* del sistema meccanico a un'eccitazione d'impulso unitario è quindi possibile calcolarne la risposta a una forza arbitraria *f(t),* immaginandola come costituita da una serie d'impulsi $\hat{F} = f(\xi)\Delta\xi$



Il contributo alla risposta al tempo *t* di ogni singolo impulso è pari a

$$f(\xi)\Delta\xi h(t-\xi)$$

e poiché il sistema è lineare, valendo il principio di sovrapposizione degli effetti, la risposta del nostro sistema alla forzante arbitraria *f(t)* è dato da

$$x(t)=\int_0^t f(\xi)h(t-\xi)d\xi$$

detto anche integrale di Duhamel o della sovrapposizione (o della convoluzione).

Da quanto detto, si può banalmente calcolare la risposta a una forzante a gradino del tipo $f(t)=F_0$, già vista in precedenza.
Se il sistema è non smorzato, abbiamo che

$$h(t)=\frac{1}{m\omega_0}\sin\omega_0 t$$

e quindi

$$x(t)=\frac{F_0}{m\omega_0}\int_0^t \sin\omega_0\left(t-\xi\right)d\xi=\frac{F_0}{k}(1-\cos\omega_0 t)$$

coincidente, ovviamente, con quanto avevamo ottenuto attraverso le condizioni iniziali e l'integrale particolare.

Inoltre, vale che la funzione di trasferimento

$$H(f)=F\left|h(\tau)\right|=\int_0^\infty h(\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

e, ovviamente che

$$h(\tau)=F^{-1}\left|H(f)\right|$$

SISTEMI NON LINEARI

La seconda formulazione dell'equazione di Lagrange per sistemi conservativi a un grado di libertà è la seguente

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right)-\frac{dT}{dq}+\frac{dU}{dq}=Q$$

dove

- T è l'energia cinetica del sistema;
- U è l'energia potenziale delle forze conservative agenti;
- q è la coordinata libera che si è scelta per rappresentare il moto del sistema;
- Q, detta componente lagrangiana, rappresenta la somma dei lavori elementari di tutte le altre forze agenti sul sistema per un incremento virtuale unitario $\delta q^{*}=1$ della variabile indipendente.

In perticolare, il termine $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right)-\frac{dT}{dq}$ rappresenta il lavoro virtuale delle forze e coppie d'inerzia del sistema; il termine $\frac{dU}{dq}$ il lavoro virtuale delle forze che ammettono potenziale, mentre $Q=\frac{dW}{\delta q^{*}}$ è il lavoro virtuale di tutte le altre forze agenti sul sistema.

Potrà essere spesso comodo esprimere T, U e Q in funzione di spostamenti virtuali dx_i di m coordinate geometriche x_i legate alla coordinata libera q da m relazioni del tipo

$$x_i = x_i(t,q) \text{ per } i = 1,2,3,\ldots,m$$

Nei casi di cui ci occuperemo, gli m legami geometrici risultano indipendenti dal tempo per cui

$$x_i = x_i(q) \text{ per } i = 1,2,3,\ldots,m$$

$$x_i = x_i(q) \text{ per } i = 1,2,3,\ldots,m$$

Ne deriva che

$$T = \sum_{i=1}^{m} T_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} m_i \dot{x}_i^2$$

Ma

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i(q)}{dt} = \frac{dx_i(q)}{dq}\dot{q}$$

e quindi

$$T = \sum_{i=1}^{m} T_i = \frac{1}{2}\dot{q}^2 \sum_{i=1}^{m} m_i \left(\frac{dx_i(q)}{dq}\right)^2 = T(q,\dot{q})$$

Ma

$$T(q,\dot{q}) = T(q_0,0) + \left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}(q-q_0) + \left.\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}\dot{q} + \ldots$$

$$+\frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}(q-q_0)^2 + \left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}(q-q_0)\dot{q} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}\dot{q}^2 + \ldots$$

Ricordando Lagrange e l'espressione di T si ha

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{q}}\right) \cong \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}\ddot{q} + \cancel{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}}\dot{q}$$

e

$$\frac{dT}{dq} \cong \cancel{\left.\frac{\partial T}{\partial q}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}} + \cancel{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q^2}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}}(q-q_0) + \cancel{\left.\frac{\partial^2 T}{\partial q \partial \dot{q}}\right|_{q=q_0,\dot{q}=0}}\dot{q}$$

Analogamente l'energia potenziale U dipende solo dalla configurazione e quindi

$$U(q) = U(q_0) + \left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} (q - q_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} (q - q_0)^2 + \dots$$

che porta a

$$\frac{dU}{dq} \cong \left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} + \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} (q - q_0)$$

Per quanto riguarda la componente lagrangiana Q in essa compariranno i lavori virtuali $\delta^* L_i = \overrightarrow{F_i} \times \delta\vec{x}_i$ ovvero

$$Q = \frac{dW}{dq^*} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta^* L_i}{dq^*} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\overrightarrow{F}_i \times \delta\vec{x}_i}{dq^*} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\overrightarrow{F}_i \times \frac{d\vec{x}_i}{dq^*}dq^*}{dq^*} = \sum_{i=1}^{m} \overrightarrow{F}_i \times \frac{d\vec{x}_i}{dq^*} = \sum_{i=1}^{m} F_i \cos\alpha_i \frac{dx_i}{dq^*}$$

Poiché le F_i possono essere funzioni anche non lineari di $t, q, \dot{q}, \ddot{q}$ si avrà

$$Q(t, q, \dot{q}, \ddot{q}) = Q(t_0, q_0, 0, 0) + \left.\frac{dQ}{dt}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}} (t - t_0) + \left.\frac{dQ}{dq}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}} (q - q_0) + \dots$$

$$+ \left.\frac{dQ}{d\dot{q}}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}} \dot{q} + \left.\frac{dQ}{d\ddot{q}}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}} \ddot{q} + \dots$$

Ovvero, utilizzando Lagrange, ed eventualmente linearizzando con Taylor i termini non lineari, perverremo sempre a una equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa del tipo

$$\overline{m}\ddot{q} + \overline{r}\dot{q} + \overline{k}q = \overline{F}(t) + \overline{F}_0$$

dove, nel caso più generale,

- $\overline{m} = \left.\frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}^2}\right|_{q=q_0, \dot{q}=0} - \left.\frac{dQ}{d\ddot{q}}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}}$;
- $\overline{r} = -\left.\frac{dQ}{d\dot{q}}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}}$;
- $\overline{k} = \left.\frac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} - \left.\frac{dQ}{dq}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}}$;

- $\overline{F}(t) = \left.\dfrac{dQ}{dt}\right|_{\substack{t=t_0 \\ q=q_0, \dot{q}=\ddot{q}=0}}$;
- $\overline{F}_0 = Q(t_0, q_0, 0, 0) - \left.\dfrac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} + \left.\dfrac{d^2U}{dq^2}\right|_{q=q_0} q_0$

Con un'opportuna scelta di t_0 e di q_0 è sempre possibile fare in modo che F_0 sia nullo, se non interessa studiare la risposta del sistema alla sua applicazione, e quindi risolvere l'equazione differenziale linearizzata al fine di valutare la stabilità del sistema per piccole oscillazioni attorno alla posizione q_0 a partire dall'istante t_0.

Si vede immediatamente che se q_0 è la posizione di equilibrio statico all'istante t_0, definita da

$$Q(t_0, q_0, 0, 0) - \left.\frac{dU}{dq}\right|_{q=q_0} = 0$$

ovviamente misurando gli spostamenti a partire da questa posizione avremo

$$\overline{q} = q - q_0; \dot{\overline{q}} = \dot{q}; \ddot{\overline{q}} = \ddot{q}; F_0 = 0$$