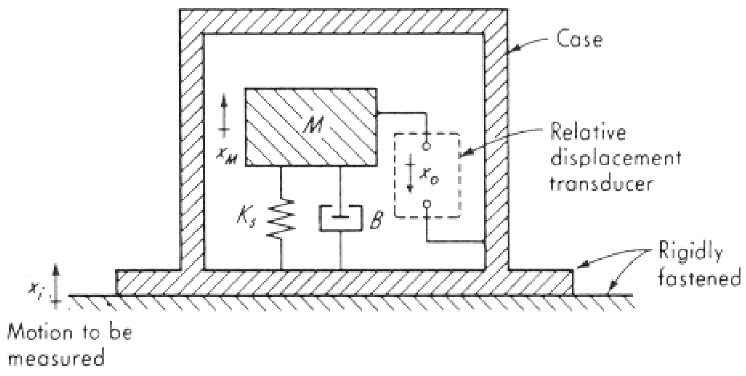
STRUMENTI DI MISURA DELLE VIBRAZIONI

Tra le applicazioni del nostro oscillatore vi è quella di usarlo come strumento per la misura delle vibrazioni assolute di un corpo



Con riferimento alle grandezze indicate nella figura e ai relativi versi positivi degli spostamenti, avremo che

$$K_s x_0 + B\dot{x}_0 = M\ddot{x}_M = M\left(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0\right)$$

che può essere riscritta usando le nostre consuete notazioni come

$$kx_0 + r\dot{x}_0 = M\ddot{x}_M = M\left(\ddot{x}_i - \ddot{x}_0\right)$$

dove

$$x_i(t) = |X_i| \sin\left(\omega_i t - \psi_i\right)$$

è l'andamento temporale dell'i-sima componente armonica (serie di Fourier) dello spostamento incognito *x(t)* del vincolo.
Riordinando l'equazione avremo

$$M\ddot{x}_0 + r\dot{x}_0 + kx_0 = M\ddot{x}_i = -\omega_i^2 |X_i| M e^{j(\omega_i t - \psi_i)}$$

il cui integrale particolare vale

$$X_{0i} = \frac{-\omega_i^2 |X_i| M e^{-j\psi_i}}{\left(-\omega_i^2 M + k\right) + jr\omega_i} = \frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}|X_i| e^{-j\psi_i}}{\left(1 - \frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right) + j2\xi \frac{\omega_i}{\omega_0}} = |X_{0i}| e^{-j\phi_i}$$

con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ e $\xi = \frac{r}{r_c} = \frac{r}{2M\omega_0}$

Se riferiamo le fasi della risposta a quelle delle componenti armoniche avremo che

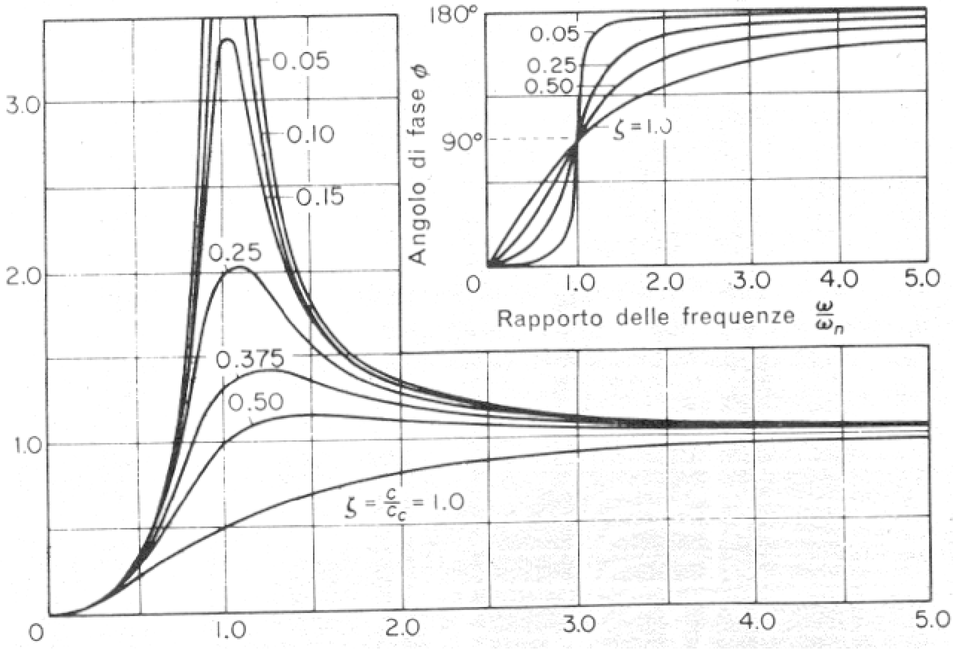
$$X_{0i}=\frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\left|X_i\right|}{\left(1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right)+j2\xi\frac{\omega_i}{\omega_0}}=\left|X_{0i}\right|e^{-j(\phi_i-\psi_i)}=\left|X_{0i}\right|e^{-j\beta_i}$$

otteniamo

$$\frac{\left|X_{0i}\right|}{\left|X_i\right|}=\frac{-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega_i^2}{\omega_0^2}\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2}}$$

e

$$\beta_i=\tan^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega_i}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega_i}{\omega_0}\right)^2}$$



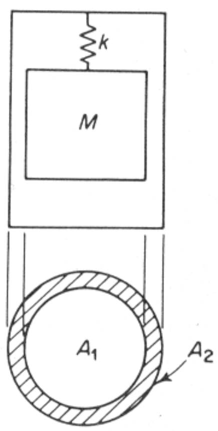
Si nota, quindi, che se $\omega_i \gg \omega_0$ (almeno 4-5 volte) la misura dell'ampiezza della vibrazione relativa permette di ricavare quella incognita di trascinamento.

Ovviamente, affinché la misura non sia distorta, deve essere

$\frac{\left|X_{0i}\right|}{\left|X_i\right|}=$ *costante* e $\beta_i = n\pi$ *(n=0,1,2,..,N)* per i = *1,2,3,…,N*

Questa esigenza porta che il sismografo, tale è il nome dello strumento, abbia una frequenza propria $\omega_0<\frac{\omega_1}{4}$ e tale condizione verifica automaticamente che non vi sia distorsione per le componenti armoniche di ordine superiore.

I sismografi sono, quindi strumenti pesanti e ingombranti dovendo avere una frequenza propria necessariamente bassa e normalmente si usano indici di smorzamento ξ dell'ordine di 0,6-0,7 per ridurre l'effetto delle condizioni iniziali.



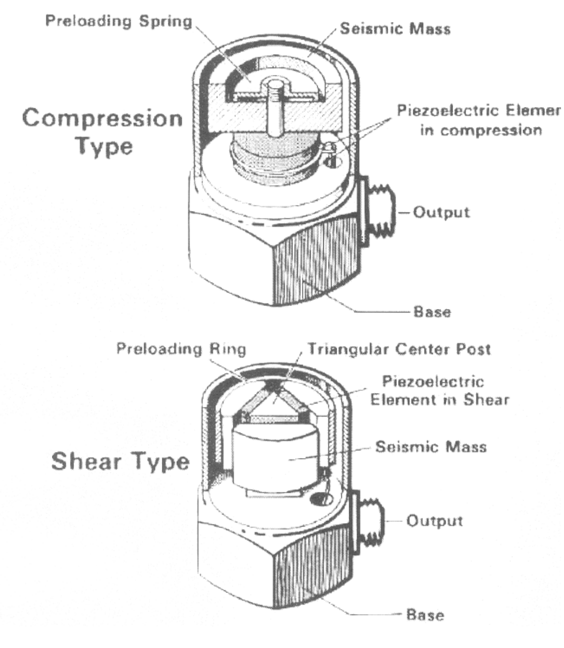
Un artifizio spesso usato è quello di riempire di olio il contenitore cilindrico, per cui, pur trascurando l'effetto di frenamento viscoso, si può facilmente dimostrare che, detta *m* è la massa dell'olio nello spazio anulare tra la massa sismica e il recipiente, risulta

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M + \left(\frac{A_1}{A_2}\right)m}}$$

Nel caso duale di $\omega_i \ll \omega_0$ risulta che $\frac{|X_{0i}|}{|X_i|} \cong 0$ per cui

$$\ddot{x}_M(t) = \ddot{x}_i(t) - \ddot{x}_0(t) \cong \ddot{x}_i(t)$$

e la forza d'inerzia agente sulla massa *M* è praticamente dovuta al solo moto di trascinamento, per cui se riuscissimo a misurare la reazione della molla questa, a meno del guadagno, sarebbe pari all'accelerazione incognita del vincolo.



Ovviamente la necessità di non distorcere la misura porta che la condizione $\omega_i \ll \omega_0$ sia verificata per la massima frequenza presente nello sviluppo in serie del segnale incognito, ovvero ω_0 deve essere dell'ordine dei kHz. Dobbiamo avere, quindi, masse *M* e rigidezze *k* molto grandi.

Spesso come elemento elastico si usa una lastra di quarzo, materiale piezoelettrico che, se sollecitato lungo l'asse elettrico, produce sulle facce ortogonali all'asse delle cariche di segno opposto proporzionali alla forza applicata (circa 2 pC/N)
L'uso del quarzo limita la frequenza minima di misura (dell'ordine dell'Hz).
Riscrivendo l'equazione differenziale in coordinate assolute

$$M\ddot{x}_{Mi} + r\dot{x}_{Mi} + kx_{Mi} = kx_i + r\dot{x}_i = (k + j\omega_i r)|X_i|e^{j(\omega_i t - \psi_i)}$$

con $j = \sqrt{-1}$

otteniamo l'integrale particolare

$$x_{Mi}(t) = X_{Mi}e^{j\omega_i t}$$

con

$$X_{Mi}=\frac{(k+j\omega_i r)\left|X_i\right|e^{-j\psi_i}}{(k-M\omega_i^2)+j\omega_i r}=\left|X_{Mi}\right|e^{j\beta_i}$$

ovvero

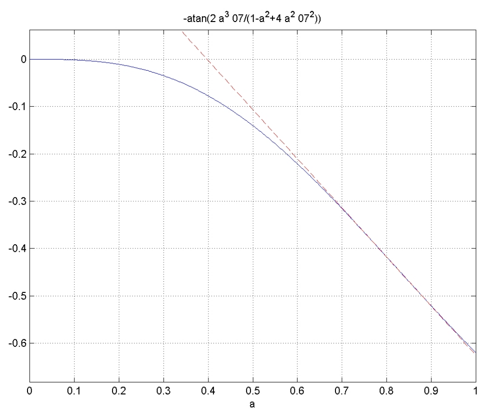
$$\left|X_{Mi}\right|=\frac{\sqrt{k^2+\left(\omega_i r\right)^2}\left|X_i\right|}{\sqrt{(k-M\omega_i^2)^2+\left(\omega_i r\right)^2}}\Rightarrow\frac{\left|X_{Mi}\right|}{\left|X_i\right|}=\left|H_i\right|=\frac{\sqrt{k^2+\left(\omega_i r\right)^2}}{\sqrt{(k-M\omega_i^2)^2+\left(\omega_i r\right)^2}}$$

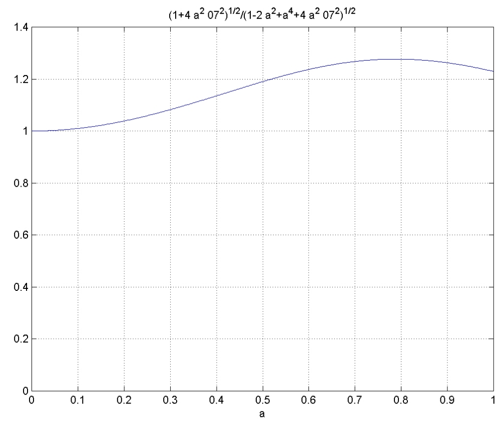
$$\beta_i=\tan^{-1}\frac{-\omega_i r\left(2k-M\omega_i^2\right)}{-k^2+kM\omega_i^2+\left(\omega_i r\right)^2}$$

Utilizzando, a esempio, un fattore di smorzamento $\xi = 0,7$ si nota che la fase varia, per un range di frequenza compreso tra $0,6\ \omega_0$ e ω_0, con legge pari a $\beta_i\propto\frac{\omega_i}{\omega_0}=\frac{i\omega_1}{\omega_0}$ e quindi

$$x_{Mi}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{N/2}\left|H_i\right|\left|X_i\right|\sin\left(\omega_i t+\beta_i\right)=\sum_{i=1}^{N/2}\left|H_i\right|\left|X_i\right|\sin\left(i\omega_1 t+ki\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)$$

$$x_{Mi}\left(t\right)=\sum_{i=1}^{N/2}\left|H_i\right|\left|X_i\right|\sin\left(i\omega_1\left(t+\frac{k}{\omega_0}\right)\right)=\sum_{i=1}^{N/2}\left|H_i\right|\left|X_i\right|\sin\left(i\omega_1 t'\right)$$

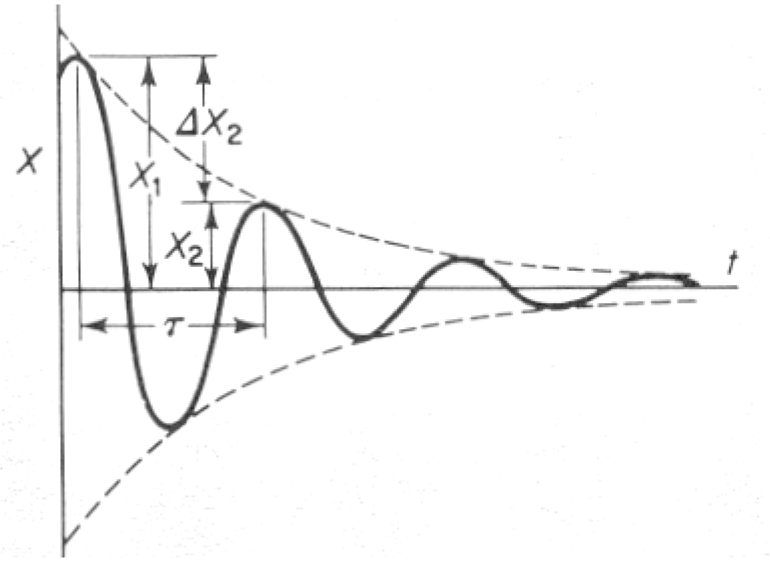




Identificazione dello smorzamento

Nell'ipotesi di avere uno smorzamento di tipo viscoso, sappiamo che la risposta del moto libero ha una legge del tipo

$$x(t) = \left|X\right| e^{-\xi\omega_0 t}\left(\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \phi\right)\right).$$

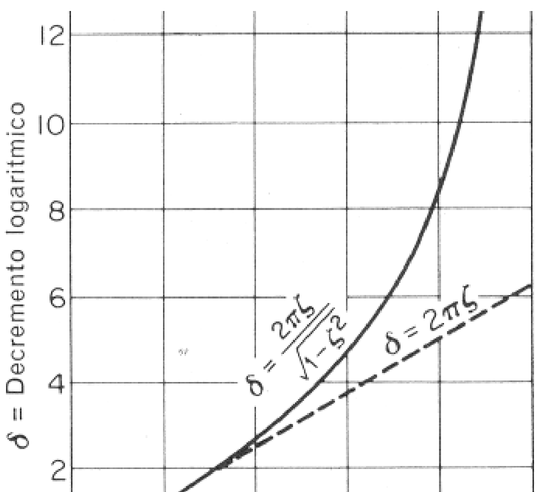


Quando $\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \phi\right) = 1$, la risposta è tangente all'inviluppo esponenziale $\left|X\right| e^{-\xi\omega_0 t}$, tuttavia le tangenti non sono orizzontali e i punti di tangenza sono leggermente spostati a destra del punto di massima ampiezza. Generalmente questo fatto è trascurabile e l'ampiezza del punto di tangenza può essere considerata coincidente con l'ampiezza massima.

Con riferimento alla simbologia indicata in figura, avremo che il decremento logaritmico

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2} = \ln\frac{\left|X\right| e^{-\xi\omega_0 t}}{\left|X\right| e^{-\xi\omega_0 (t+T)}} = \xi\omega_0 T$$

Dal momento che $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ avremo, anche, che



$$\delta = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 2\pi\xi \text{ per } \xi < 0{,}3$$

D'altronde ricordando che per una forzante armonica del tipo $F(t) = F_0 \sin \omega t$ il lavoro introdotto in un periodo in un sistema meccanico è pari a

$$L = \int_0^T F dx$$

e supponendo il sistema a regime con legge del moto pari a

$$x(t) = |X| \sin(\omega t - \phi)$$

ne deriva quindi che

$$dx = \frac{dx}{dt} dt \Rightarrow dx = |X| \omega \cos(\omega t - \phi) dt$$

e quindi

$$L = \omega F_0 |X| \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin \omega t \cos(\omega t - \phi) dt = \pi F_0 |X| \sin \phi$$

Nell'ipotesi di smorzamento viscoso, il lavoro dissipato a regime, in assenza di assenza di altre forze agenti sul sistema meccanico in prova, sarà

$$L_D = \int_0^T -r\dot{x} dx = -r|X|^2 \omega^2 \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2(\omega t - \phi) dt = -r|X|^2 \omega^{\cancel{2}} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\omega}} = -r|X|^2 \omega\pi$$

da cui

$$L + L_D = \pi F_0 |X| \sin \phi - r|X|^2 \omega\pi = 0 \Rightarrow r = \frac{F_0 \sin \phi}{|X| \omega}$$

Dalla misura dell'energia dissipata scopriamo che, a parità di ampiezza imposta, il lavoro dissipato varia proporzionalmente con la frequenza, mentre a parità di frequenza si modifica con il quadrato dell'ampiezza di vibrazione.

Molte esperienze di laboratorio hanno dimostrato che se il fenomeno dissipativo è legato a fenomeni d'isteresi l'energia dissipata per ciclo è indipendente dalla frequenza di vibrazione, ma dipende solamente dal quadrato dell'ampiezza di deformazione e quindi di vibrazione, e quindi

$$L_D \propto -|X|^2 = -\alpha |X|^2$$

ovvero

$$L_D = -r_{eq} |X|^2 \omega\pi = -\alpha |X|^2 \Rightarrow r_{eq} = \frac{\alpha}{\omega\pi} = \frac{\beta}{\omega}$$

per cui l'equazione differenziale, la cui soluzione descrive il moto del sistema, diventa

$$m\ddot{x} + \frac{\alpha}{\pi\omega}\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

il cui integrale particolare ha un’ampiezza

$$|X| = \frac{F_0}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2}}$$

che in risonanza vale

$$|X| = \frac{F_0\pi}{\alpha}$$

Ricordando che per un sistema smorzato in modo viscoso la risposta nel moto libero vale

$$x(t) = Xe^{-\xi\omega_0 t}e^{j\omega_D t}$$

$$X\left(\omega_D\right) = F\left[x(t)\right]_{\omega=\omega_D} = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x(t)e^{-j\omega_D t}dt = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} Xe^{-\xi\omega_0 t}e^{j\omega_D t}e^{-j\omega_D t}dt = \frac{1}{T}X\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-\xi\omega_0 t}dt$$

Si definisce trasformata di Hilbert nel dominio del tempo

$$\tilde{x}(t) = H\left[x(t)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)\frac{1}{t-u}du$$

Nel domino delle frequenze, la trasformata di Fourier ci dice che

$$X(f) = F\left[x(t)\right]$$
$$\tilde{X}(f) = F\left[\tilde{x}(t)\right]$$

Si può dimostrare che

$$\tilde{X}(f) = X(f) \cdot (-) j \operatorname{sgn}(f) = F\left[x(t)\right] \cdot (-) j \operatorname{sgn}(f)$$

dove

$$(-) j \operatorname{sgn}(f) = F\left[\frac{1}{\pi t}\right]$$

quindi

$$\tilde{x}(t) = F^{-1}\left[\tilde{X}(f)\right] = F^{-1}\left[X(f) \cdot (-) j \operatorname{sgn}(f)\right] = F^{-1}\left[F\left[x(t)\right] \cdot (-) j \operatorname{sgn}(f)\right]$$

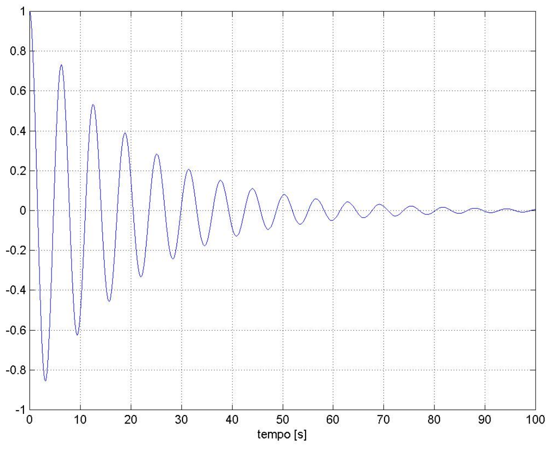
Definiamo come *segnale analitico* la funzione

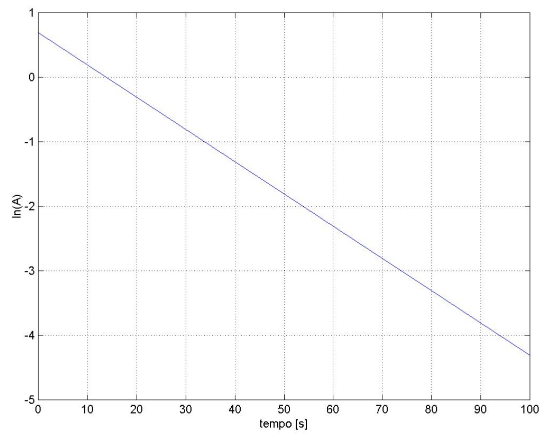
$$\hat{x}(t) = x(t) + j\tilde{x}(t) = A(t)e^{j\phi(t)}$$

e si può dimostrare che $A(t)$, detto *envelope function*, null'altro è che

$$A(t) = \left|X\right| e^{-\xi\omega_0 t} \Rightarrow \ln\left(A(t)\right) = \ln\left|X\right| - \xi\omega_0 t$$

ovvero una retta con intercetta sull'asse delle ordinate pari a $\ln\left|X\right|$, dipendente quindi dalle condizioni iniziali, ma il cui coefficiente angolare è sempre $\xi\omega_0$.
Esempio per $\xi = 0{,}05$ e $\omega_0 = 1\ rad/s$





Il coefficiente angolare della retta vale 0,05.