VIBRAZIONI FORZATE CON ECCITAZIONE ARMONICA

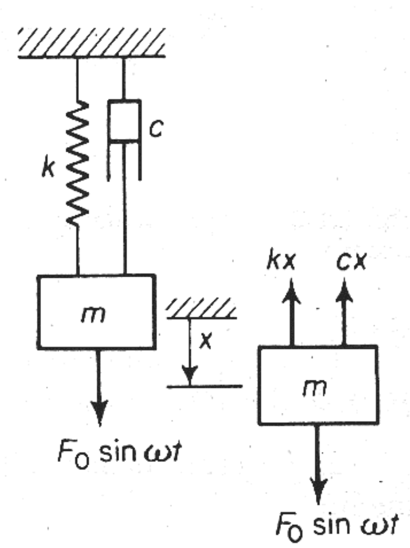
Abbiamo già dimostrato che la soluzione a regime per un'eccitazione di tipo armonico ha una validità del tutto generale in quanto:

- un'eccitazione periodica è scomponibile, sotto ipotesi largamente accettabili e verificate nella pratica, in una serie di eccitazioni armoniche (serie di Fourier);
- i sistemi meccanici di cui ci occupiamo sono descritti da equazioni differenziali lineari e quindi vale il principio di sovrapposizione degli effetti;

Quindi, la risposta del sistema meccanico è fornita dalla sovrapposizione delle risposte alle singole componenti armoniche in cui è sviluppabile la generica eccitazione periodica.

Inoltre, tali risposte, in condizioni di regime, sono date dai soli integrali particolari in quanto gli integrali generali delle omogenee associate, per effetto delle inevitabili dissipazioni, tendono comunque a zero in un tempo più o meno lungo.

Soluzione a regime con smorzamento viscoso



L'equazione differenziale del moto può essere scritta come

$$-m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = -F_0 \sin \omega t = -F_0 e^{i\omega t}$$

la cui soluzione è data da

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

Tralasciamo, per quanto più volte detto, il contributo dell'integrale generale dell'omogenea associata e quindi a regime

$$x(t) \cong x_p(t)$$

con

$$x_p(t) = Xe^{i\omega t} = |X| e^{-i\phi} e^{i\omega t} = |X| e^{i(\omega t - \phi)} = |X| \sin(\omega t - \phi)$$

con X e ϕ calcolati sostituendo nell'equazione differenziale l'integrale particolare.

Sostituendo $x_p\left(t\right)=Xe^{i\omega t}$ nell'equazione differenziale di partenza

$$-m\ddot{x}-r\dot{x}-kx=-F_0e^{i\omega t}$$

otteniamo

$$(-m\omega^2+ir\omega+k)Xe^{i\omega t}=-F_0e^{i\omega t}$$

che ammette come soluzione valida per tutti i valori di t

$$X=\frac{-F_0}{\left(k-m\omega^2\right)+ir\omega}=\frac{F_0}{\sqrt{\left(k-m\omega^2\right)^2+\left(r\omega\right)^2}}e^{i\left(\phi-\pi\right)}$$

con

$$\phi=\tan^{-1}\frac{\omega r}{k-m\omega^2}$$

Ricordando che:

- $\omega_0=\sqrt{k/m}$ frequenza propria del sistema equivalente non smorzato
- $\xi=r/r_c$ fattore di smorzamento
- $r_c=2m\omega_0$ smorzamento critico
- $X_0=F_0/k$ freccia del sistema per effetto della forzante F_0 a frequenza nulla

otteniamo

$$\frac{\left|X\right|}{X_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

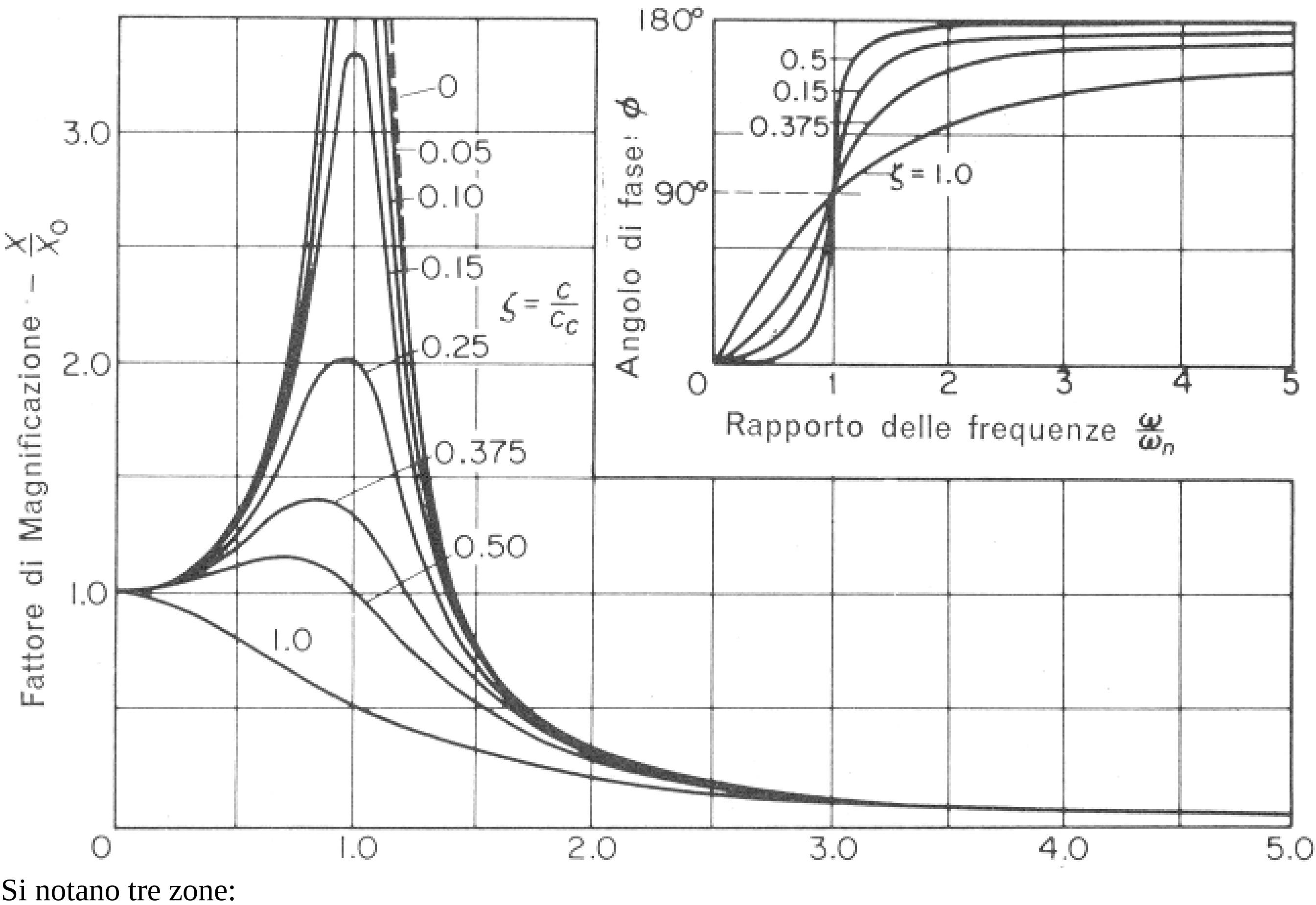
e

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\frac{|X|}{X_0}=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Possiamo rappresentare graficamente l'andamento dell'integrale particolare in funzione del rapporto $\frac{\omega}{\omega_0}$ (N.B. nel disegno $\frac{\omega}{\omega_n}$ e $c=r$)

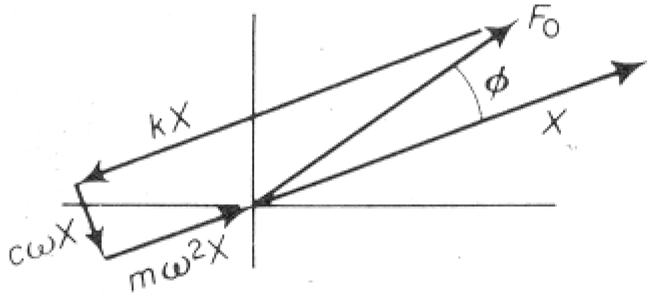


Si notano tre zone:

per $\frac{\omega}{\omega_0}<1$; per $\frac{\omega}{\omega_0}=1$ e per $\frac{\omega}{\omega_0}>1$

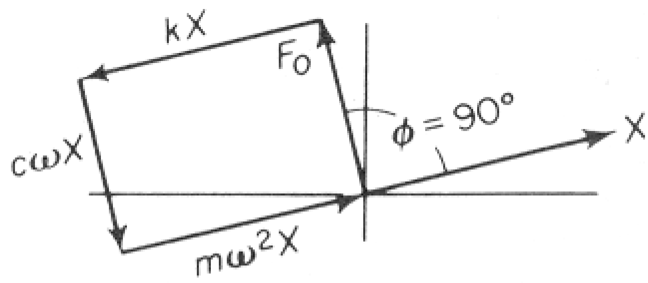
Effettuiamo un'analisi qualitativa del comportamento del sistema studiando il diagramma vettoriale delle forze agenti sulla massa.

$\dfrac{\omega}{\omega_0} < 1$



L'angolo di fase è piccolo e quindi è la forza della molla a equilibrare la forzante esterna cui si somma la forza d'inerzia

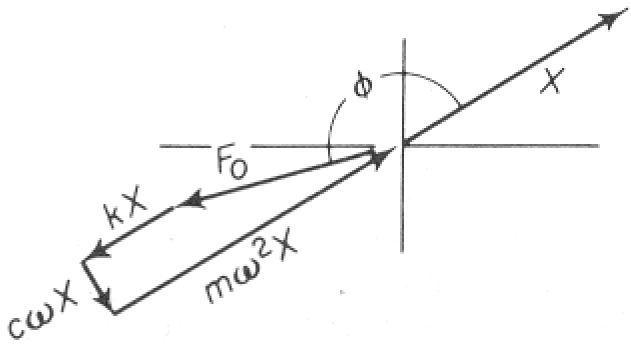
$\dfrac{\omega}{\omega_0} = 1$



L'angolo di fase è pari a 90° per cui la forzante esterna è equilibrata dalla forza viscosa. L'ampiezza di vibrazione a regime è pari a

$$|X| = \frac{F_0}{r\omega_0} = \frac{X_0}{2\xi}$$

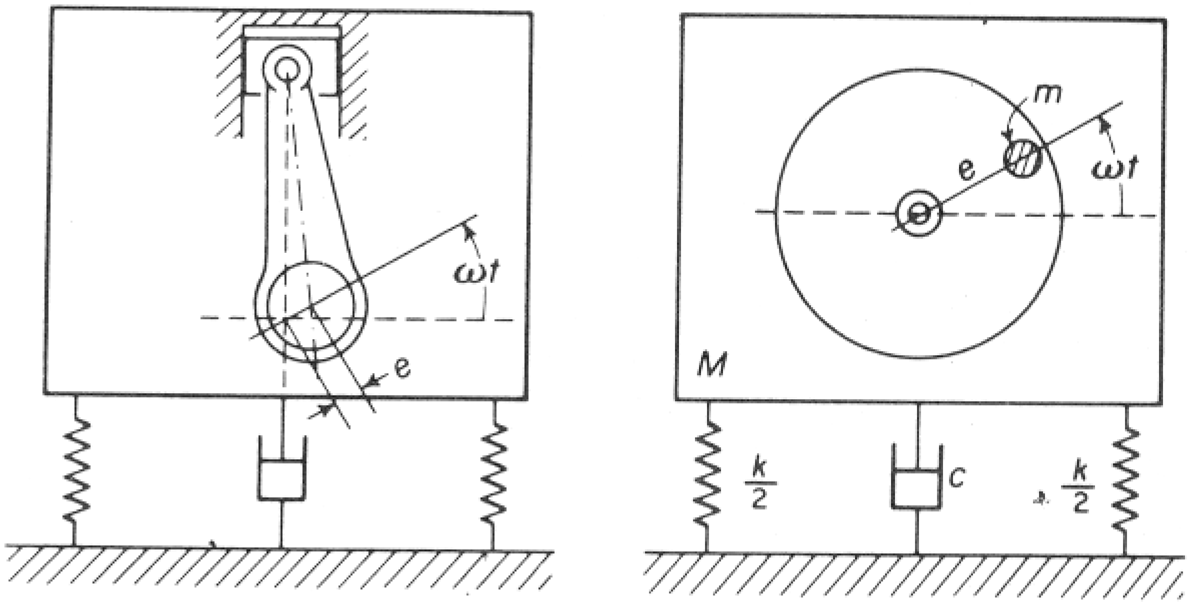
$\dfrac{\omega}{\omega_0} > 1$



L'angolo di fase si avvicina a 180° e la forza impressa è equilibrata quasi integralmente da quella d'inerzia

Isolamento delle vibrazioni

Come abbiamo visto, la forzante armonica impressa al nostro oscillatore potrebbe essere dovuta a un macchinario ruotante con velocità angolare ω posto sulla massa di fondazione.



La forza trasmessa al terreno al generico tempo *t*, sarà

$$F_{tr}(t) = kx + r\dot{x} = kXe^{i\omega t} + ir\omega Xe^{i\omega t} = X\left(k + ir\omega\right)e^{i\omega t} = F_{tr}e^{i\omega t}$$

dove

$$\left|F_{tr}\right| = \frac{F_0\sqrt{k^2 + \left(r\omega\right)^2}}{\sqrt{\left(k - m\omega^2\right)^2 + \left(r\omega\right)^2}}$$

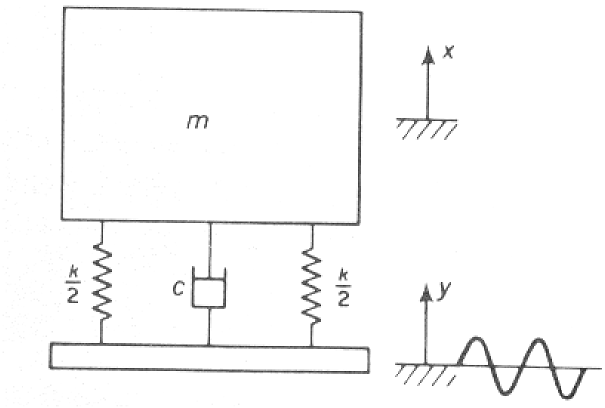
ovvero

$$\frac{\left|F_{tr}\right|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Come già visto questa forzante armonica applicata al terreno lo porterà a vibrare con un'ampiezza *b* ovvero con una legge del tipo

$$y(t) = b \sin \omega t$$

che forzerà le strutture circostanti



Per questa struttura l'equazione di equilibrio è

$$-m\ddot{x} - r(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y) = 0$$

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = r\dot{y} + ky = b(i\omega r + k)e^{i\omega t}$$

e il relativo integrale particolare

$$|X| = \frac{b\sqrt{k^2 + (r\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (r\omega)^2}}$$

ovvero

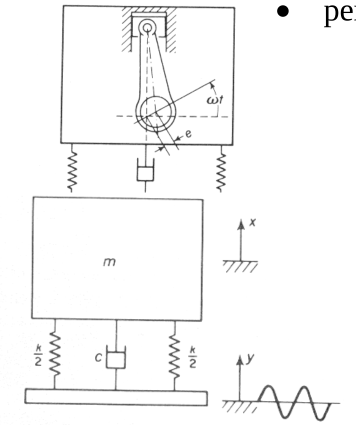
$$\frac{|X|}{b} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Si noti che pur essendo due fenomeni diversi, la soluzione è del tutto analoga a quella della forza trasmessa

$$\frac{|F_{tr}|}{F_0} = \frac{\sqrt{1 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

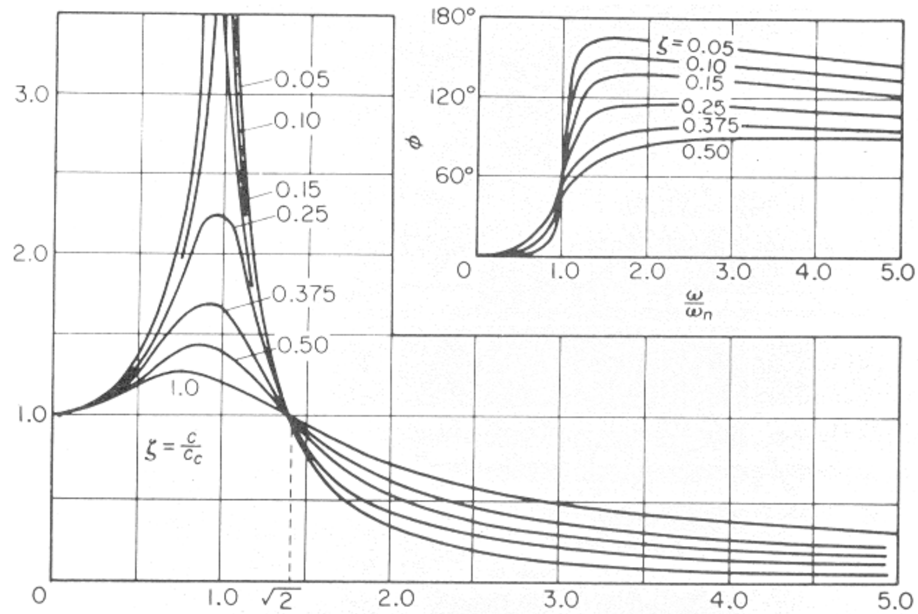
In entrambi i casi interessa che la soluzione sia $\ll 1$ tanto per la forza trasmessa al terreno quanto per la trasmissibilità $\beta = \dfrac{|X|}{b}$

I parametri di progetto sono:



- per la macchina eccitatrice *M*, ω e *me*
- per la struttura eccitata *m*, *b* e ovviamente ω che è uguale a quello della macchina sbilanciata.

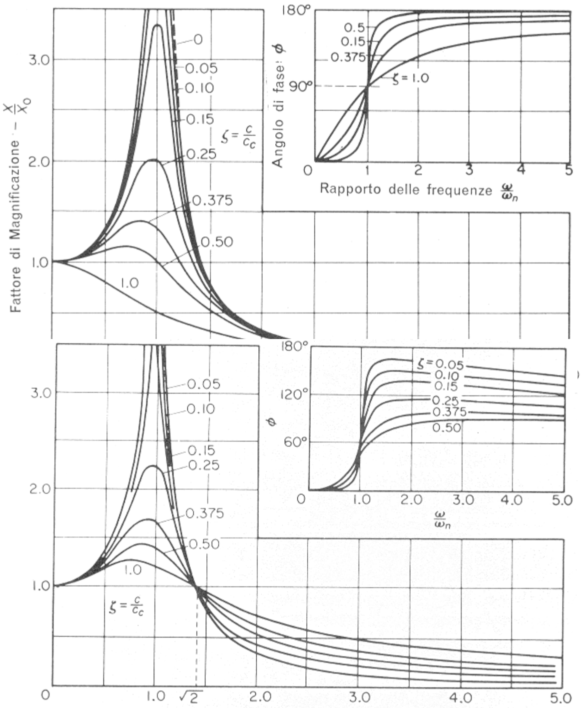
Diagrammiamo l'andamento di $\beta = \dfrac{|X|}{b}$ al variare di $\dfrac{\omega}{\omega_0}$. Si nota che per $\dfrac{\omega}{\omega_0} = \sqrt{2}$ la trasmissibilità è pari a 1 e che al crescere del rapporto tra le frequenze la trasmissibilità scende fino a tendere asintoticamente a zero per $\dfrac{\omega}{\omega_0} \to \infty$.



Questo fatto avviene indipendentemente dal valore dell'indice di smorzamento ξ il cui effetto è quello, al suo aumento, di ridurre l'ampiezza di vibrazione per $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 1$, ma d'altro lato rallenta la diminuzione di β per $\dfrac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$.

Riassumendo, converrebbe, quindi scegliere $\dfrac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2} \Rightarrow k < \dfrac{m\omega^2}{2}$ e nel contempo avere valori di ξ piccoli per non ricorrere a *k* troppo piccoli.

Poiché abbiamo scelto di far operare la fondazione con $\dfrac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}$, ciò significa che tutte le volte che avvieremo o fermeremo il macchinario, entrambe le nostre fondazioni, durante il transitorio, si troveranno a passare per $\dfrac{\omega}{\omega_0} = 1$ e quindi non conviene avere valori dell'indice di smorzamento trascurabili in quanto ciò porterebbe ad ampiezze in risonanza elevate che creerebbero problemi ai collegamenti verso l'esterno del macchinario.



In secondo luogo, operare con valori di ξ piccoli significa anche non poter più trascurare l'integrale generale dell'omogenea associata, parte della soluzione che torna a essere presente tutte le volte che avvengono delle perturbazioni, per quanto piccole, delle condizioni di regime.

I problemi maggiori vengono, tuttavia, creati da *k*.

Dal diagramma si vede, a esempio, che per ridurre del 60% le vibrazioni nelle strutture circostanti dobbiamo avere $\dfrac{\omega}{\omega_0} \geq 2$ ovvero

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \leq \frac{\omega}{2} \Rightarrow k \leq \frac{m\omega^2}{4}$$

Tale ragionamento porterebbe a scegliere $\omega_0 \rightarrow 0$, ma

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} \therefore \delta_{st} \propto \frac{1}{\omega_0^2}$$

ovvero dovremmo realizzare fondazioni con frecce statiche molto grandi, e tale problema è ovviamente di impossibile soluzione se abbiamo macchine lente in cui ω è dell'ordine di qualche centinaio di giri/1'.

La rigidezza k è esprimibile come

$$k = \frac{F}{\Delta h} = \frac{F}{h \bullet \varepsilon} = \frac{F \bullet E}{h \bullet \sigma} = \frac{F \bullet E \bullet A}{h \bullet F} = \frac{E \bullet A}{h}$$

quindi per ridurre k, scelto un materiale e quindi il modulo di elasticità E, dovremo avere delle aree A piccole e degli spessori h degli elementi elastici (a esempio un tappeto di gomma) grandi.
Ma

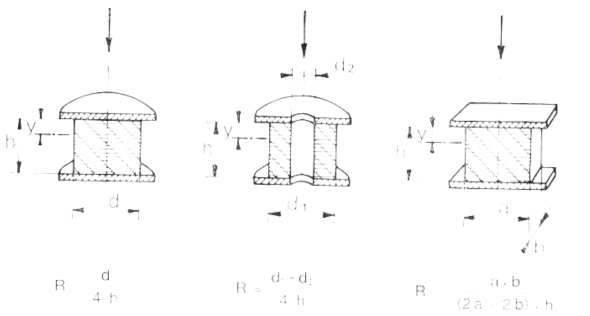
$$A > \frac{F}{\sigma_{am}} > \frac{mg}{\sigma_{am}} \therefore k > \frac{mg \bullet E}{\sigma_{am} \bullet h}$$

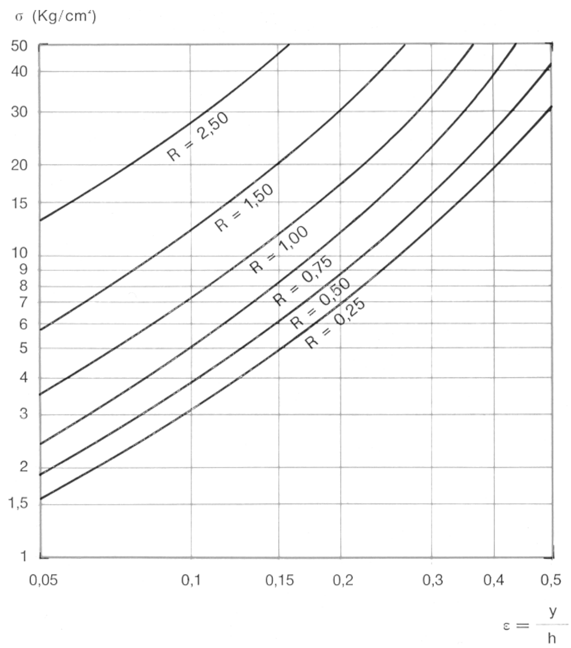
ovvero

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} > \frac{g \bullet E}{\sigma_{am} h}$$

da cui si nota come dovremmo avere bassi valori di E e corrispondentemente, impossibili nei materiali, alti valori σ_{am} e comunque alti valori di h, che creerebbe problemi d'instabilità.

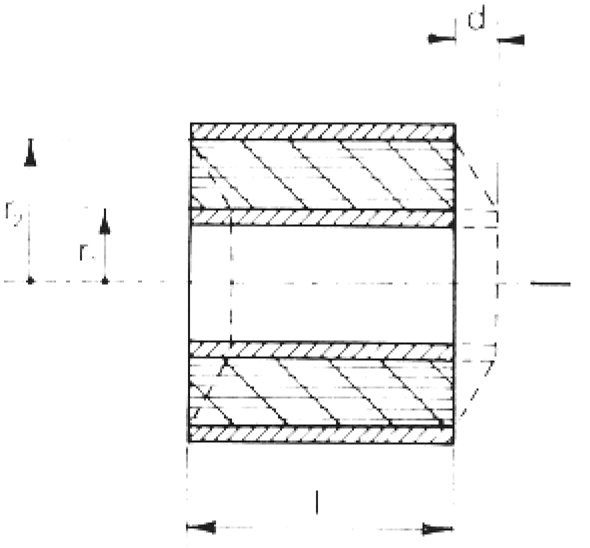
Per tasselli di gomma dura ($E = 100\ kg/cm^2$) sollecitati a compressione vale il seguente diagramma in funzione del fattore di forma R





Nell'abaco si parte dalla conoscenza di
$y = \delta_{st}$

Meglio si comporta la gomma a taglio dove



$$F = \frac{l \bullet G}{\left(\frac{1}{Q_1} + \frac{r_2^2}{l^2 Q_2} \right)} d = kd$$

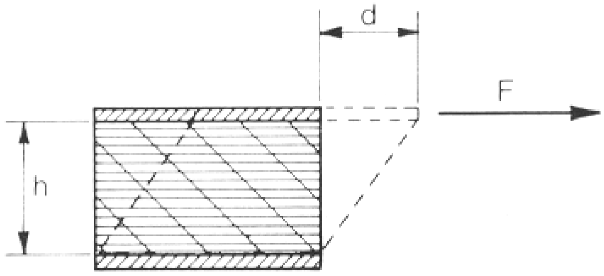
con $E \cong 3G$ e

r_2/r_1	1,2	1,5	2	3	4	5
$1/Q_1$	0,029	0,065	0,11	0,18	0,22	0,26
$1/Q_2$	0,0002	0,0018	0,0066	0,017	0,025	0,032

Ricordarsi infine che

$$F = \frac{A \bullet G}{h\left(1 + \frac{h^2}{36\rho^2} \right)} d = k_t d$$ con ρ = raggio giratore

della sezione intorno all'asse neutro della flessione



Risulta

$$k_t = \frac{A \bullet E}{3h\left(1 + \frac{h^2}{36\rho^2} \right)} < k_a = \frac{A \bullet E}{h}$$