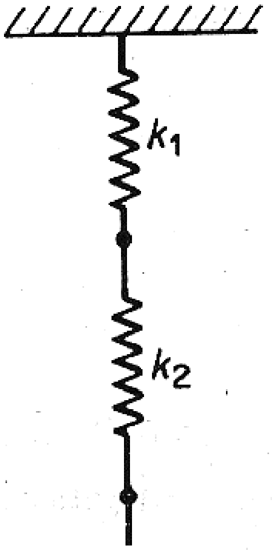
Rigidezza degli elementi elastici

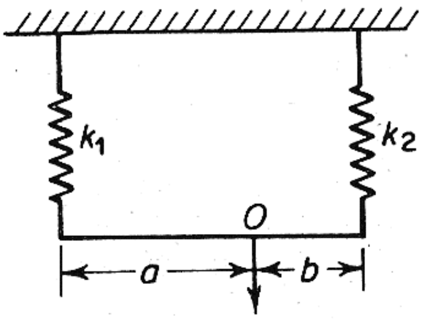


Applicando una forza unitaria all'estremo della molla inferiore, questa si allungherà relativamente ai suoi estremi indeformati di $\delta_2 = 1/k_2$, mentre la prima molla si allungherà di $\delta_1 = 1/k_1$, per cui per effetto di una forza unitaria l'estremo inferiore della molla si allungherà di $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 1/k_1 + 1/k_2$.
Ovvero

$$k_{eq}\delta = 1$$

da cui

$$k_{eq} = 1/\delta = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$



La forza unitaria applicata in *O* si divide così:

- $b/(a+b)$ applicata all'estremo della molla k_1 ;
- $a/(a+b)$ applicata all'estremo della molla k_2.

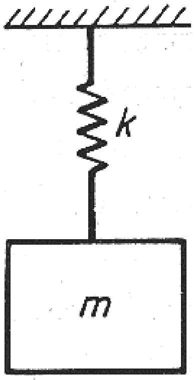
Per cui gli allungamenti di k_1 e k_2 sono

$\dfrac{b}{(a+b)k_1}$ e $\dfrac{a}{(a+b)k_2}$ e quello del punto *O*

$$\frac{b}{(a+b)k_1} + \frac{a}{a+b}\left[\frac{a}{(a+b)k_2} - \frac{b}{(a+b)k_1}\right] = \frac{1}{(a+b)^2}\left(\frac{a^2}{k_2} + \frac{b^2}{k_1}\right)$$

Quindi

$$k_0 = \frac{(a+b)^2}{\dfrac{a^2}{k_2} + \dfrac{b^2}{k_1}}$$



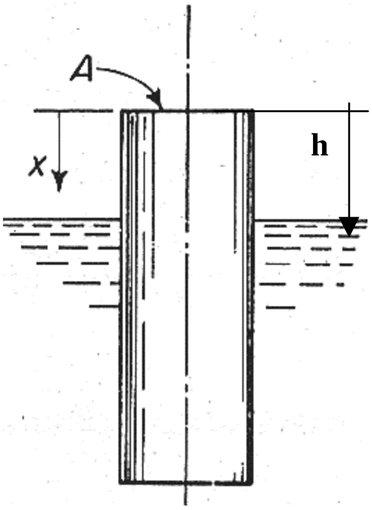
Se è nota la freccia statica δ_{st} della molla per effetto del peso della massa *m*, è opportuno ricordare che

$$k\delta_{st} = mg$$

ovvero

$$k/m = g/\delta_{st} = \omega_0^2$$

Supponiamo di avere un cilindro con una sezione di area A, lunghezza l e di massa m zavorrato in modo che possa traslare solo verticalmente. Immerso in un fluido di densità ρ, la sua faccia superiore si disporrà a un'altezza h dal pelo libero in modo tale che



$$mg = \rho gA(l-h)$$

ovvero detta ρ^* la densità del materiale di cui è composto il cilindro, risulta

$$\rho^* Alg = \rho gA(l-h)$$

che permette dal rilievo di h di misurare la densità incognità di un liquido (galleggiante idrometrico).

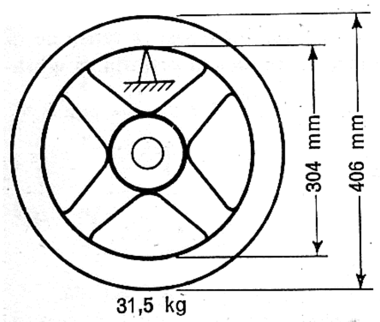
Se il galleggiante idrometrico iniziasse a vibrare verticalmente dalla posizione di equilibrio statico, per un abbassamento x della faccia superiore la spinta di Archimede verso l'alto s'incrementerebbe di

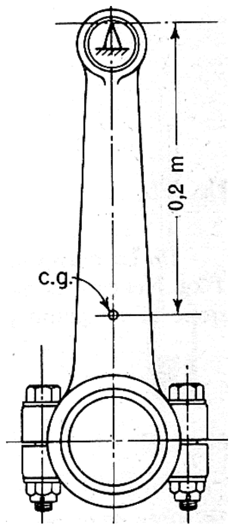
$$\Delta_{spinta} = \rho gAx$$

e quindi, trascurando l'effetto della viscosità, l'equazione di moto sarebbe la soluzione di

$$-m\ddot{x} - \rho gAx = 0$$

che potrebbe suggerire un altro metodo per calcolare la densità incognita ρ del fluido dalla misura diretta della frequenza propria del cilindro immerso.

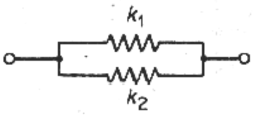




E' facile, poi, dimostrare che la misura della frequenza propria per piccole oscillazioni permette facilmente di calcolare il momento d'inerzia rispetto a qualsiasi punto di molti organi di macchine, quali bielle e volani.

Tabella della rigidezza delle molle

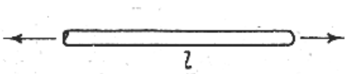
$$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2}$$



$$k = k_1 + k_2$$

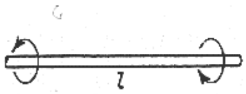
$$k = \frac{EI}{l}$$

I = momento di inerzia della sezione trasversale
l = lunghezza totale.



$$k = \frac{EA}{l}$$

A = area della sezione trasversale

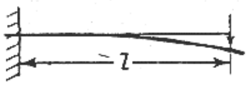


$$k = \frac{GJ}{l}$$

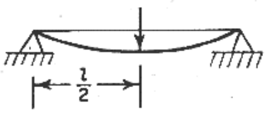
J = costante torsionale della sez.

$$k = \frac{Gd^4}{64nR^3}$$

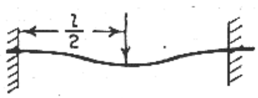
n = numero di spire



$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

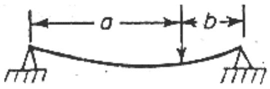


$$k = \frac{48EI}{l^3}$$



$$k = \frac{192EI}{l^3}$$

$$k = \frac{768EI}{7l^3}$$

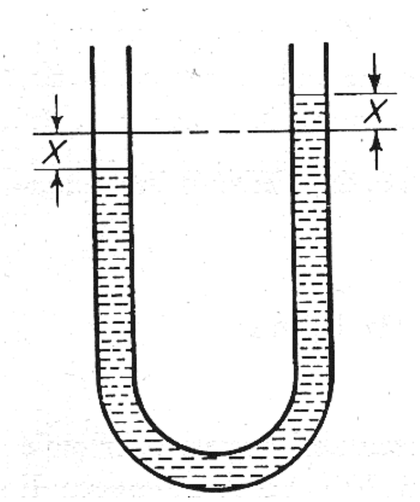


$$k = \frac{3EIl}{a^2b^2}$$

Metodi energetici

Spesso è conveniente, specie per sistemi meccanici complessi composti da più organi tra loro collegati, ricorrere a metodi energetici come l'equazione di Lagrange nella sua prima o seconda formulazione.

Se il sistema meccanico è conservativo, ovvero non vi è dissipazione di energia, la sua energia totale in vibrazione libera è in parte cinetica e in parte potenziale e quest'ultima è dovuta al lavoro di deformazione elastica o al lavoro eseguito in opposizione a un campo di forze, come per esempio a quello gravitazionale.



Assumendo che tutte le particelle di fluido abbiano in ogni istante la stessa velocità, l'energia cinetica del fluido in moto può essere scritta come

$$T = \frac{1}{2}\rho A l \dot{x}^2$$

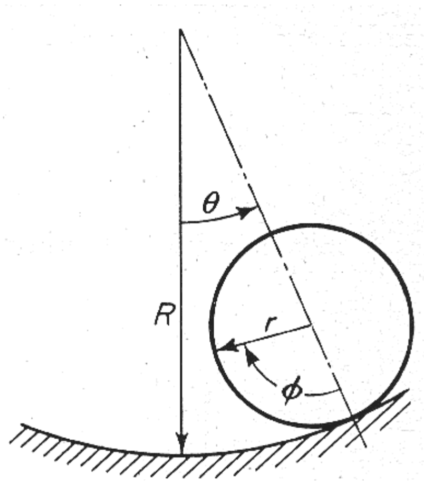
dove l = lunghezza della colonna di fluido, A = area della sezione trasversale di fluido, ρ = densità del fluido.

L'energia potenziale è invece uguale e opposta al lavoro fatto per sollevare di x il fluido

$$U = \rho g A x^2$$

ovvero, applicando Lagrange ($\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) - \frac{dT}{dx} + \frac{dU}{dx} = 0$)

$$\ddot{x} + (2g/l)\,x = 0$$



Se il cilindro omogeneo rotola senza strisciare, poiché

$$R\theta = r\varphi$$

l'energia cinetica può essere scritta come

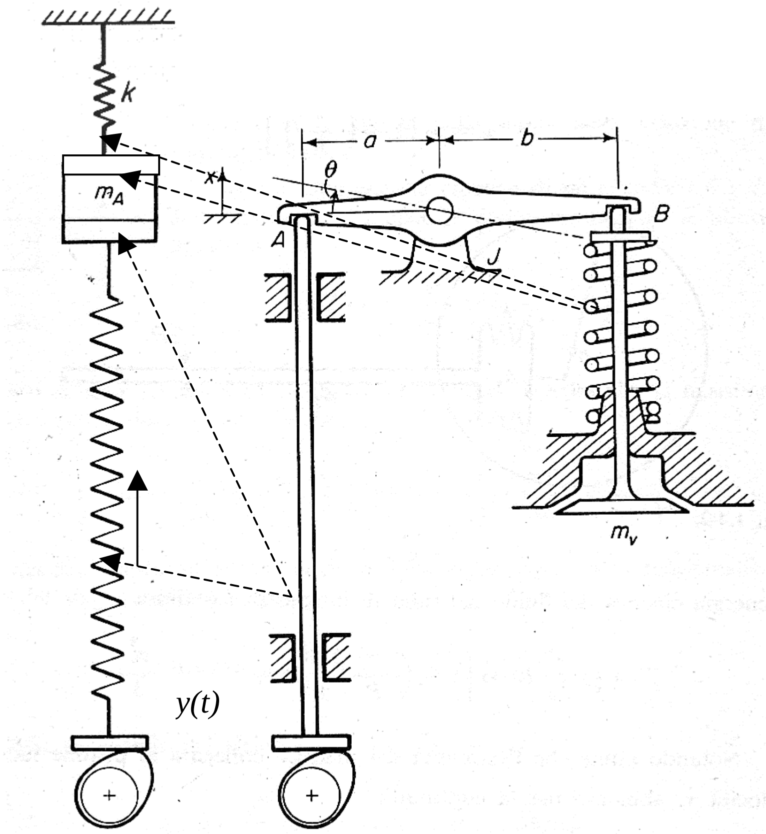
$$T = \frac{m}{2}\left[(R-r)\dot{\theta}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{R}{r}-1\right)^2\dot{\theta}^2 = \frac{3m}{4}(R-r)^2\dot{\theta}^2$$

e quella potenziale, riferita alla posizione di equilibrio statico *(θ = 0)*

$$U = mg\,(R-r)\,(1-\cos\theta)$$

Per cui otteniamo l'equazione differenziale non lineare

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right) - \frac{dT}{d\theta} + \frac{dU}{d\theta} = \frac{3m}{2}(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\sin\theta \cong \frac{3m}{2}(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$



Per il comando della distribuzione ad aste e bilancieri di un motore a C.I., dove non sono trascurabili né la massa dell'asta e della molla, né l'elasticità dell'asta, il sistema formato dalla valvola e dal bilanciere, considerati entrambi come infinitamente rigidi, può essere facilmente, come già visto, ricondotto alla sola massa traslante m_A

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_v\left(b\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{J + m_v b^2}{a^2}\right)\dot{x}^2$$

ovvero

$$m_a = \frac{J + m_v b^2}{a^2}$$

L'energia potenziale sarà data da quella dell'asta più quella della molla

$$U = \frac{1}{2}\frac{EA}{l}\left(x - y(t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{b}{a}x\right)^2$$

Se la massa della molla non fosse trascurabile, sappiamo che il suo estremo superiore ha una velocità $\frac{b}{a}\dot{x}$, mentre quello inferiore ha velocità nulla, per cui detta l la lunghezza della molla nella posizione di equilibrio statico, l'energia cinetica di un elementino di massa mdy posto a una distanza y dall'estremo fisso della molla è pari a

$$dT_{molla} = \frac{m}{2}dy\left(\frac{y}{l}\frac{b}{a}\dot{x}\right)^2$$

nell'ipotesi di moto a pulsazione molto inferiore alla frequenza propria della molla.
Per cui

$$T_{molla} = \frac{m}{2}\left(\frac{b\dot{x}}{la}\right)^2\int_0^l y^2 dy = \frac{1}{2}\frac{ml}{3}\left(\frac{b\dot{x}}{a}\right)^2$$

$$T_{molla} = \frac{m}{2}\left(\frac{b\dot{x}}{la}\right)^2\int_0^l y^2 dy = \frac{1}{2}\frac{ml}{3}\left(\frac{b\dot{x}}{a}\right)^2$$

ovvero un terzo della massa totale della molla (ml), nelle ipotesi fatte, incrementa l'energia cinetica

della valvola.
Risultato non dissimile si ottiene per l'asta.
Da qui si comprende, ricordando i risultati ottenuti nell'analisi del moto per spostamento di vincolo,

$$\frac{X}{Y} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

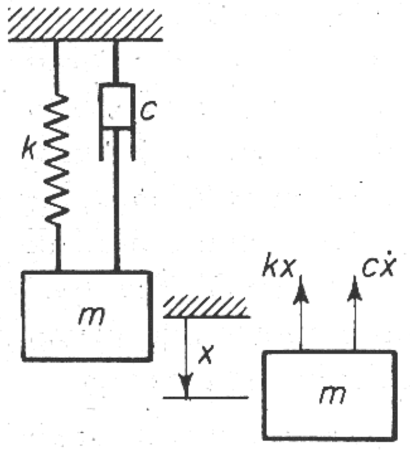
che la frequenza propria del treno di comando (asta + bilanciere + molla + valvola) deve avere una frequenza propria ω_0 la più alta possibile affinché il rapporto $\frac{X}{Y}$ (dove Y è l'ampiezza della generica componente armonica derivante dalla scomposizione secondo Fourier del moto del vincolo) si mantenga costante al variare della velocità angolare ω dell'albero a camme.
Da qui la drastica soluzione di azionare direttamente la valvola con l'albero a camme, eliminando l'asta e spesso il bilanciere, e l'uso delle leghe di titanio (peso specifico 4,87 g/cm^3) al posto di quelle d'acciaio (peso specifico 7,86 g/cm^3).

VIBRAZIONI LIBERE SMORZATE

Smorzamento viscoso

Durante la vibrazione libera, l'energia è dissipata in vari modi e un moto con ampiezza costante non può essere mantenuto senza che venga continuamente fornita energia.
È difficile una formulazione esatta del fenomeno dissipativo, in quanto questo può essere funzione dello spostamento, della velocità, dello stato di deformazione o di altro.

Un modello ideale, spesso soddisfacente, è quello dello smorzamento viscoso secondo il quale la forza dissipativa è espressa da



$$F = -r\dot{x} = -c\dot{x}$$

Dove r è utilizzato nella bibliografia italiana, mentre c in quella di lingua anglo-sassone.

L'equazione di equilibrio dinamico del nostro solito oscillatore diverrà quindi

$$-m\ddot{x} - r\dot{x} - kx = 0$$

che può essere risolta usando la solita forma

$$x\ (t) = Ae^{\lambda t}$$

che sostituita nell'equazione differenziale di partenza porta all'equazione lineare

$$\left(\lambda^2 + \frac{r}{m}\lambda + \frac{k}{m}\right)Ae^{\lambda t} = 0$$

che ammette come soluzioni non banali (per $A \neq 0$ e valide per qualsiasi valore di *t*)

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

e la soluzione generale per la vibrazione libera smorzata è data da

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

dove *A* e *B* sono costanti arbitrarie dipendenti dalle condizioni iniziali.

$$\lambda_{1,2} = -\frac{r}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

Smorzamento critico

Il comportamento dell'oscillatore smorzato dipende dal valore numerico del radicando

$$\left(\frac{r}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}$$

Come parametro di riferimento utilizzeremo lo smorzamento critico r_c, ovvero quel valore di r che riduce il radicando a zero.

$$\frac{r_c}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

Lo smorzamento reale del sistema r può essere espresso in forma adimensionale, in funzione dello smorzamento critico r_c, dal rapporto

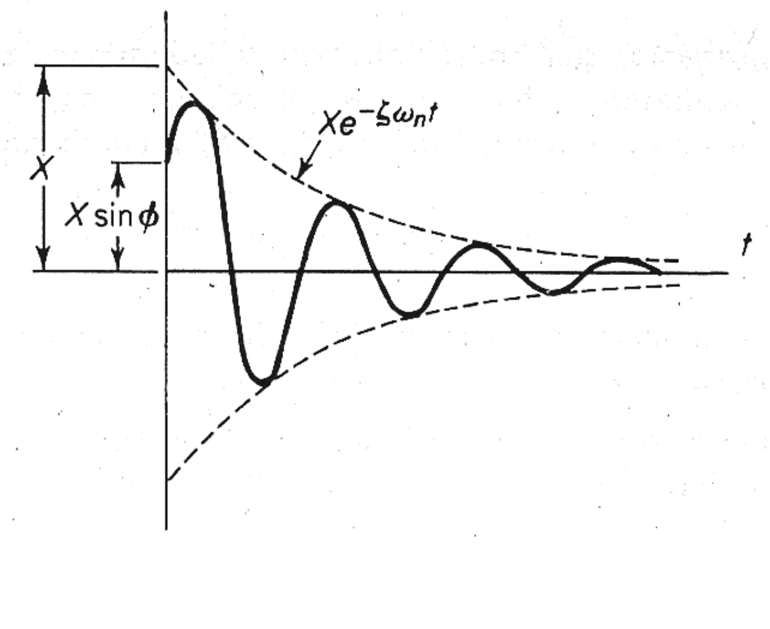
$$\zeta = r/r_c$$

detto anche indice di smorzamento. Ne consegue

$$\frac{r}{2m} = \xi \frac{r_c}{2m} = \xi\omega_0$$
$$\lambda_{1,2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right)\omega_0$$

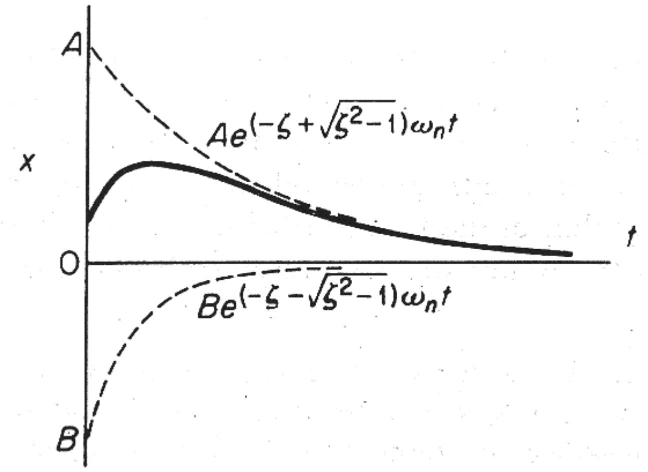
Smorzamento minore di quello critico $\zeta < 1,0$

La soluzione generale diventa



$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(Ae^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t} + Be^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t}\right) =$$
$$= Xe^{-\xi\omega_0 t}\left(\sin\left(\sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0 t + \phi\right)\right)$$

e il moto risulta periodico con pulsazione $\omega_d = \sqrt{1-\xi^2}\,\omega_0$ e ampiezza decrescente nel tempo con legge esponenziale.



Smorzamento maggiore di quello critico $\zeta > 1{,}0$

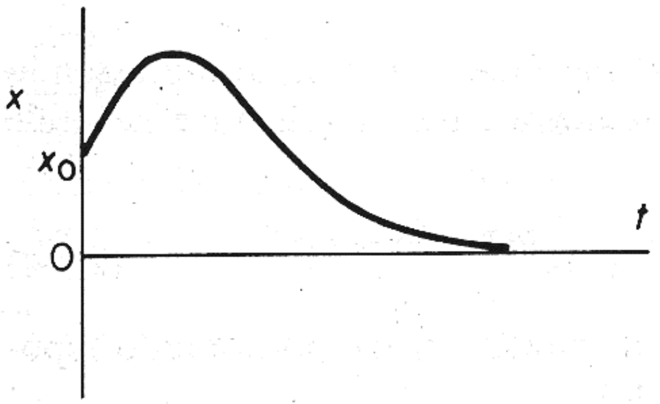
In questo caso le due radici sono reali ma opposte e la soluzione generale diventa

$$x(t) = Ae^{\left(-\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t} + Be^{\left(-\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_0 t}$$

Il moto non è più oscillatorio, ma si smorza col tempo in modo esponenziale.

Smorzamento uguale a quello critico $\zeta = 1{,}0$

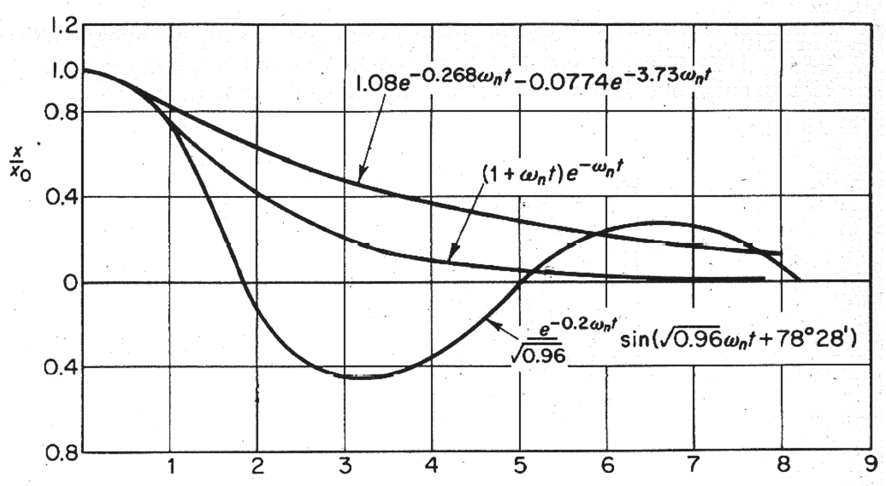
In quest’ultimo caso le due radici sono reali e coincidenti. In questo caso l’integrale generale assumerà la forma



$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}$$

Per cui il moto libero non è più oscillatorio ma si smorza anch’esso in modo esponenziale.

Confrontando per lo stesso oscillatore l’andamento del moto libero al variare dell’indice di smorzamento ζ per le medesime condizioni iniziali (*x(0) = x₀ e* $\dot{x}(0) = 0$) si nota che:



- indipendentemente dalle condizioni iniziali il moto libero si annulla sempre dopo un tempo più o meno lungo;
- a parità di condizioni iniziali, il tempo necessario per smorzarsi dipende da ζ;
- a parità di condizioni iniziali, per ζ *=1* il tempo è minimo (strumenti di misura, artiglierie, ecc.)