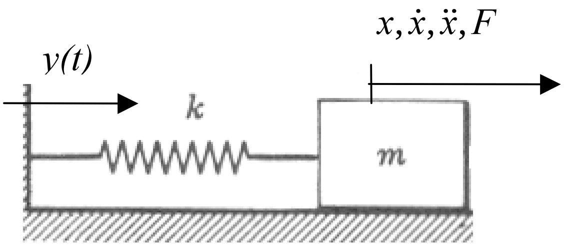
MOTI FORZATI PER SPOSTAMENTO DI VINCOLO

Consideriamo il solito sistema che si muova rispetto a un osservatore assoluto con una legge *y(t)* nota.



Definiamo *x(t)* lo spostamento assoluto della massa e misuriamo gli spostamento dalla posizione di equilibrio statico che sarà definita da

$$y(t) = x(t) = x_r(t) = 0$$

Scrivendo l'equazione di equilibrio dinamico, otteniamo

$$-m\ddot{x} - k(x - y(t)) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = ky(t)$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa del tutto simile a quella già vista nel moto forzato.

Per un osservatore relativo, l'equazione di equilibrio dinamico, diventa invece

$$-m\left(\ddot{x}_r + \ddot{y}(t)\right) - kx_r = 0 \Rightarrow m\ddot{x}_r + kx_r = -m\ddot{y}(t)$$

Supponiamo ora che il moto del vincolo sia armonico di ampiezza *b*

$$y(t) = b\sin\omega t$$

per cui

$$m\ddot{x} + kx = kb\sin\omega t$$

che ha come integrale particolare

$$x_p\left(t\right) = \frac{kb}{k - m\omega^2}\sin\omega t = X\sin\omega t$$

ove $X = \dfrac{kb}{k - m\omega^2}$ è l'ampiezza di vibrazione nel moto assoluto della massa *m*.
In termini adimensionali

$$\frac{X}{b} = \frac{1}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

del tutto analogo al coefficiente di amplificazione *H* già definito.
Quando una molla potrà essere definita "rigida", quando non vi è moto relativo e quindi

$$\frac{X}{b} \cong 1 \Rightarrow \omega_0^2 \gg \omega^2$$

Consideriamo ora l'osservatore relativo

$$m\ddot{x}_r + kx_r = -m\ddot{y}(t) = m\omega^2 b \sin \omega t$$

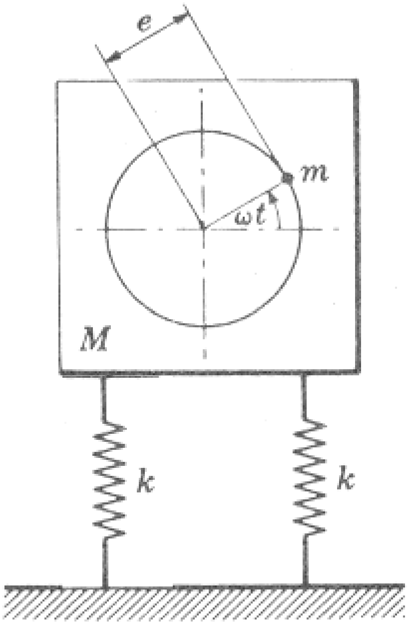
e quindi

$$x_{rp}(t) = \frac{m\omega^2 b}{k - m\omega^2} \sin \omega t = X_r \sin \omega t$$

e in termini adimensionali

$$\frac{X_r}{b} = \frac{\dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Moti forzati dovuti a squilibri rotanti



Supponiamo di avere una macchina con una parte rotante, avente massa propria M e uno squilibrio *me.*
Supponiamo che la velocità angolare ω sia costante.

L'accelerazione assoluta della massa eccentrica sarà

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_t = \left|\omega^2 e\right| e^{i\omega t} + \vec{\ddot{x}}$$

Avremo quindi, misurando gli spostamenti x, positivi verso l'alto, a partire dalla posizione di equilibrio statico,

$$-M\ddot{x} - m(-\omega^2 e \sin\omega t + \ddot{x}) - 2kx = 0 \Rightarrow \left(M + m\right)\ddot{x} + 2kx = me\omega^2$$

e l'integrale particolare, in condizioni di regime, varrà

$$x_p(t) = \frac{me\omega^2}{2k - \left(M+m\right)\omega^2}\sin\omega t = X\left(\omega\right)\sin\omega t$$

e quindi

$$\frac{X\left(\omega\right)}{e} = \frac{m}{(M+m)}\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{m}{(M+m)}\frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Si noti che la macchina al variare della velocità trasmetterà al terreno una forza variabile nel tempo pari a

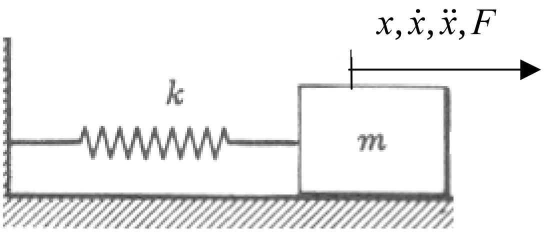
$$F_{tr} = 2kX\sin\omega t$$

che forzerà il terreno a vibrare, non potendolo considerare infinitamente rigido, e questo forzerà a sua volta a vibrare, per spostamento di vincolo, le altre strutture posate su di esso.
Ovviamente, equilibrando la macchina, ovvero facendo in modo che il suo asse di rotazione sia baricentrico (e anche principale d'inerzia come vedremo) la forzante si annulla e il fenomeno scompare in quanto l'equazione di moto risulta essere la soluzione di

$$\left(M+m\right)\ddot{x} + 2kx = 0$$

MOTI FORZATI DOVUTI A FORZANTI A GRADINO

Con riferimento al solito schema, vediamo quale sia la risposta dinamica del sistema a una forza *F(t)* del tipo



F(t)=0 $-\infty \leq t < 0$
F(t)=Q $t \geq 0$

L'equazione di moto diventerà allora per $t \geq 0$

$$m\ddot{x} + kx = Q$$

L'integrale generale dell'omogenea associata ha la forma

$$x_g(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

dove $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ mentre l'integrale particolare è del tipo

$$x_p(t) = D = \text{costante}$$

che sostituito porta a

$$x_p(t) = D = \frac{Q}{k} = \delta_{st}$$

ovvero

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \delta_s$$

dove A e B devono essere valutati sulla base delle condizioni iniziali. Supponendo

$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}$ si ricava $\begin{cases} A = -\delta_{st} \\ B = 0 \end{cases}$ da cui

$$x(t) = \delta_{st}(1 - \cos\omega_0 t)$$

ovvero un carico dinamico, applicato bruscamente, fornisce deformazioni molto maggiori, di uno applicato staticamente. Infatti

$$x_{\max} = 2\delta_s$$

SERIE DI FOURIER E TRASFORMATA DI FOURIER

Richiamiamo alcuni concetti della serie e della trasformata di Fourier.

Consideriamo una funzione periodica tale per cui

$$x(t) = x(t \pm kT) \text{ per } k=1,2,3,\ldots$$

Detta frequenza fondamentale f_1 quella che soddisfa la seguente equazione

$$f_1 = \frac{1}{T}$$

con poche eccezioni, tale funzione può essere espansa in serie di Fourier, ovvero

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t\right)$$

dove

$$f_k = kf_1 = \frac{k}{T} \qquad \text{per } k=1,2,3,\ldots$$

e i coefficienti a_k e b_k possono essere calcolati integrando sul periodo T

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\cos 2\pi f_k t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\sin 2\pi f_k t dt$$

mentre

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \mu_x$$

rappresenta il valor medio della funzione $x(t)$.

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t\right)$$

Tenendo conto che le due funzioni armoniche hanno il medesimo argomento, la serie di Fourier può anche essere espressa come

$$x(t) = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} X_k \cos\left(2\pi f_k t - \theta_k\right)$$

dove

$$X_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$X_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad \text{per } k=1,2,3,\ldots$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

Si può riscrivere l'espressione in forma polare

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i2\pi f_k t}$$

dove

$$A_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$A_k = \frac{1}{2}\left(a_k - ib_k\right) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t) e^{-i2\pi f_k t} dt \qquad \text{per } k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

Quest'ultima espressione è basata sulla relazione di Eulero

$$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

Anche se *x(t)*è reale, la funzione può essere sempre espressa in forma complessa usando componenti a frequenze positive e negative (ovvero controrotanti) il cui risultante è sempre reale. In particolare

$$A_k = \left|A_k\right| e^{-i\theta_k} \quad \text{per } k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

$$A_k = \left|A_k\right| e^{-i\theta_k} \quad \text{per } k=\pm1,\pm2,\pm3,\ldots$$

dove

$$\left|A_k\right| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{X_k}{2}$$

$$\theta_k = \tan^{-1}\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$$

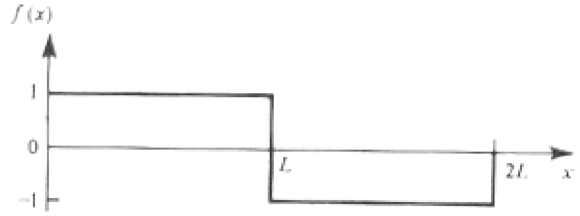
Essendo la funzione *x(t)* reale

$$\left|A_{-k}\right| = \left|A_k\right| \qquad \theta_{-k} = -\theta_k$$

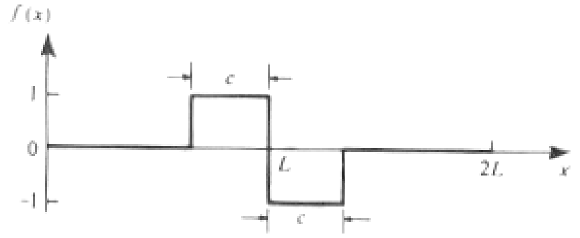
$$A_{-k} = \left|A_{-k}\right| e^{-i\theta_{-k}} = \left|A_k\right| e^{i\theta_k} = A_k^*$$

dove A_k^* è il complesso coniugato di A_k.

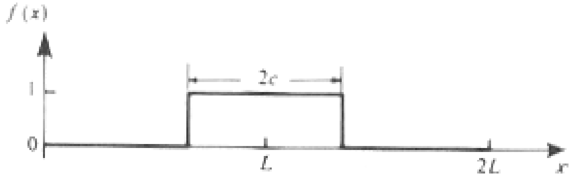
ESEMPI NOTEVOLI DI SERIE DI FOURIER



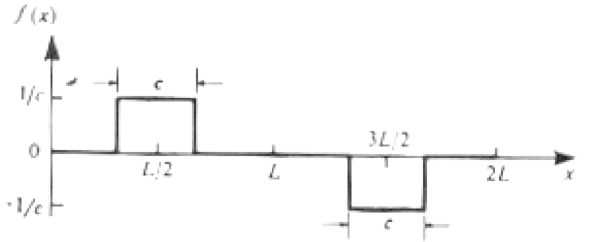
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



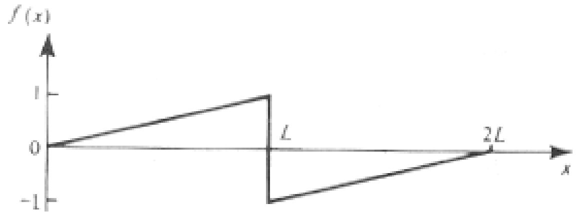
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\cos \frac{n\pi c}{L} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{L}$$



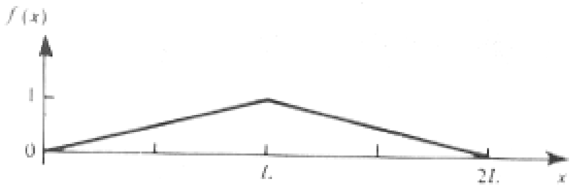
$$f(x) = \frac{c}{L} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi c}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}$$



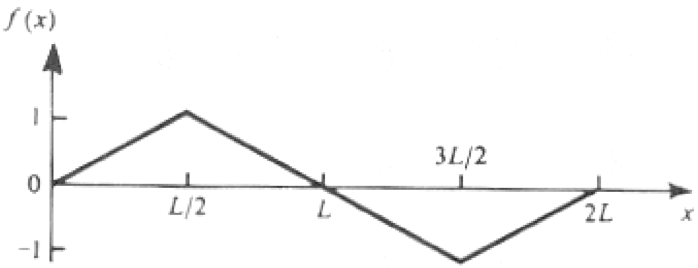
$$f(x) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \frac{\sin \frac{1}{2} n\pi c/L}{\frac{1}{2} n\pi c/L} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



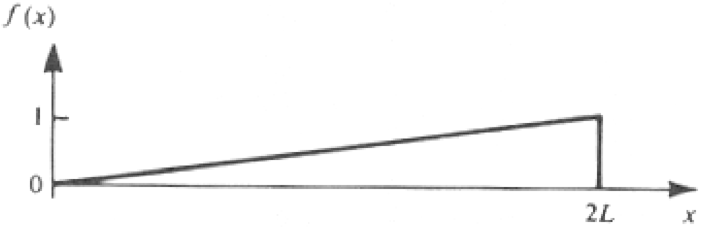
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



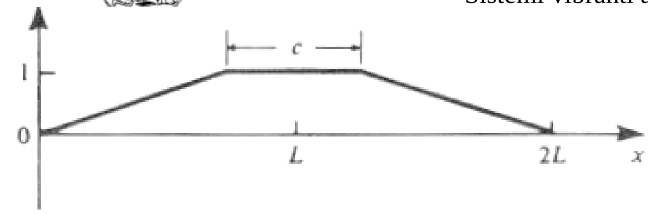
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{L}$$



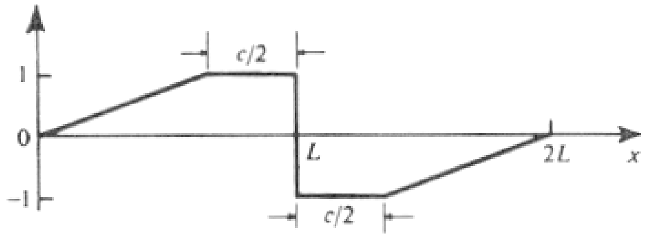
$$f(x) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



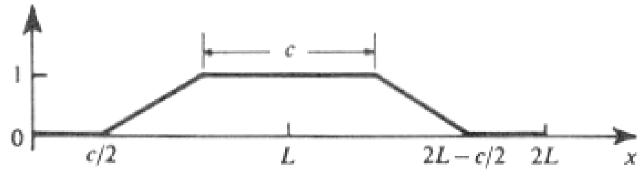
$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$



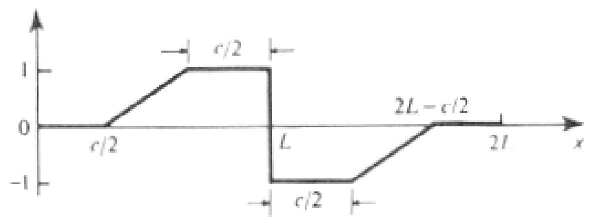
$$f(x) = \frac{1}{2}(1+a) + \frac{2}{\pi^2(1-a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n \cos n\pi a - 1\right] \cos\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



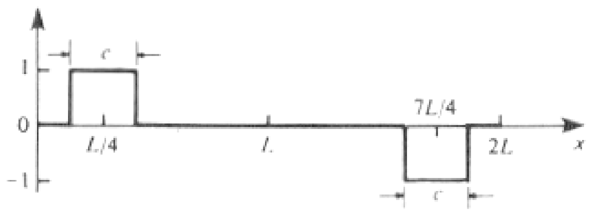
$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left[1 + \frac{\sin n\pi a}{n\pi(1-a)}\right] \sin\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



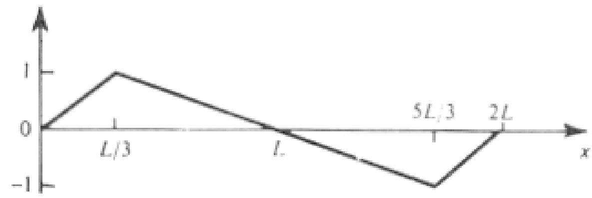
$$f(x) = f\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2(1-2a)} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{1}{n_2} \cos n\pi a \cos\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



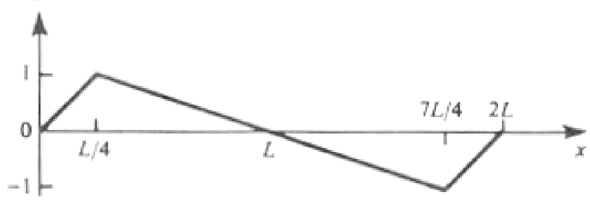
$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \;;\; \left[1 + \frac{1+(-1)^n}{n\pi(1-2a)} \sin n\pi a\right] \sin\frac{n\pi x}{L} \quad \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



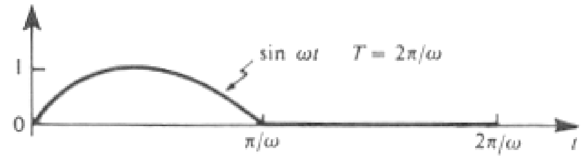
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{n\pi}{4} \sin n\pi a \sin\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



$$f(x) = \frac{9}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{3} \sin\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



$$f(x) = \frac{32}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi}{4} \sin\frac{n\pi x}{L} \;;\; \left(a = \frac{c}{2L}\right)$$



$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2,4,6,\ldots} \frac{1}{n^2-1} \cos n\omega t$$

TRASFORMATA DI FOURIER

Supponiamo ora che la funzione *x(t)* sia non periodica. La serie di Fourier può essere estesa considerando che il periodo $T \to \infty$. Questo porta all'integrale di Fourier

$$X\left(f\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i2\pi ft}dt \qquad -\infty < f < \infty$$

dove *X(f)* esiste se

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|dt < \infty$$

X(f) è chiamato la trasformata diretta (o spettro) di *x(t)*. Noto *X(f)*, la trasformata inversa di Fourier di *X(f)* fornisce *x(t)* tramite

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{i2\pi ft}df \qquad -\infty < t < \infty$$

Si noti che pur essendo *x(t)* reale *X(f)* è complesso

$$X(f) = X_r(f) + iX_i(f)$$

dove

$$X_r(f) = |X(f)|\cos\theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos 2\pi ftdt$$

$$X_i(f) = |X(f)|\sin\theta(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin 2\pi ftdt$$

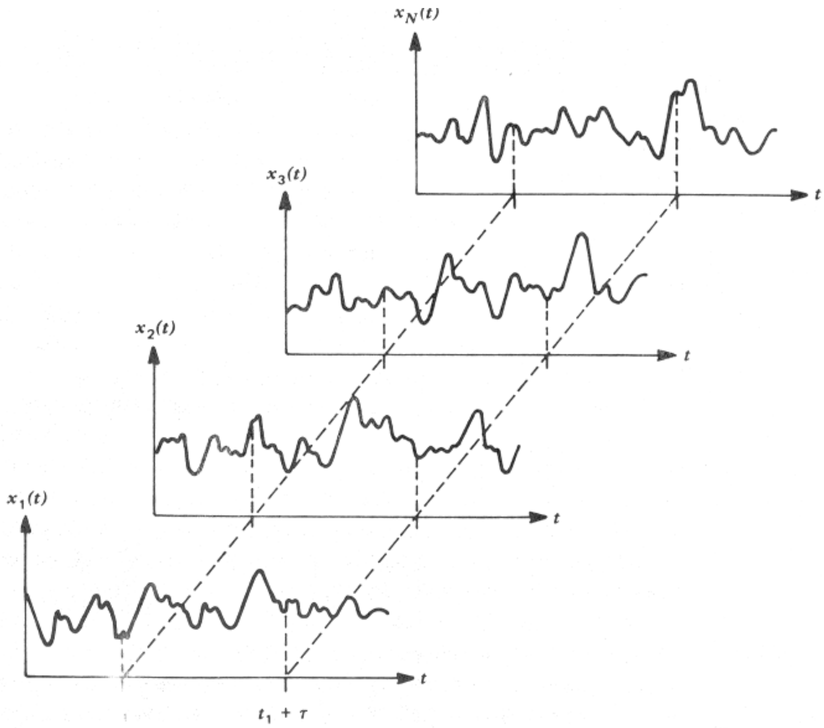
ovvero

$$X(f) = |X(f)|e^{-i\theta(f)}$$

dove $|X(f)|$ è l'ampiezza dello spettro e $\theta(f)$ è la fase dello spettro.

TRASFORMATA FINITA DI FOURIER

Da un punto di vista pratico non è possibile campionare una storia temporale di lunghezza infinita, ma invece campionerà *N* record temporali di pari lunghezza *T*.



Le proprietà statistiche dell'insieme dei dati possono essere facilmente calcolate a qualsiasi specifico istante t_1, mediando sull'insieme. Per esempio il valor medio e il valore quadratico medio all'istante t_1 sono dati da

$$\mu_x(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$

$$\psi_x^2(t_1) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i^2(t_1)$$

Inoltre si può anche calcolare il prodotto medio dei dati agli istanti t_1 e $t_1+\tau$, quantità chiamata autocorrelazione al ritardo τ,

$$R_{xx}(t_1,\tau) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1) x_i(t_1+\tau)$$

Nel caso speciale che tutte le proprietà statistiche e l'autocorrelazione siano costanti al variare di t_1, il fenomeno è detto stazionario.

Se in sovrappiù tali valori coincidono con quelli calcolati su un generico record

$$\mu_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t)dt$$

$$\psi_x^2 = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i^2(t)dt$$

$$R_{xx}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) x_i(t+\tau)dt$$

il fenomeno è detto ergodico ed è quindi possibile estrarre tutte le informazioni di nostro interesse da una generica storia limitata (finita) nel tempo da $0 < t < T$.

Supponendo il fenomeno stazionario, potremo stimare $X(f)$ dalla trasformata finita di Fourier

$$X_T(f) = X(f,T) = \int_0^T x(t)e^{-i2\pi ft}dt$$

Per quanto detto, si può dimostrare che alle frequenze finite $f_k = \frac{k}{T}$ risulta

$$X(f_k,T) = TA_k \qquad k=\pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

Ovvero se la storia temporale $x(t)$ è limitata tra $0 < t < T$ potremo calcolare lo spettro solo a un numero finito di frequenze ottenendo così una serie di Fourier con periodo fondamentale T.

Inoltre se $x(t)$ è campionato per un numero discreto N di punti intervallati di Δt, la lunghezza del record diventa $T=N\Delta t$ e questo automaticamente introduce il fatto che potremo calcolare tutte le frequenze discrete fino a $f_c=1/(2\Delta t)$, frequenza detta di Nyquist, e che i conti considerano i dati come priodici con periodo pari a $T=N\Delta t$ ovvero si introduce una frequenza fondamentale, che può essere arbitraria, $f_1=(1/T)$ e gli spettri sono calcolati frequenze discrete equispaziate di $\Delta f=f_1$.

Per cui, in pratica, il record continuo $x(t)$ è sostituito da una sequenza discreta di dati

$$\{x_n\} = \{x(n\Delta t)\} \quad \text{per } n=1,2,3,\ldots,N$$

e la trasformata continua di Fourier $X(f)$ è rimpiazzata dalla sequenza discreta di Fourier

$$\{X_k\} = \{X(k\Delta f)\} \text{ per } k=1,2,3,\ldots,N/2$$

dove

$$X_k = X(k\Delta f) = \Delta t \sum_{n=1}^{N} x_n e^{-i2\pi\frac{kn}{N}} \quad \text{per } k=1,2,3,\ldots,N/2$$

$$x_n = x(n\Delta t) = \Delta f \sum_{k=1}^{N} X_k e^{i2\pi\frac{kn}{N}} \quad \text{per } n=1,2,3,\ldots,N$$

dove i valori X_k per $k > N/2$ sono calcolabili da quelli per $k \leq N/2$ per la circolarità delle funzioni trigonometriche.

Per quanto detto se il nostro solito sistema a un grado di libertà è forzato da una forzante generica *F(t)* avremo che

$$F(t) \cong F_0 + \sum_{l=1}^{N/2} F_k \cos\left(2\pi l f_1 t - \theta_l\right)$$

e l'equazione di moto sarà rappresentata dalla soluzione dell'equazione differenziale lineare a cofficienti costanti

$$m\ddot{x} + kx = F_0 + \sum_{l=1}^{N/2} F_k \cos\left(2\pi l f_1 t - \theta_l\right)$$

ovvero, l'integrale particolare

$$x_p(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{l=1}^{N/2} \frac{F_l}{k - m(2\pi l f_1)^2} \cos\left(2\pi l f_1 t - \theta_l\right)$$