EFFETTI DELLA DEFORMABILITÀ DINAMICA (MECCANICA DELLE VIBRAZIONI)

Per le macchine viste finora, è quasi sempre possibile effettuare uno studio considerandole a un solo grado di libertà, dove ogni elemento è ritenuto rigido.

In realtà essi sono approssimati, pertanto i nostri schemi sono approssimati.

La deformabilità degli elementi componenti può essere voluta o indesiderata: a es. le sospensioni di un veicolo sono elementi volutamente deformabili. Purtroppo, per le difficoltà che insorgono nello studio e per gli effetti collaterali, sono ben più importanti i casi di deformabilità dinamica non voluta, quando un elemento che il progettista vorrebbe rigido si deforma, dando luogo di regola a moti vibratori indesiderati e dannosi.

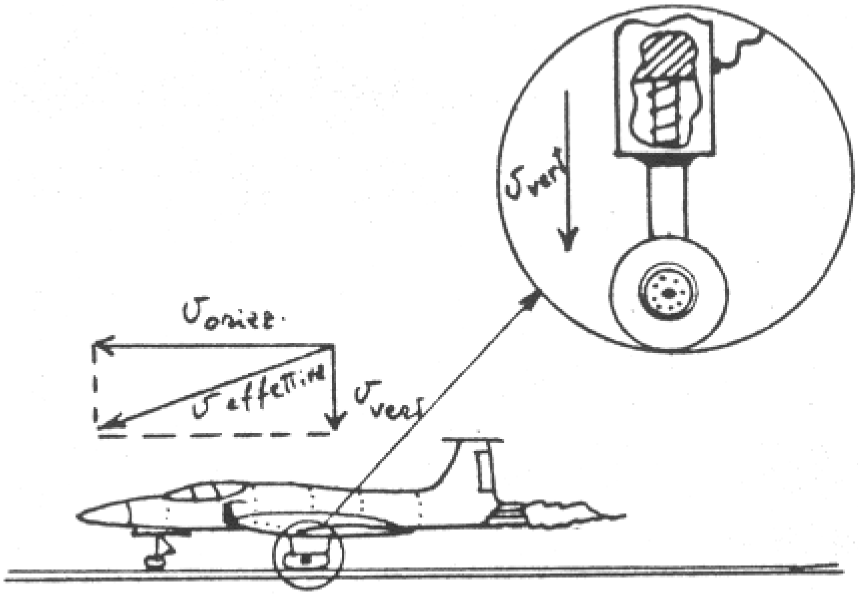
Per lo studio di questi moti vibratori è necessario fare qualche considerazione sui modelli matematici atti a descrivere tali fenomeni.

Spesso la difficoltà consiste nell'associare un modello deformabile a qualcosa che nella realtà il progettista vorrebbe rigido. Ovviamente questi schemi devono essere i più semplici possibili ed è possibile suddividerli in due gruppi:

- modelli continui (a infiniti gradi di libertà) derivanti dalla Scienza delle Costruzioni, dove riferendoci, a esempio, a una trave, ogni punto di questa può muoversi e ogni sezione può ruotare. Per descriverne il comportamento è necessario conoscere una funzione f(x) e delle equazioni alle derivate parziali. Tali modelli vengono usati per lo studio delle vibrazioni trasversali di travi o funi;
- modelli discreti (a n finiti gradi di libertà) che contrastano con l'osservazione del fenomeno fisico secondo la quale la deformabilità e l'inerzia sono distribuite nel modello fisico.

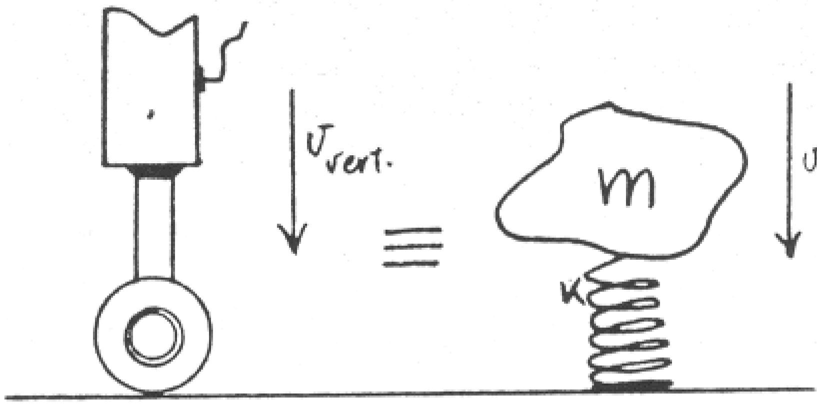
Per fortuna, molte volte è possibile ricondurre il modello reale a sistemi a uno o pochi gradi di libertà.

Si tenga presente che per utilizzare modelli a uno o pochi gradi di libertà, è necessario prima effettuare lo studio con schemi a un numero maggiore di g.d.l. e capire sotto quali condizioni si può tornare a pochi g.d.l. senza perdere informazioni importanti per la risoluzione del problema.



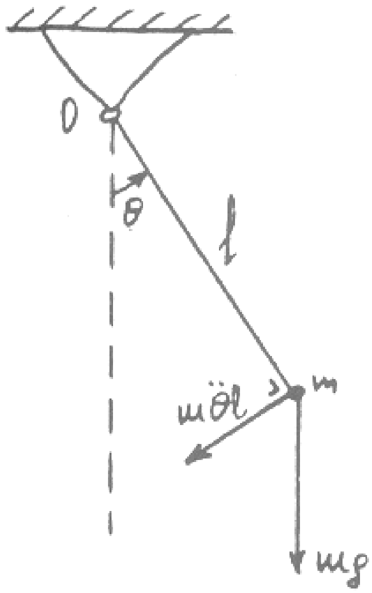
Un velivolo in atterraggio, a esempio, possiede una velocità che non è mai perfettamente orizzontale e per questo i carrelli sono dotati di opportuni molleggi che hanno il compito di dissipare l'energia associata alla componente verticale di tale velocità.

Se analizziamo in prima approssimazione l'impatto del velivolo sul campo d'atterraggio, trascurando, nel breve intervallo di tempo in cui avviene l'impatto, l'effetto dovuto alla componente orizzontale della velocità si nota che il comportamento dinamico del sistema, grazie alla grande rigidezza della fusoliera rispetto agli elementi elastici del treno d'atterraggio, può essere rappresentato dalla seguente equazione differenziale.



$$-m\ddot{y} - ky = 0$$

Altro esempio noto dalla Meccanica Razionale è quello del pendolo per il quale la scrittura dell'equazione di equilibrio alla rotazione attorno alla cerniera O porta a



$$-ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta = 0$$

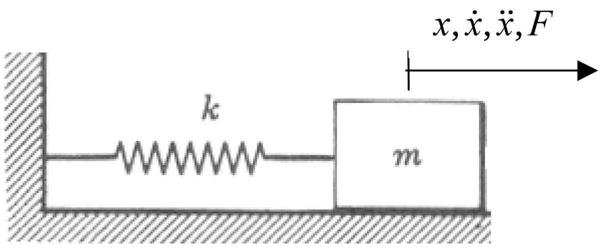
che per piccole oscillazioni attorno alla posizione di equilibrio, definita da $\theta=0$, può essere linearizzata

$$\sin\theta \simeq \theta$$

$$-l\ddot{\theta} - g\theta = 0$$

dando luogo a una equazione differenziale lineare simile a quella già vista per il velivolo.

Trattiamo il problema delle vibrazioni a un solo g.d.l. in modo generale, studiando per ora il caso che sul sistema dinamico, considerato in assenza di attriti o smorzamento, non agiscano forze esterne.



Per mettere in equazione il modello meccanico, dobbiamo scegliere la coordinata libera, ovviamente la *x*, e sceglierne l'origine. Vedremo in seguito il motivo, ma risulta comodo misurare la coordinata libera (ovvero le coordinate libere in sistemi a più gradi di libertà) a partire dalla posizione di equilibrio statico.

Consideriamo un moto traslatorio della massa e scriviamo l'equazione di moto del sistema. Vi sono due metodi per ricavare le equazioni di moto:

- gli equilibri dinamici;
- i principi energetici.

Utilizziamo, per ora, gli equilibri dinamici. In una generica posizione deformata x(t), agiranno sul corpo la forza d'inerzia e la forza di richiamo elastico della molla, ovvero

$$-m\ddot{x} - kx = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

equazione differenziale lineare omogenea a coefficienti costanti, la cui soluzione è del tipo

$$x(t) = Ae^{\lambda t}$$

dove A è una costante arbitraria e λ un parametro da determinare.

Sostituendo la soluzione nell'equazione di partenza

$$mA\lambda^2 e^{\lambda t} + kAe^{\lambda t} = 0$$

che, trascurando la soluzione banale $A = 0 \Rightarrow x(t) = 0 \forall t (0 < t < \infty)$ che rappresenta l'equilibrio statico, porta a

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}} = \pm i\omega_0$$

La soluzione dell'equazione differenziale è quindi data dalla combinazione lineare delle due soluzioni date da λ_1 e λ_2

$$x(t) = A_1 e^{i\omega_0 t} + A_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Lo spostamento x(t) è una quantità reale, mentre per la forma dell'equazione essa è complessa per cui affinché $x(t) \in \Re$ possiamo ricordare che possiamo sempre moltiplicare la soluzione dell'omogenea per una costante arbitraria e quindi A_1 e A_2 possono essere reali o complesse.

Sviluppando trigonometricamente la soluzione

$$x(t) = A_1\left(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t\right) + A_2\left(\cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t\right) = \left(A_1 + A_2\right)\cos\omega_0 t + i\left(A_1 - A_2\right)\sin\omega_0 t$$

Si vede che prendendo A_1 e A_2 complessi e coniugati ($A_1=a+ib$; $A_2=a-ib$) si ottiene

$$x(t) = A_1\left(\cos\omega_0 t + i\sin\omega_0 t\right) + A_2\left(\cos\omega_0 t - i\sin\omega_0 t\right) = 2a\cos\omega_0 t - 2b\sin\omega_0 t$$

ovvero

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

Poiché entrambe le funzioni armoniche hanno lo stesso argomento:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t = C\cos\left(\omega_0 t + \varphi\right)$$

con $\begin{cases} C = \sqrt{A^2 + B^2} \\ tg\varphi = \dfrac{B}{A} \end{cases}$

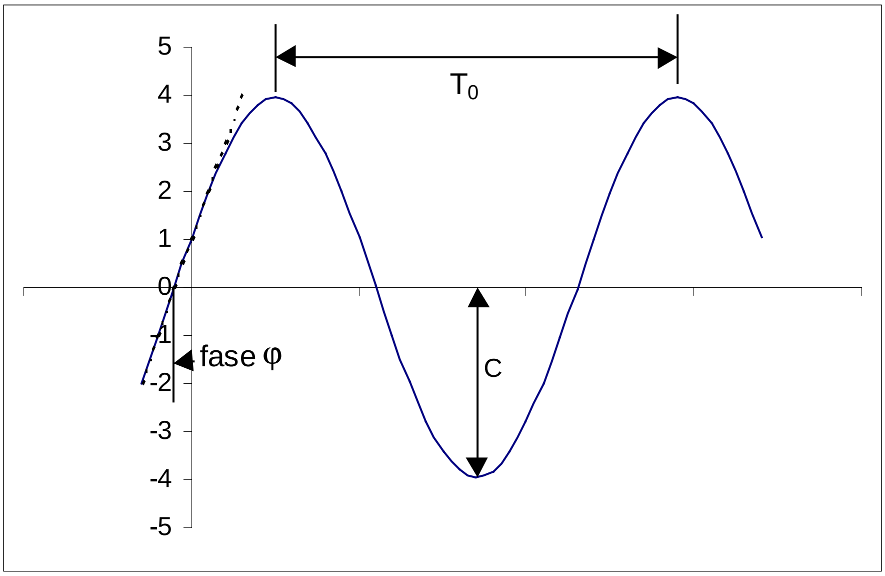
Le due costanti presenti nella soluzione (A,B), ovvero l'ampiezza C e la fase φ sono determinate attraverso le condizioni iniziali.

Supponiamo che al tempo $t=0$

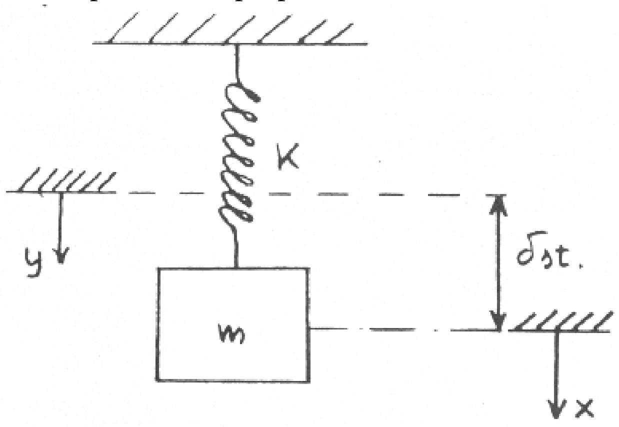
$$x\left(t=0\right) = x_o \text{ e } \dot{x}\left(t=0\right) = \dot{x}_0$$

sostituendo si trova

$$A = x_0 \text{ e } B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$$



Il moto risulta armonico con periodo $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$, indipendente dalle condizioni iniziali mentre ω_0 è detta pulsazione propria del sistema.



Consideriamo ancora lo stesso oscillatore già visto, ma supponiamolo anche soggetto alla gravità.

Nel precedente esempio avevamo posto l'origine della coordinata libera ($x=0$) dove è nulla la forza esercitata dalla molla.

Anche in questo caso porremo l'origine $y=0$ dove la molla è scarica.

L'equazione di equilibrio dinamico porta a

$$-m\ddot{y} - ky + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{y} + ky = mg$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa.

Se prendiamo ora come origine della coordinata libera x la posizione di equilibrio statico sarà

$$y = x + \delta_{st}$$
$$\ddot{y} = \ddot{x}$$

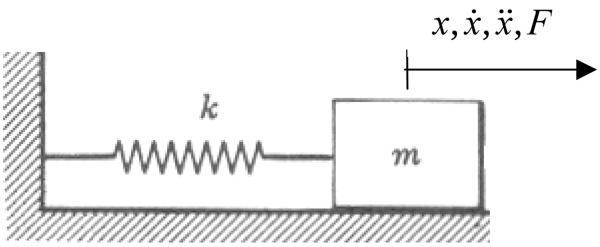
con

$$\delta_{st} = \frac{mg}{k}$$

che sostituite portano a

$$-m\ddot{x} - k\left(x + \frac{mg}{k}\right) + mg = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

Ovvero, <u>se non interessa lo studio del moto derivante in seguito all'applicazione di una forza costante nel tempo</u>, conviene scegliere l'origine della coordinata libera nel punto di equilibrio statico in quanto si ottiene sempre un'equazione differenziale omogenea.



Sempre in assenza di smorzamento e di attriti, vediamo ora cosa succede se applichiamo al sistema una forza esterna *F(t)* che supponiamo per semplicità armonica, ovvero

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

con F_0 e ω noti.

L'equazione di equilibrio per la massa *m* diventa

$$-m\ddot{x} - kx + F\left(t\right) = 0 \Rightarrow m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti completa il cui integrale generale è dato dall'integrale generale dell'omogenea associata più l'integrale particolare, ovvero

$$x(t) = x_g(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = A\cos \omega_0 t + B\sin \omega_0 t + x_p(t)$$

con

$$x_p\left(t\right) = C\sin \omega t$$

integrale particolare che sostituito nell'equazione di partenza

$$-m\omega^2 C\sin \omega t + kC\sin \omega t = F_0 \sin \omega t \Rightarrow C = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

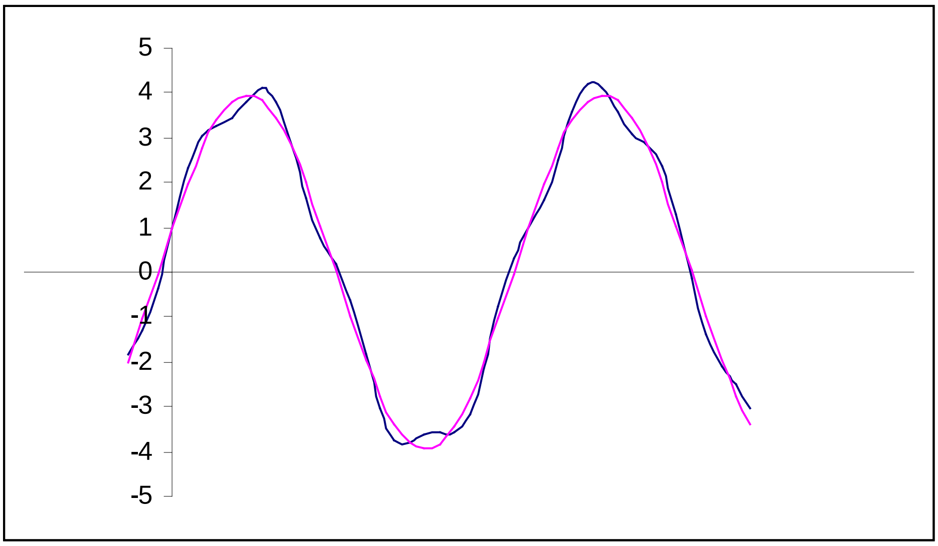
quindi

$$x(t) = A\cos \omega_0 t + B\sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\sin \omega t$$

Il moto risultante risulta quindi somma di due funzioni armoniche, una con pulsazione ω_0 e l'altra con pulsazione ω e il moto risultante non è armonico (per ω_0 diverso da ω) e neppure, in generale, periodico a meno che una non sia multipla dell'altra

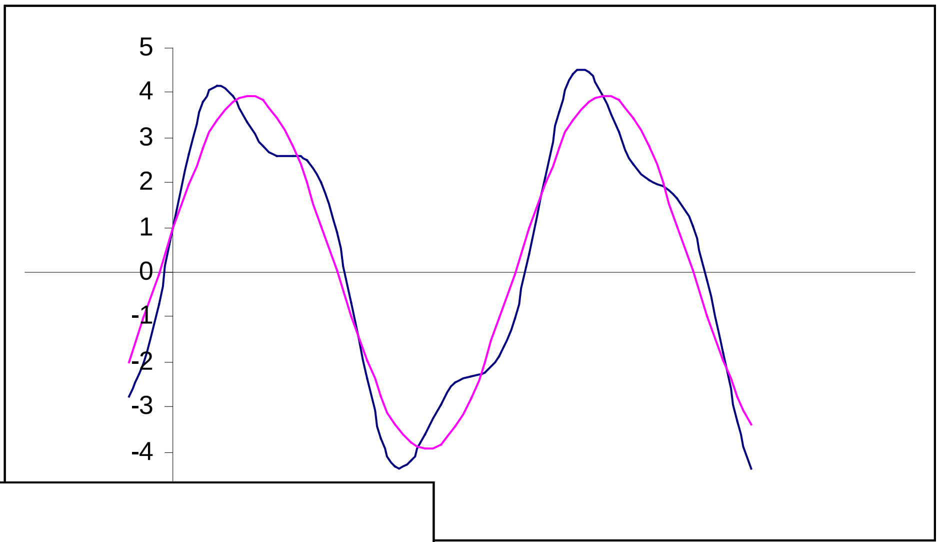
$$\sin n\alpha = 2\sin\left(n-1\right)\alpha\cos\alpha - \sin\left(n-2\right)\alpha$$

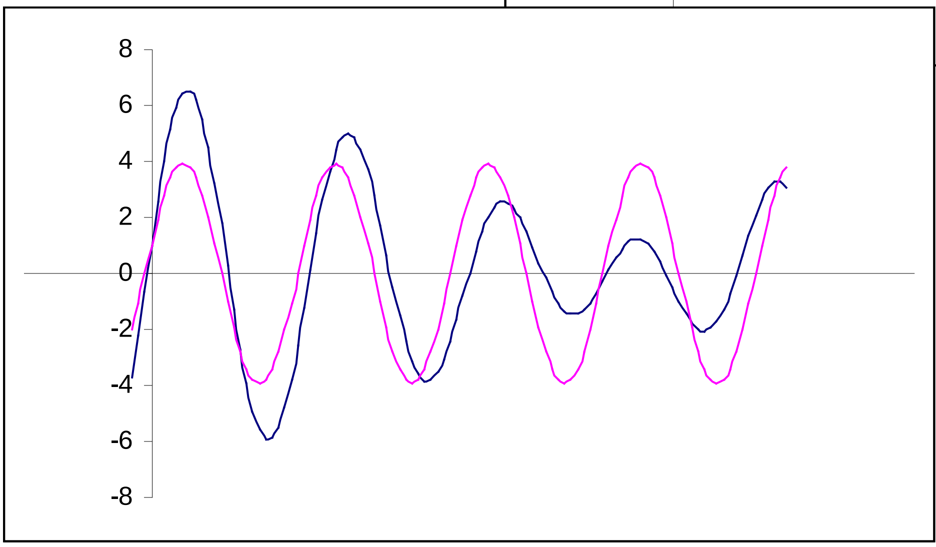
$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{F_0}{k - m\omega^2}\sin\omega t$$



Caso $\omega >> \omega_0$ e $\frac{F_0}{k - m\omega^2} <$A,B

Caso $\omega \cong 2\omega_0$ e $\frac{F_0}{k - m\omega^2} \cong A,B$





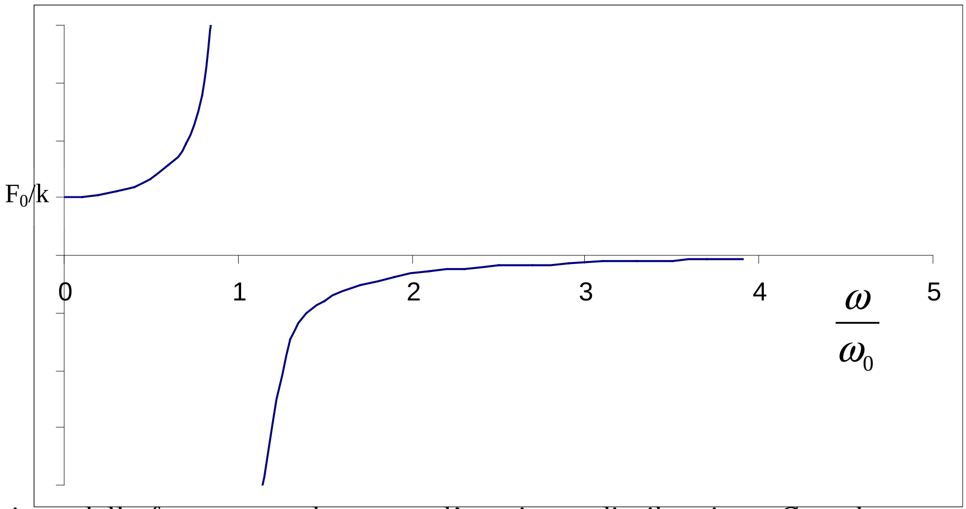
Caso $\omega \cong \omega_0$ e $\frac{F_0}{k - m\omega^2} \cong \sqrt{A^2 + B^2}$ si ha il fenomeno dei battimenti

Per effetto degli inevitabili smorzamenti, l'integrale generale dell'omogenea associata tende a zero col crescere del tempo (lo vedremo nelle lezioni successive) per cui a noi interessa studiare il comportamento vibratorio a regime, ovvero il solo integrale particolare

$$x(t) \cong \frac{F_0}{k - m\omega^2} \sin \omega t$$

Analizziamo l'ampiezza *C* del moto a regime al variare dei parametri

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0 / k}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} = \frac{\delta_{st}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$



- se la pulsazione della forzante tende a zero, l'ampiezza di vibrazione *C* tende a un valore pari alla deformazione indotta dalla forza F_0 applicata staticamente;
- se ω cresce, *C* aumenta, fenomeno dell'amplificazione dinamica, fino a un asintoto verticale per $\omega \to \omega_0 \Rightarrow C \to \infty$ (risonanza);
- se $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow C \to 0$

Attenzione se siamo in risonanza, la soluzione cade in difetto in primo luogo perché il comportamento della molla è lineare per piccoli spostamenti.

Inoltre, dobbiamo ricordare che le costanti A e B devono essere calcolate per la soluzione generale:

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + x_p(t)$$

per cui

$$\begin{cases} x(0) = A + x_p(0) \\ \dot{x}(0) = B\omega_0 + \dot{x}_p(0) \end{cases}$$

supponendo per t=0 tanto lo spostamento, quanto la velocità siano nulle si ottiene

$$x(t) = \frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)$$

che fornisce una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$ per $\omega \to \omega_0$

Applicando la regola di L'Hopital si ottiene

$$\lim_{\omega\to\omega_0} x(t) = \lim_{\omega\to\omega_0} \frac{F_0}{k}\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}\left(\sin\omega t - \frac{\omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right) = \frac{F_0}{2k}\left(\sin\omega t - \omega t\cos\omega t\right)$$

per cui sarebbe comunque necessario tempo infinito, anche in condizioni ideali di linearità delle forze elastiche, per raggiungere ampiezze infinite.

Ricordando, infine

$$C = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1-\frac{m\omega^2}{k}} = \frac{\delta_{st}}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

si definisce coefficiente di amplificazione dinamica *H*

$$H(\omega) = \frac{C}{\delta_{st}} = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$