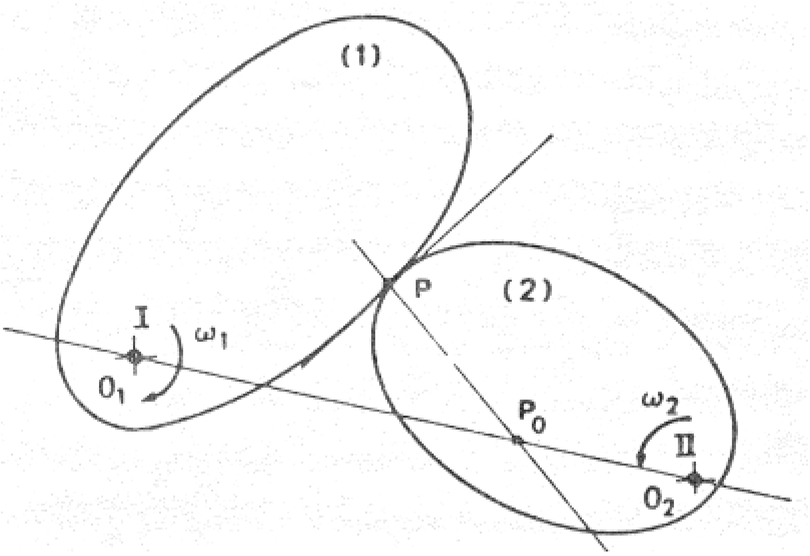
INGRANAGGI



Volendo trasmettere un momento tra due alberi con un certo rapporto di trasmissione τ si possono utilizzare degli elementi solidali con i due alberi che realizzino dei profili coniugati.

Essendo la velocità relativa diretta come la tangente comune ai due profili il punto P_0, posto sulla perpendicolare alla direzione della velocità relativa, è il centro d'istantanea rotazione del moto relativo.

Poiché

$$\vec{V}_{P_0} = \vec{V}_{rP_0} + \vec{V}_{tP_0}$$

essendo, per definizione P_0 centro d'istantanea rotazione del moto relativo, risulta

$$V_{P_0} = V_{tP_0}$$

ovvero

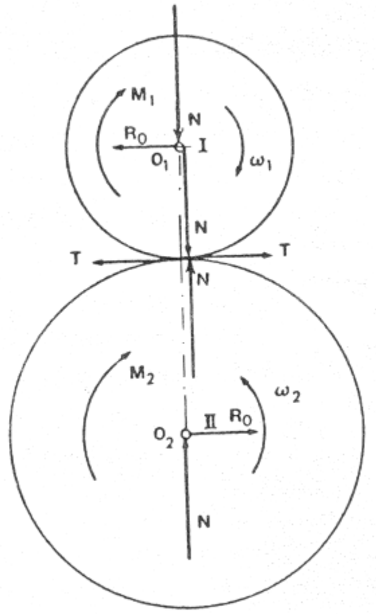
$$\omega_1 \left(P_0 - O_1 \right) = \omega_2 \left(P_0 - O_2 \right)$$

e quindi

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{P_0 - O_1}{P_0 - O_2}$$

Il rapporto di trasmissione rimarrà costante, quindi, solo nell'ipotesi che la distanza di P_0 da O_1 e O_2 sia costante per le varie posizioni che i due profili coniugati assumono, ovvero i luoghi delle posizioni assunte da P_0 siano delle circonferenze.

Tali circonferenze sono dette primitive.



Materializzando le primitive, si arriva alla trasmissione tramite ruote di frizione, ovvero tramite due ruote, solidali ai due alberi, premute l'una contro l'altra.

Per quanto detto avremo:

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

L'inconveniente à quello di avere una limitazione sulla coppia massima trasmissibile data dalle condizioni di aderenza, ovvero

$$T \le f_a N$$

e inoltre un rendimento

$$\eta = \frac{1}{1 + \dfrac{2Nf_v r_2}{M_2}}$$

Infatti in condizioni ideali (attrito volvente nullo) il momento motore in condizioni di regime assoluto

$$W_m - W_r = 0 \Rightarrow M_1\omega_1 - M_2\omega_2 = 0 \Rightarrow W_u = M_2\omega_2 = M_2\tau\omega_1$$

dall'equilibrio alla rotazione della ruota 2, abbiamo che

$$M_2 = Tr_2 - Nf_v r_2$$

ovvero

$$M_2\frac{r_1}{r_2} = Tr_1 - Nf_v r_1 \Rightarrow Tr_1 = M_2\frac{r_1}{r_2} + Nf_v r_1$$

mentre per la ruota 1 si ha

$$M_1 = Tr_1 + Nf_v r_1 = \left(M_2\frac{r_1}{r_2} + Nf_v r_1\right) + Nf_v r_1 = M_2\tau + 2Nf_v r_1$$

$$W_u = M_2\omega_2 = M_2\tau\omega_1$$

$$M_1 = M_2\tau + 2Nf_v r_1$$

e quindi una potenza entrante

$$W_e = \left(M_2\tau + 2Nf_v r_1\right)\omega_1$$

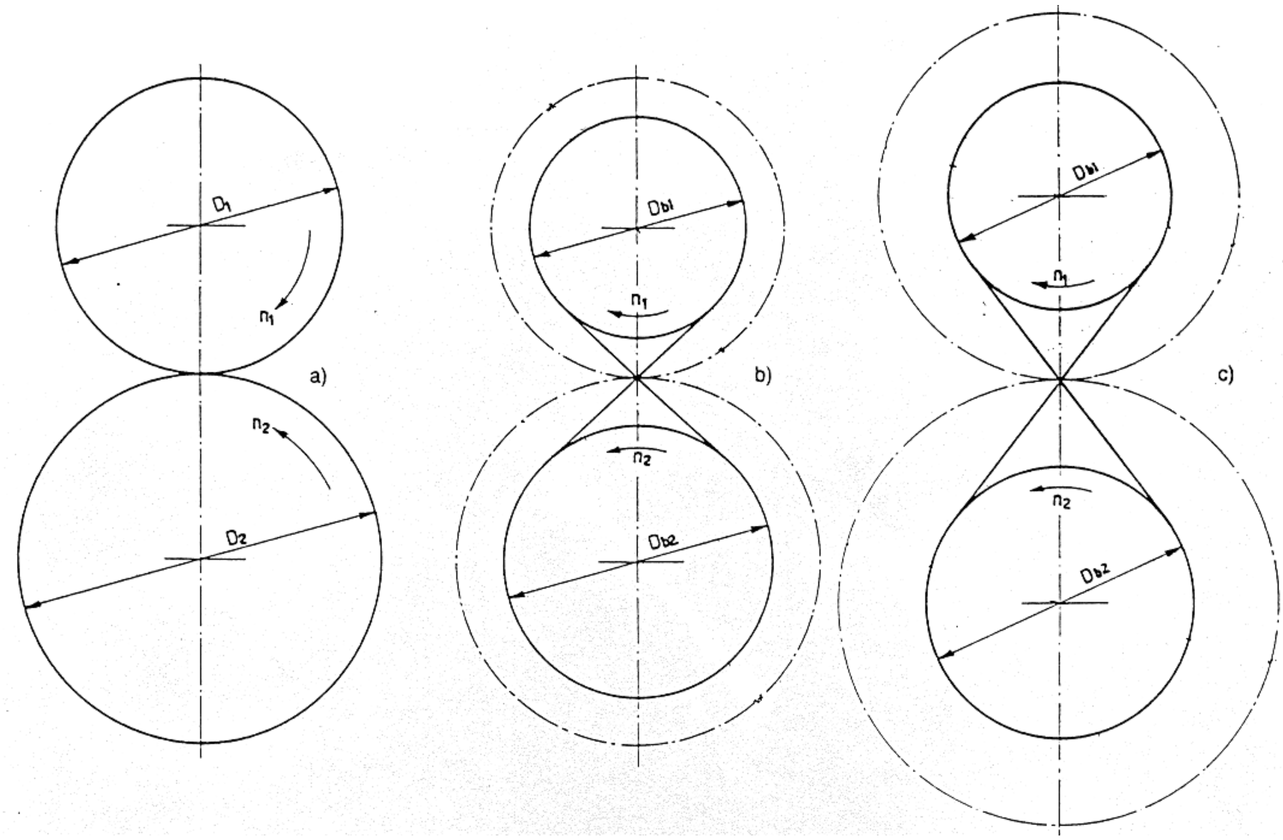
da cui un rendimento

$$\eta = \frac{M_2 \tau \omega_1}{\left(M_2 \tau + 2 N f_v r_1\right)\omega_1} = \frac{1}{1 + \frac{2 N f_v r_2}{M_2}}$$

che peggiora all'aumentare di *N*. Bisognerà dare quindi al precarico *N* il minimo valore compatibile con la sicurezza della trasmissione. Per trasmettere coppie notevoli dobbiamo avere valori elevati di *N* e quindi non è conveniente utilizzare le ruote di frizione per trasmettere momenti elevati.

RUOTE DENTATE

Potremmo pensare di sostituire alle ruote di frizione, materializzazione dei cerchi primitivi (enti cinematici che rappresentano i luoghi dei centri d'istantanea rotazione relativi durante il moto) con una trasmissione a cinghia incrociata.



La soluzione b) (centrale), ottenuta con una cinghia incrociata, ha lo stesso rapporto di trasmissione della a) (con ruote di frizione) se

$$\tau = \frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{D_{b1}}{D_{b2}}$$

dove D_{b1} e D_{b2} sono detti cerchi di base.

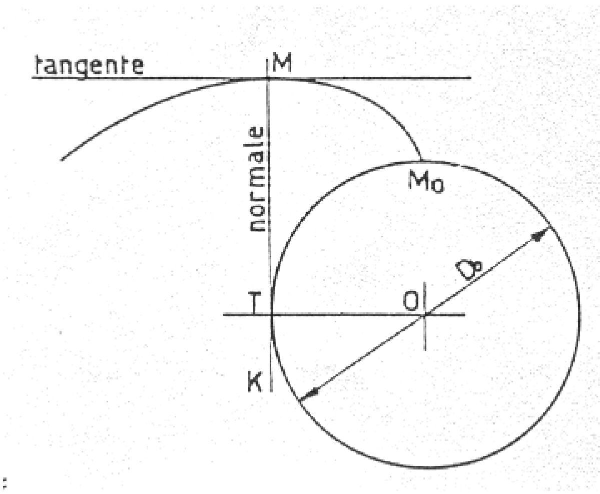
Anche la soluzione c), con interasse delle pulegge aumentato, presenta un aumento dei diametri dei cerchi primitivi di funzionamento ma presenta lo stesso rapporto di trasmissione, essendo rimasto invariato il rapporto D_{b1}/ D_{b2}.

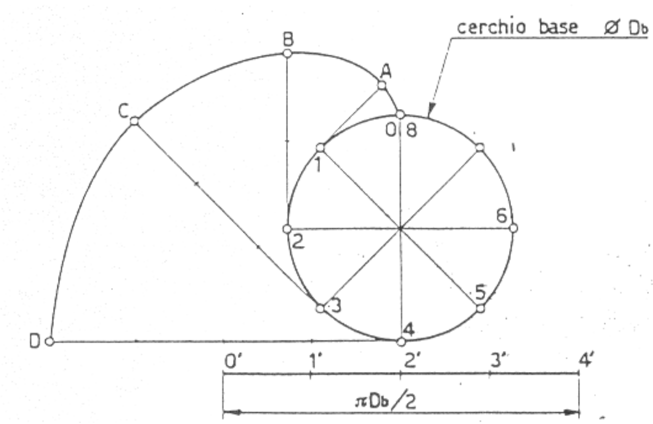
Evolvente di cerchio

Figura piana i cui centri di curvatura si trovano su un cerchio e i cui raggi di curvatura godono della proprietà che

$$\rho = \overline{TM} = TM_0$$

Nel suo moto solidale con il cerchio l'evolvente risulta tangente a una retta parallela al generico raggio *OT*

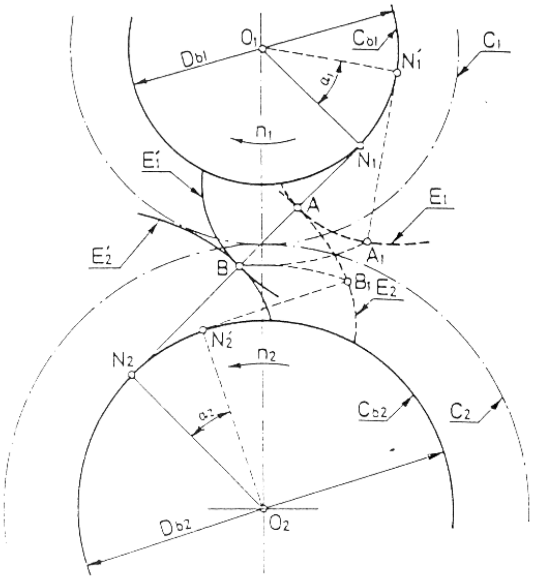


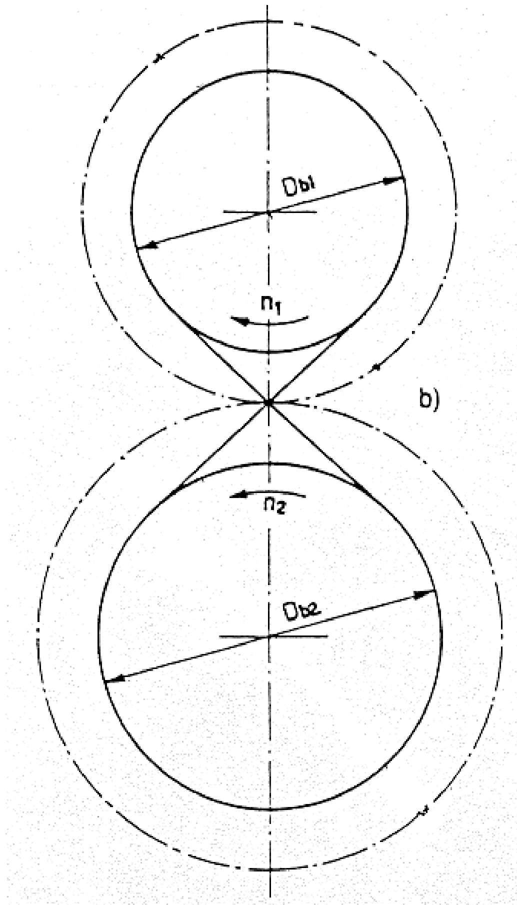


Per costruire l'evolvente:

- si divida la circonferenza in parti uguali;
- per ognuno dei punti così ottenuti si tracciano le tangenti;
- a parte si tracci il segmento $\pi \frac{D_b}{2}$;
- sulle tangenti precedentemente tracciate, e a partire dai punti di tangenza, si riportino segmenti di lunghezza uguale a quella dell'arco compreso tra l'origine *0* dell'evolvente e il punto di tangenza considerato. Per costruzione si ha

$$\overline{0'1'} = 01 = \overline{1A}$$
$$\overline{0'2'} = 02 = \overline{2B}$$
$$ecc$$





Siano E_1 e E_2 le evolventi ai due cerchi di base C_{b1} e C_{b2} della trasmissione a cinghia incrociata. Il luogo dei punti di contatto di queste due evolventi, che sono superfici coniugate per costruzione, è il segmento N_1N_2 tangente ai due cerchi di base.

Se la ruota di centro O_1 ruota di un angolo α_1, l'evolvente E_1 andrà in E'_1, spingendo il profilo E_2 che andrà in E'_2 ruotando di un angolo α_2. I punti A_1 e B_1 dei rispettivi profili compiranno una traiettoria circolare fino ad andare nel nuovo punto di tangenza in B.

Per la definizione di evolvente, possiamo scrivere

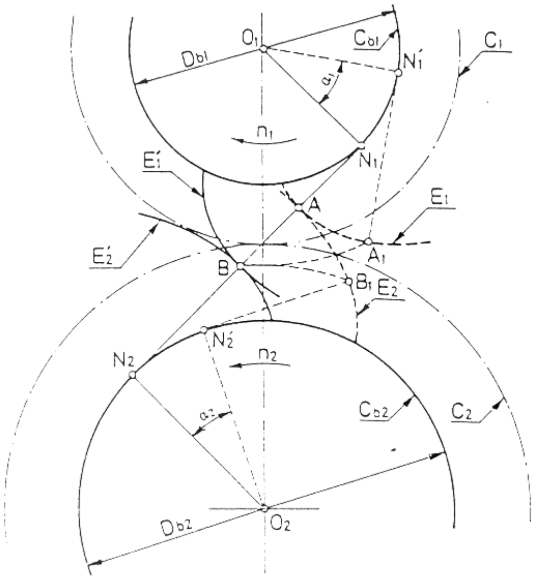
$$\overline{A_1N'_1} - \overline{AN_1} = N_1N_1' = \overline{AB}$$
$$\overline{AN_2} - \overline{B_1N_2'} = N_2N_2' = \overline{AB}$$

da cui risulta che

$$N_1N_1' = \alpha_1 \frac{D_{b1}}{2} = N_2N_2' = \alpha_2 \frac{D_{b2}}{2}$$

ciò significa che i due cerchi primitivi rotolano senza slittare.

Il segmento N_1N_2 è il luogo geometrico dei punti di contatto ed è detto retta d'azione.



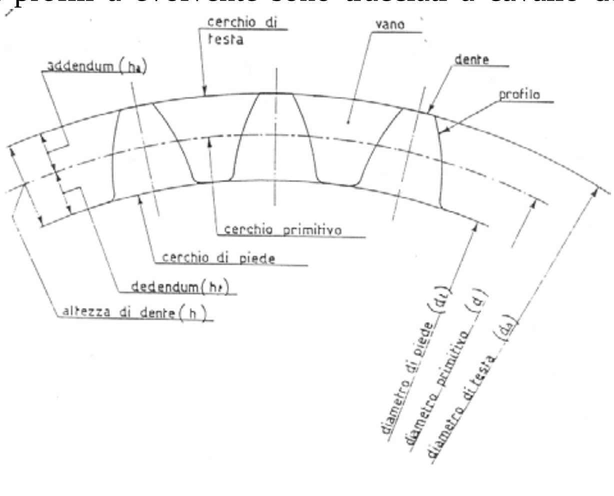
Dal punto di vista cinematico la trasmissione ottenuta con ruote dentate a evolvente è equivalente a quella con pulegge e cinghie incrociate. Il rapporto di trasmissione è indipendente dalla distanza degli assi ma solo dai diametri dei cerchi di base.

Dal punto di vista della potenza questa viene trasmessa per le azioni normali che si scambiano i profili a contatto e non più da quelle tangenziali.

Per garantire la continuità della trasmissione i profili E_1 ed E_2, quindi i denti, devono ripetersi tante volte in modo tale che due di loro risultino a contatto lungo un arco, detto arco d'azione, almeno fino a quando altri due denti successivi siano entrati in contatto, ovvero la distanza tra due denti successivi appartenenti alla medesima ruota deve risultare

$$\frac{arcoaccesso}{passo} > 1 \therefore 1{,}2 \div 1{,}4$$

Ovviamente, volendo garantire una trasmissione del moto bidirezionale entrambi i fianchi di ogni dente di ogni ruota dovranno essere dei profili a evolvente del proprio cerchio di base.
I profili a evolvente sono tracciati a cavallo della primitiva così da limitare gli strisciamenti, in quanto solo sulla primitiva, luogo dei centri d'istantanea rotazione relativi, le velocità relative sono nulle.



Le evolventi sono limitate dal cerchio di troncatura esterna, o cerchio di testa, e da quello di troncatura interna, o di piede.

Nel proporzionamento modulare, si assume come dimensione caratteristica il modulo m

$m = \frac{p}{\pi}$ con p = passo circonferenziale misurato sulla primitiva

$m = \frac{p}{\pi}$ con p = passo circonferenziale misurato sulla primitiva

Ne deriva che la circonferenza primitiva di una ruota di diametro primitivo D con z denti è

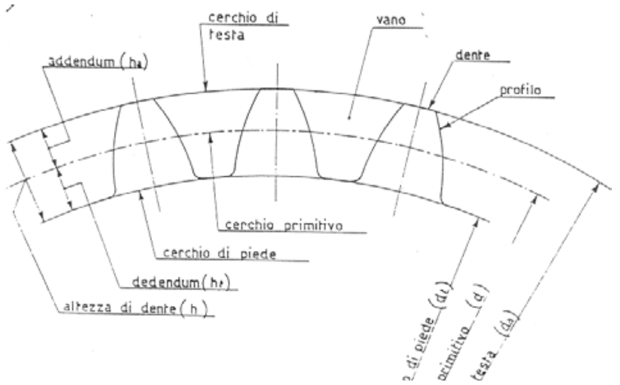
$$pz = D\pi = m\pi z$$

e quindi, poiché i denti di due ruote devono ingranare tra loro occorre che abbiano lo stesso passo circonferenziale e quindi il medesimo modulo

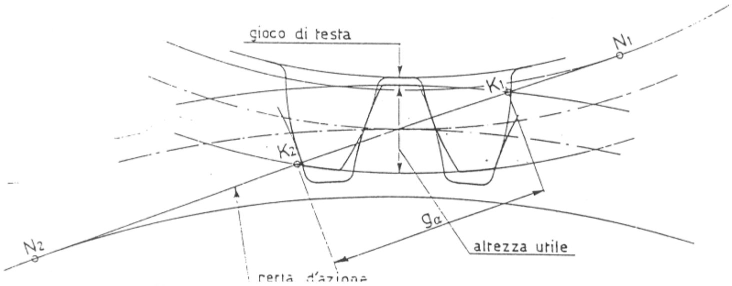
$$m = \frac{D_1}{z_1} = \frac{D_2}{z_2}$$

Ne deriva inoltre che

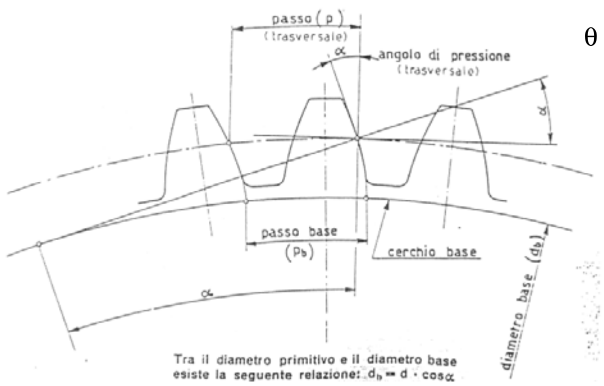
$$\tau = \frac{n_2}{n_1} = \frac{D_1}{D_2} = \frac{z_1}{z_2}$$



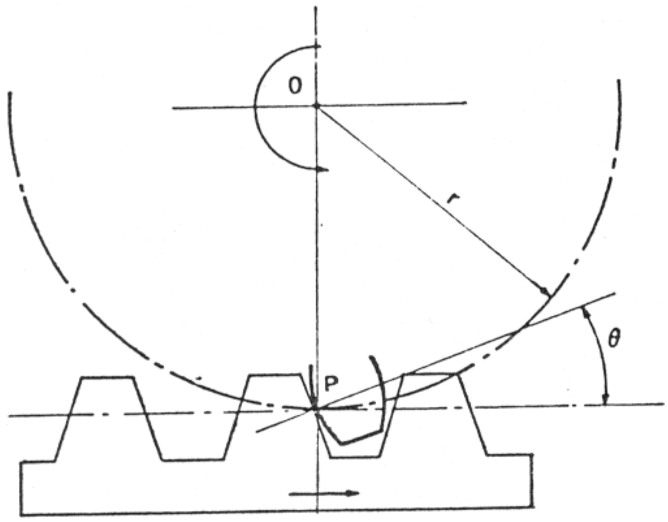
Nel proporzionamento modulare inoltre l'addendum *a* è posto uguale al modulo, il dedendum *d* a 5/4 di *m* e quindi l'altezza radiale del dente è pari a *9/4m*.



In assenza d'attrito, la spinta mutua tra i denti agisce lungo la retta d'azione, inclinata sulla tangente comune alle primitive di un angolo detto di pressione. Tale angolo vale normalmente 20°.

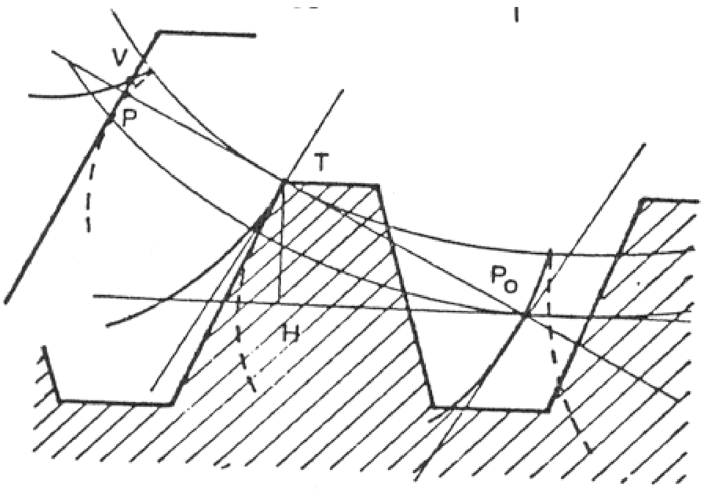


θ



L'esigenza di poter creare ruote d'assortimento ovvero di poter creare ingranaggi con numero di denti diverso, ma tutti accoppiabili tra loro così da poter realizzare la più vasta gamma di rapporti di trasmissione, porta all'utilizzo per il taglio di una dentiera a fianchi diritti, facilmente affilabili.

I profili dei denti che si ottengono sulla ruota sono sempre delle evolventi di cerchio, anche se il posizionamento non è corretto.



Lo svantaggio che si può avere è dovuto al fatto che non si possono tagliare ingranaggi con un numero di denti molto piccolo. Infatti, in realtà, se i contatti tra tagliente e ruota avvengono in un punto *P* esterno al segmento TP_0, il tagliente risulta tangente al ramo fittizio dell'evolvente (quello tratteggiato) e quindi sottotaglia alla base il dente.

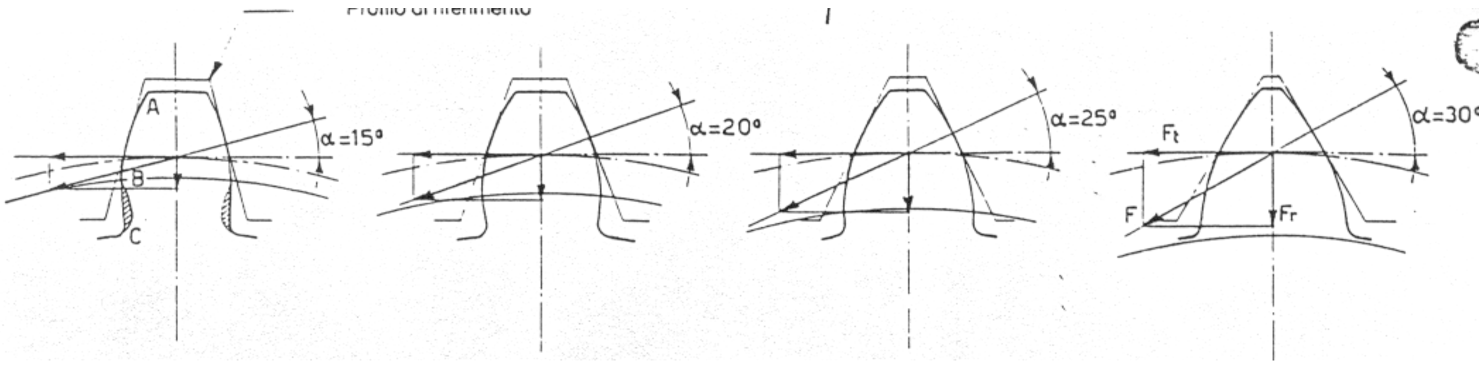
Ciò accade quando l'addendum della dentiera è maggiore di *TH* ovvero

$$a > P_0 T \sin\theta = r \sin^2\theta = \frac{mz}{2}\sin^2\theta$$

$$z_{\min} = \frac{2\dfrac{a}{m}}{\sin^2\theta}$$

e se il proporzionamento è modulare e $\theta = 20°$ risulta che il numero minimo di denti è pari a 17.

Se l'ingranaggio è tagliato con una fresa, non vi sarà sottotaglio, ma bensì interferenza.



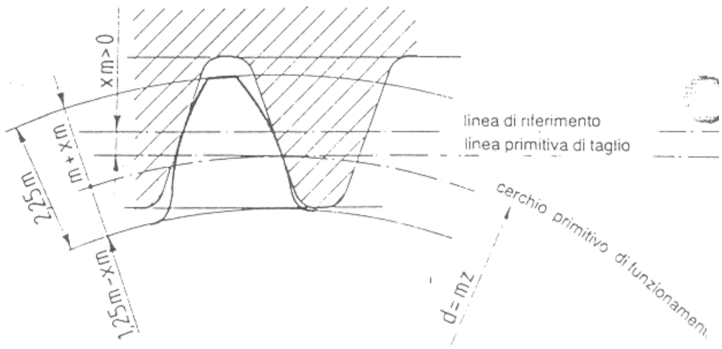
La figura mostra come varia la forma del dente di ingranaggio di 18 denti al variare dell'angolo di pressione θ (nella figura indicato come α). La zona tratteggiata nella figura per $\alpha = \theta = 15°$ mostra il sottotaglio durante la creazione del dente. Aumentare troppo l'angolo di pressione porta ad accrescere inutilmente il carico radiale sui cuscinetti, per cui non è pratica conveniente.

Per evitare l'interferenza, mantenendo costante l'angolo di pressione, si devono quindi usare proporzionamenti non modulari come il ribassamento in cui si utilizza un utensile con altezza ridotta nel rapporto $\alpha = \dfrac{a}{m}$ per cui il numero minimo di denti risulta dato da

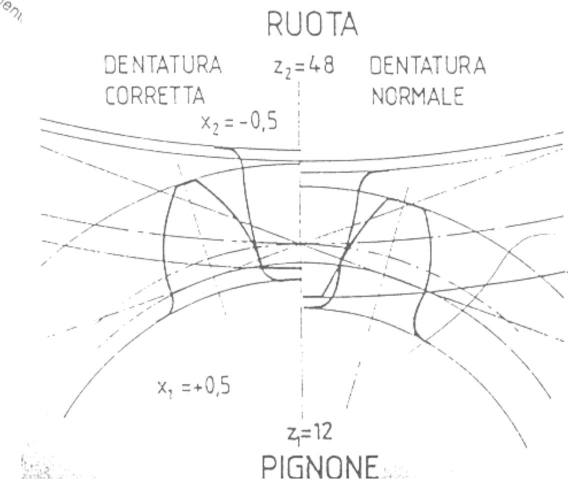
$$z_{\min} = \frac{2\alpha\dfrac{a}{m}}{\sin^2\theta}$$

Ovviamente anche il dedendum sarà ridotto e pari a $d = \alpha \frac{5}{4} m$.

Per ribassamenti notevoli, può tuttavia risultare compromessa la continuità del moto.



La correzione si ottiene, invece, tagliando un dente della coppia ingranaggio, quello con il numero minore di denti, con la mediana della dentiera spostata esternamente in modo da ridurne l'addendum di una quantità x e tagliando l'altro con un addendum aumentato della medesima quantità x.



Risulta per la ruota con numero minore di denti

$$z_{\min} = \frac{2\frac{a-x}{m}}{\sin^2\theta}$$

Il dente risulta così irrobustito, il taglio economico, in quanto non è necessario usare una dentiera speciale come nel ribassamento, ma è tuttavia necessario che l'interferenza non si presenti sull'altra ruota in quanto comunque deve risultare

$$z_1 + z_2 > 2z_{\min}$$

Si noti che allontanando il contatto dalla primitiva aumentano gli strisciamenti e quindi peggiora il rendimento.