Teoria elementare della lubrificazione

Gli strisciamenti tra corpi asciutti si verificano nelle macchine solo in casi eccezionali, quando sia utile avere un forte attrito, come a esempio nei freni e negli innesti a frizione; negli altri casi le superfici a contatto sono sempre bagnate da un liquido detto lubrificante, ovvero lubrificate.

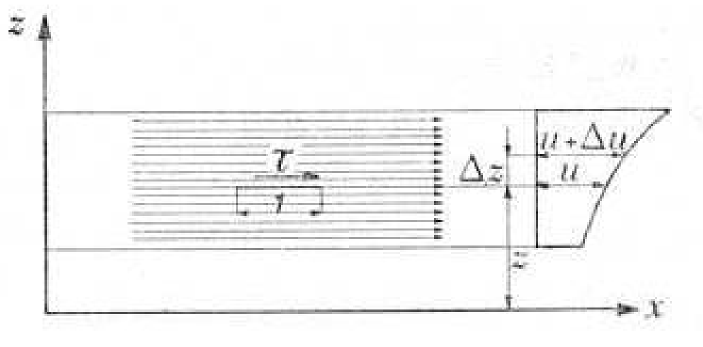
Tale liquido, interposto tra le due superfici, impedisce il fenomeno della microsaldatura che si è riconosciuto essere la causa dell'attrito cinetico (o dinamico).

Possono essere usati come lubrificanti gli olii e i grassi, che hanno la proprietà di formare veli superficiali (epilamini) aderenti alle superfici striscianti. I lubrificanti possono essere anche solidi (grafite) per condizioni di temperatura molto basse

Azione più decisiva esercita il lubrificante nella lubrificazione idrostatica e in quella idrodinamica, le quali consistono nella interposizione tra le superfici striscianti di un velo continuo di lubrificante che, per quanto sottile, ha però spessore sufficiente per impedire il contatto diretto tra le due parti. Lo strisciamento non avviene più fra solido e solido (attrito cinetico) o fra strati molecolari aderenti alle superfici (attrito untuoso), ma fra gli strati del lubrificante interposto tra queste (attrito mediato o fluido) che può assumere valori pari anche a 1/100 (dipendente solo dal tipo di lubrificante) di quello che si ha nell'attrito radente (dipendente dallo stato e dalla natura delle superfici).

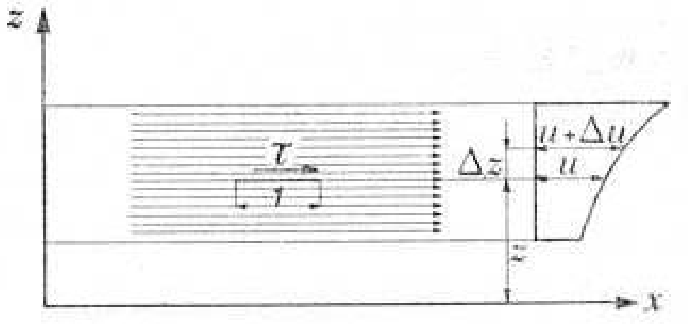
Legge di Petroff

Tutti i fluidi reali sono viscosi e oppongono una resistenza allo scorrimento delle particelle che li compongono. Se noi facciamo scorrere degli strati di fluido gli uni sugli altri, fra gli stati stessi si esercita un'azione che si oppone al moto relativo. Tale azione è proporzionale secondo un coefficiente caratteristico del fluido, detto coefficiente di viscosità, alla velocità con la quale avviene lo scorrimento.



Nel moto laminare considerando due strati di ordinate *z* e *z+Dz*, caratterizzati dalle velocità *u* e *u+Du*, la velocità relativa sarà *Du*. Il gradiente di velocità per *Dz* tendente a *0* è pari a *du/dz* per cui

$$t = m \frac{du}{dz}$$

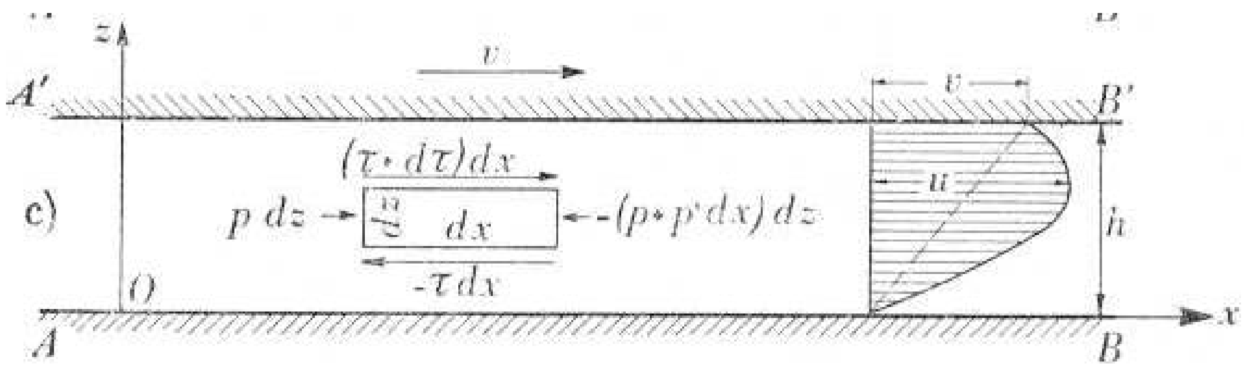


Supponiamo che:

- il moto del fluido sia laminare permanente per strati paralleli all'asse *z*;
- le forze di volume (peso e inerzia) siano trascurabili rispetto a quelle dovute alla viscosità;
- il fluido sia incomprimibile e abbia *m* costante;
- il moto avvenga in una sola direzione (lungo *x*)

Il problema del moto del fluido interposto tra le due superfici è dunque piano e quindi non vi sia fuoriuscita laterale in direzione *y* (perpedicolare al piano *x*-*z*).

Lubrificazione idrodinamica naturale



Scriviamo l'equilibrio alla traslazione secondo *x*[1] per un prisma elementare di fluido di dimensioni (*dx*,*1*,*dz*), avremo

$$pdz - (p + dp)dz - t\,dx + (t + dt)\,dx = 0$$

ovvero

$$dpdz = dt\,dx$$

Separando le variabili si ha

$$\frac{dp}{dx} = \frac{dt}{dz}$$

[1] Secondo z avremo

$$p(x)dx - p(x)dx = 0$$

ovvero ricordando la legge di Petroff

$$\frac{dp}{dx} = m\frac{d^2u}{dz^2}$$

equazione differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti completa, la cui soluzione è data dalla soluzione della omogenea associata

$$m\frac{d^2u}{dz^2} = 0 \therefore mu = Az + B$$

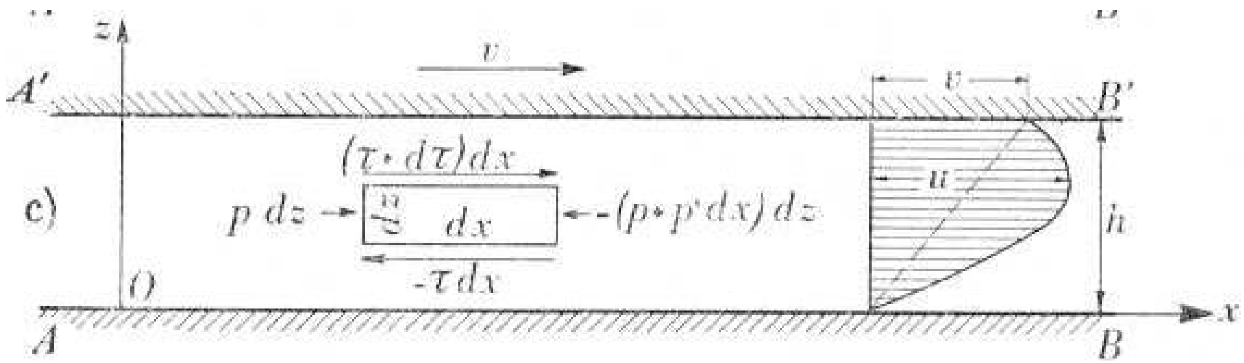
più l'integrale particolare di

$$m\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{dp}{dx} \therefore mu = \frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} + Cz + D$$

L'integrale generale è

$$mu = \frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} + C'z + D'$$

Le condizioni al contorno sono



$$u(0) = 0 \therefore D' = 0$$

$$u(h) = v \therefore mv = \frac{dp}{dx}\frac{h^2}{2} + C'h \therefore C' = \frac{mv}{h} - \frac{dp}{dx}\frac{h}{2}$$

che porta a

$$u(z) = \frac{dp}{dx}\frac{z^2}{2} + \frac{1}{m}\left(\frac{mv}{h} - \frac{dp}{dx}\frac{h}{2}\right)z = \frac{dp}{dx}\frac{z}{2m}(z-h) + \frac{v}{h}z$$

Dall'equazione di continuità della portata, trascurando le fuoriuscite laterali e considerando costante la viscosità:

$$Q = \int_0^h u dz = k$$

$$Q = \frac{p'}{2m}\int_0^h \left(z^2 - hz \right) dz + \frac{v}{h}\int_0^h z dz = k$$

Portata di pressione

Dipende dal gradiente di pressione (se p'=0 questo termine sparisce)

Portata di trascinamento

E' un effetto del trascinamento del meato da parte della parete mobile

in quanto *p'* (*dp/dx*) non è funzione di *z*

$$Q = \frac{p'}{2m}\int_0^h \left(z^2 - hz \right) dz + \frac{v}{h}\int_0^h z dz = k$$

$$Q = \frac{p'}{2m}\left[\frac{z^3}{3} - \frac{hz^2}{2} \right]_0^h + \frac{v}{h}\left[\frac{z^2}{2} \right]_0^h = -\frac{p'h^3}{12m} + \frac{vh}{2}$$

Il gradiente di pressione vale

$$p' = \frac{12m}{h^3}\left(\frac{vh}{2} - Q \right)$$

Se anche *h(x)* fosse costante tutti i termini a destra dell'eguale sarebbero costanti e quindi *p'*=costante.
Ma detta *l* la lunghezza del meato al di fuori del quale la pressione relativa è pari a quella atmosferica (=*0*) avremmo

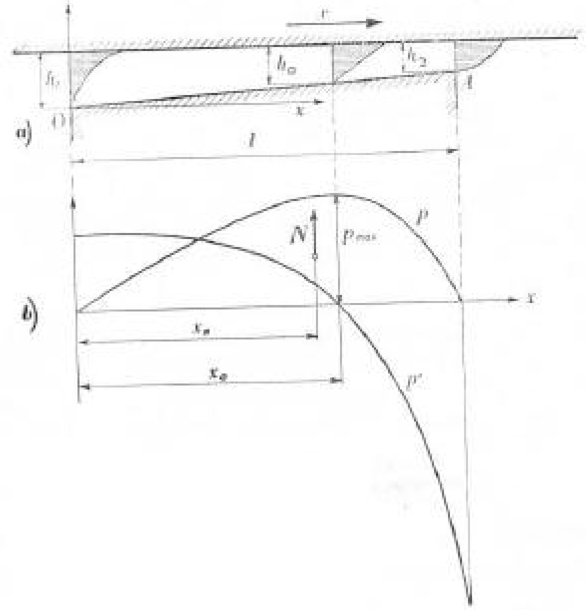
$$\frac{dp}{dx} = C \therefore dp = Cdx \therefore p(x) = Cx + D$$

con le condizioni al contorno $\begin{cases} p\left(0\right) = 0 \therefore D = 0 \\ p(l) = 0 \therefore C = 0 \end{cases}$

Di conseguenza se h fosse costante non è possibile la lubrificazione idrodinamica naturale. Si deve quindi ricorrere a quella idrostatica nella quale al lubrificante la pressione viene fornita tramite una pompa.
La pressione è quindi nulla agli estremi del meato e variabile lungo di esso.
Vi sarà quindi un punto lungo il meato di ascissa x_0 in cui essa è massima ed è individuata dal fatto che in quel punto il gradiente *p'* è nullo.

$$p' = \frac{12m}{h^3(x_0)}\left(\frac{vh(x_0)}{2} - Q\right) = 0 \therefore vh(x_0) = 2Q \therefore Q = \frac{vh(x_0)}{2}$$

Si nota immediatamente che se *v=0*, ovvero non vi è moto relativo tra le superfici, la portata è nulla e quindi non può istaurarsi la lubrificazione idrodinamica (problema degli organi di macchine dotati di moto con arresto)



Nel punto in cui si ha la massima pressione, la portata di pressione

$$\frac{p'}{2m}\int_0^h \left(z^2 - h(x)z\right)dz$$

è nulla e si ha solo la portata di trascinamento. Nella zona in cui *grad p* è > *0* alla portata di trascinamento si sottrae quella di pressione, mentre dove *grad p* < 0 la portata di pressione si somma a quella di trascinamento.

Sostituendo l'espressione della portata Q

$$Q = \frac{vh(x_0)}{2}$$

in quella del gradiente di p

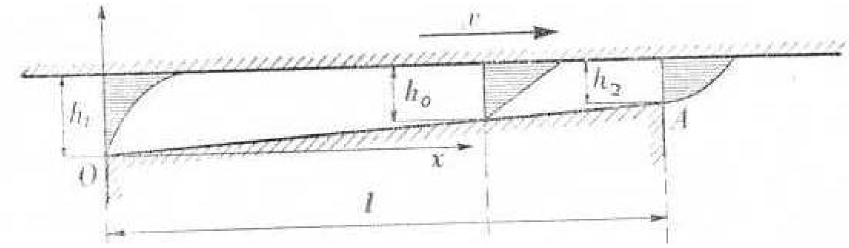
$$p'(x) = \frac{12m}{h^3(x)}\left(\frac{vh(x)}{2} - Q\right)$$

otteniamo

$$p'(x) = \frac{6mv}{h^3(x)}\left(h(x) - h(x_0)\right)$$

che integrata sulla lunghezza l del meato porta

$$p(l) - p(0) = \int_0^l p'(x)\,dx = \int_0^l \frac{6mv}{h^3(x)}\left(h(x) - h(x_0)\right)dx = 0$$



ma

$$h(x) = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l}x$$

da cui differenziando

$$dh = \frac{h_2 - h_1}{l}dx \therefore dx = \frac{l}{h_2 - h_1}dh$$

$$6mv\int_{h_1}^{h_2} \frac{\left(h - h(x_0)\right)}{h^3}\left(-\frac{l}{h_1 - h_2}\right)dh = 0$$

che semplificata nelle costanti

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{h - h(x_0)}{h^3}dh = 0 \therefore \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h^2} = h(x_0)\int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h^3} \therefore h(x_0) = \frac{2h_1h_2}{h_1 + h_2}$$

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{h - h(x_0)}{h^3} dh = 0 \therefore \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h^2} = h(x_0) \int_{h_1}^{h_2} \frac{dh}{h^3} \therefore h(x_0) = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2}$$

espressione che sostituita in

$$h(x_0) = \frac{2h_1 h_2}{h_1 + h_2} = h_1 - \frac{h_1 - h_2}{l} x_0$$

permette di calcolare l'ascissa x_0

Ricordando la larghezza unitaria del meato, avremo

$$N = \int_A p(x) dA = \int_0^l p(x) dx = \int_0^l dx \int_0^x p'(x) dx$$

quindi la pressione genera una spinta N per unità di larghezza del cuscinetto capace di tenere separate le due superfici.

Inoltre, sulla superficie superiore in moto si genera una reazione d'attrito pari a

$$T = \int_0^l t\big|_{z=h(x)} dx$$

Possiamo quindi calcolare il coefficiente di attrito mediato come

$$f_m = \frac{T}{N} \cong 0{,}01$$

Detta b la larghezza del meato, l'azione tangenziale genera una potenza resistente

$$W_r = -b\vec{T} \times \vec{v} = bTv = f_m bNv$$

che si trasforma in calore portando il lubrificante alla temperatura q

$$W_r = f_m bNv = a\,b\,l(q - q_e) \therefore q = q_e + \frac{f_m N v}{a\,l}$$

ove a è il coefficiente di scambio termico, q è la temperatura del fluido a regime e q_e è la temperatura esterna

Noto, quindi, il carico $P=bN$ che il cuscinetto deve sopportare e la sua geometria (b,l) si può quindi valutare la temperatura di funzionamento e quindi scegliere l'olio della gradazione più opportuna, tenendo conto che all'aumento della temperatura la viscosità (e quindi la capacità di sostentamento) decresce.
Si noti che se entrambe le superfici sono in moto, l'integrale generale

$$mu = \frac{dp}{dz}\frac{z^2}{2} + C'z + D'$$

deve essere risolto per le condizioni al contorno $\begin{cases} u(0) = v_1 \\ u(h) = v_2 \end{cases}$

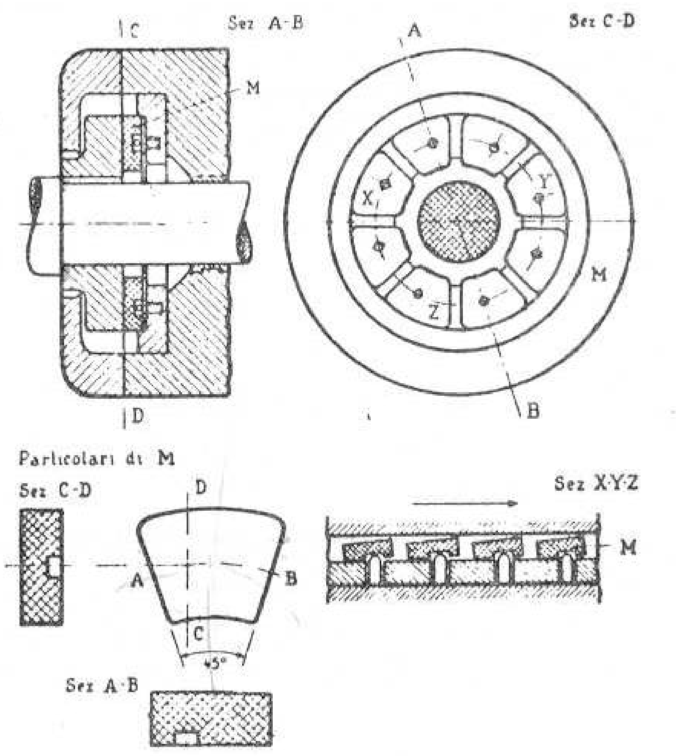
dove v_1 e v_2 sono le velocità delle due superfici. Se esse sono eguali e opposte è facile verificare che la portata Q è pari a 0, ovvero non può instaurarsi la lubrificazione idrodinamica naturale.

Si noti, infine, che il carico effettivo applicabile nella realtà è inferiore a quello ricavato da questa trattazione elementare, infatti il fluido non ha sempre direzione parallela a x, ma si ha fuoriuscita laterale e, quand'anche questa non vi fosse, il moto non è unidirezionale ma piano.

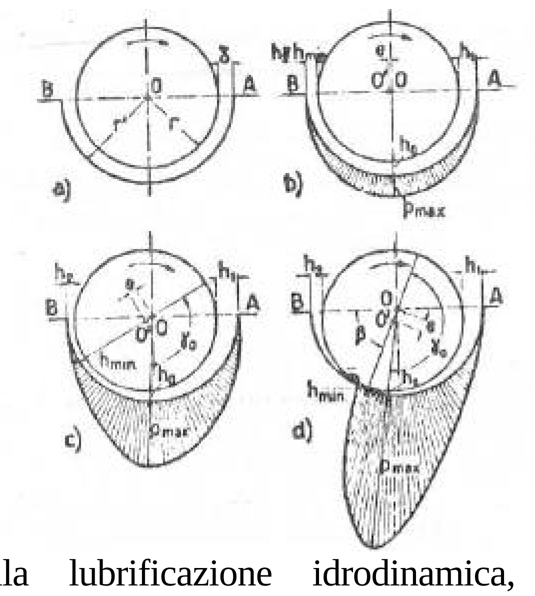
Sperimentalmente si è ricavato un fattore correttivo c, detto coefficiente di fuoriuscita laterale e il carico effettivamente sopportabile e P'

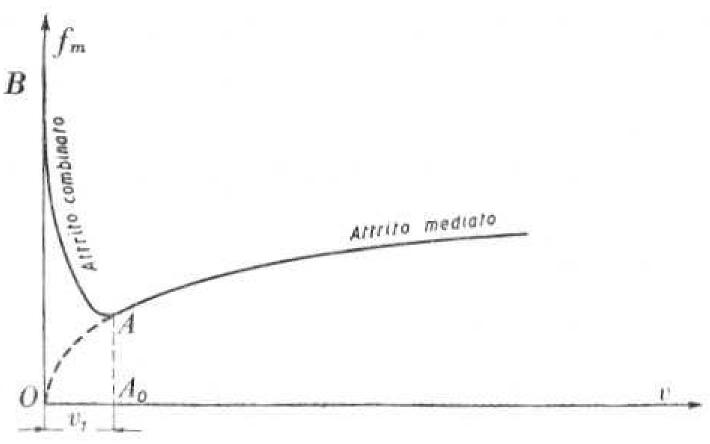
$$c = \frac{b+l}{b} \therefore P' = \frac{Nb}{c}$$

La teoria fin qui mostrata è applicabile alle coppie spingenti lubrificate ovvero ai cuscinetti reggispinta (cuscinetti Michell)



Per i perni lubrificati, la teoria elementare non è più sufficiente e si deve ricorrere alla integrazione numerica delle equazioni di Navier-Stokes o alla teoria semplicata di Reynolds, infatti il perno cambia posizione del centro al variare del carico a parità di velocità angolare o a pari carico al variare della velocità di rotazione.





Nella lubrificazione idrodinamica, per basse velocità di rotazione è possibile ancora il contatto tra le superfici e per valori molto bassi di *v*, zona detta di attrito combinato, il coefficiente di attrito mediato f_m anziché variare con legge parabolica come vorrebbe la teoria ritorna crescere fino ad assumere il valore dato da *OB* che rappresenta l'attrito untuoso. Questo è uno dei motivi per cui gli olii lubrificanti sono addittivati con prodotti che creino un resistente epilamine.