Equilibramento delle macchine a stantuffo

Si suppongono macchine monocilindriche o pluricilindriche con cilindri, stantuffi e manovellismi uguali.
Abbiamo visto che le masse rotanti si possono equilibrare esattamente con contrappesi.

Le forze d'inerzia delle masse alterne espresse da

$$F_a = -m_a a_B = -m_a \omega^2 r \left(\cos\alpha + \lambda \cos 2\alpha \right)$$

si possono rappresentare in uno dei seguenti modi

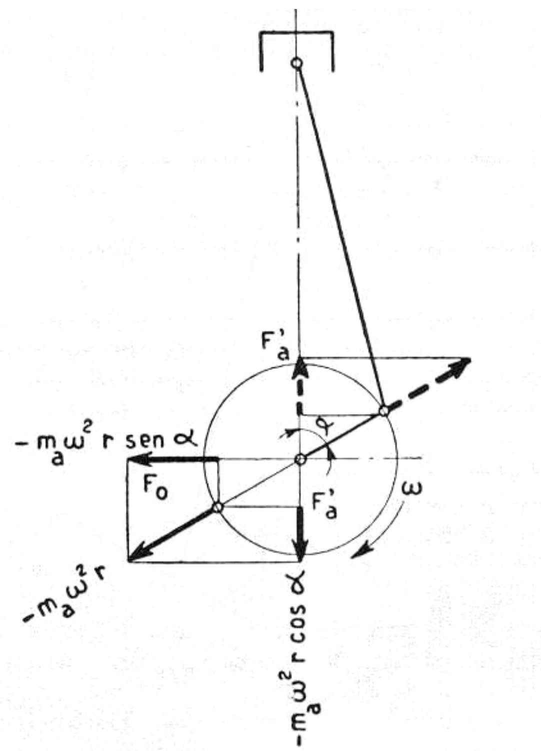
I) I ordine - proiezione sull'asse di moto del pistone del vettore di modulo $m_a \omega^2 r$ diretto come la manovella;
II ordine - proiezione sull'asse di moto del pistone del vettore di modulo $m_a \omega^2 r \lambda$ con anomalia pari a 2α nel verso di ω;

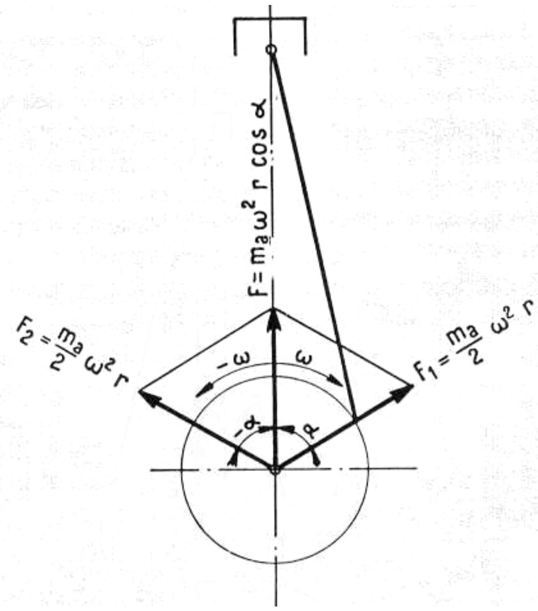
II) I ordine – risultante di due vettori di modulo $\frac{1}{2} m_a \omega^2 r$ ruotati di $\pm\alpha$;
II ordine - risultante di due vettori di modulo $\frac{1}{2} m_a \omega^2 r \lambda$ ruotati di $\pm 2\alpha$.

In un motore monocilindrico, con la prima rappresentazione appare chiaro che la forza alterna del primo ordine può essere equilibrata dalla componente lungo l'asse del moto del pistone della forza centrifuga $-m_a \omega^2 r$ prodotta da una massa di momento statico $m_a r$ aggiunta sull'albero in opposizione alla manovella (ovvero sul contrappeso). Nasce tuttavia la forza

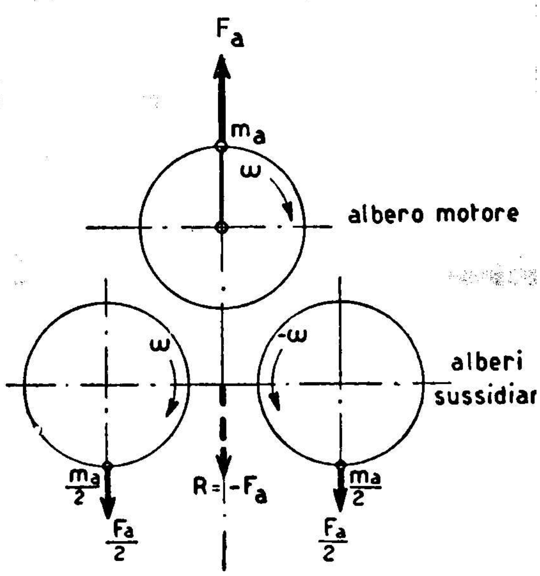
$$F_o = -m_a \omega^2 r \,\mathrm{sen}\,\alpha$$

diretta normalmente all'asse del cilindro e avente la stessa ampiezza e pulsazione della forza d'inerzia che si voleva equilibrare. Il risultato è solo quello di aver ruotato di π la retta d'azione della componente della forza d'inerzia alterna.





Utilizzando la seconda formulazione, si nota che se sul contrappeso si aggiunge, invece della massa di momento statico $m_a r$, una avente momento statico pari a $\frac{1}{2} m_a r$, si ottiene l'equilibramento di metà della forza d'inerzia del I ordine, mentre nasce un'altra forza normale all'asse del cilindro di intensità pari a quella equilibrata.



L'unico artificio per equilibrare completamente le forze d'inerzia del I ordine in un monocilindrico mediante due alberi sussidiari controrotanti alla velocità ω, portanti entrambi una massa di momento statico pari a $\frac{1}{2} m_a r$.

Ovviamente con altri due alberi controrotanti alla velocità 2ω e dotati, ciascuno, di una massa di massa di momento statico pari a $\frac{1}{2} m_a r \lambda$ è possibile equilibrare completamente anche le componenti del II ordine.

Motori con cilindri in linea

Si utilizza la prima formulazione del problema.

1) bicilindrico con manovelle a 360° - può essere visto come l'insieme di due monocilindrici in fase tra loro. Quindi le forze d'inerzia di ogni ordine sono in fase tra loro e si sommano;
2) bicilindrico con manovelle a 180° (indipendentemente dalla disposizione dei cilindri in linea o boxer):

$$F_{totale}^{Iordine} = F_1^{Iordine} + F_2^{Iordine} = m_a \omega^2 r \left(\cos\alpha + \cos(\alpha + \pi) \right) = 0$$
$$F_{totale}^{IIordine} = F_1^{IIordine} + F_2^{IIordine}$$
$$F_{totale}^{IIordine} = m_a \omega^2 r \lambda \left(\cos 2\alpha + \cos 2(\alpha + \pi) \right) = 2 m_a \omega^2 r \lambda \cos 2\alpha$$

3) tricilindrico con manovelle a 120°:

$$F_{totale}^{Iordine} = m_a \omega^2 r \left(\cos\alpha + \cos\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi \right) + \cos\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi \right) \right) =$$
$$F_{totale}^{Iordine} = m_a \omega^2 r \left(\cos\alpha \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) - \operatorname{sen}\alpha \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0$$

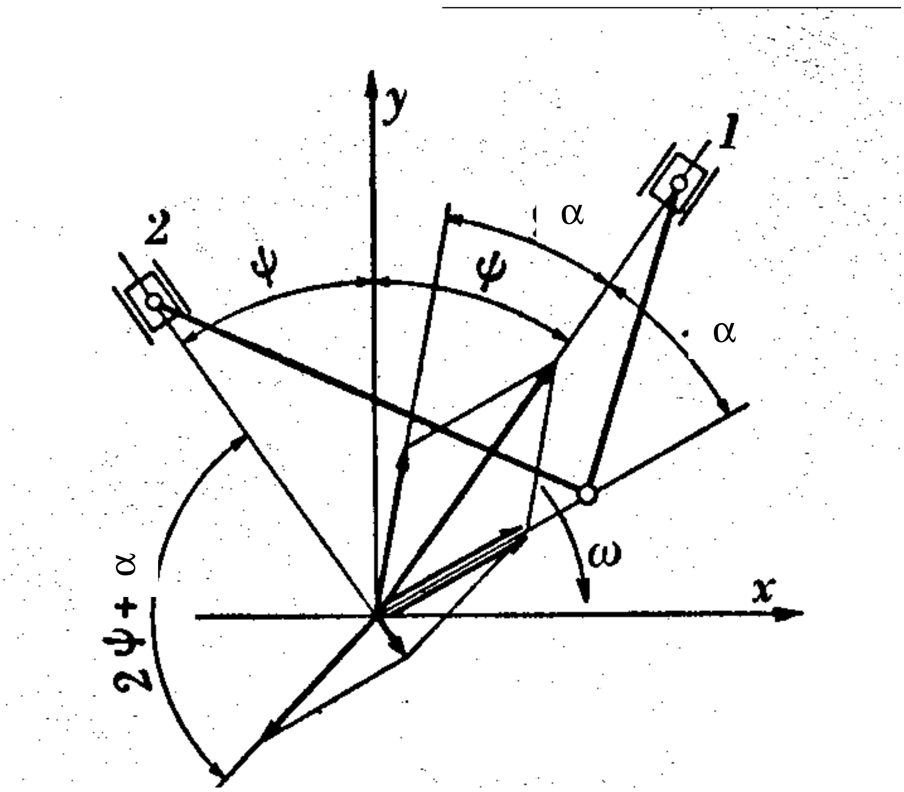
Analogamente si può dimostrare che

$$F_{totale}^{IIordine} = m_a \omega^2 r \lambda \left(\cos 2\alpha + \cos 2\left(\alpha + \frac{2}{3}\pi \right) + \cos 2\left(\alpha + \frac{4}{3}\pi \right) \right) = 0$$

4) il quattro cilindri con manovelle a 180° ha le sole forze d'inerzia del I ordine equilibrate mentre quelle del II si sommano tutte (due bicilindrici a 180°)
5) il sei cilindri in linea con manovelle a 120° ha le risultanti tanto del I ordine, quanto del II equilibrate
6) l'otto cilindri con manovelle a 90° ha pure esso le risultanti del primo e del secondo ordine equilibrati.

Motori a V

Si ricorre in questo caso alla decomposizione di ogni componente della forza d'inerzia con due vettori controrotanti.
Normalmente le bielle di due cilindri appartenenti alle due bancate opposte sono collegati alla medesima manovella, così da ridurre anche la lunghezza longitudinale del motore.



Indichiamo con ψ l'angolo formato dall'asse di un cilindro con la bisettrice dei due assi, con $\alpha_1=\alpha$ e α_2 gli angoli di rotazione della manovella misurati nel verso di ω rispettivamente dagli assi del primo e secondo cilindro. Avremo

Vettori	I ordine	II ordine
modulo	$\frac{1}{2} m_a \omega^2 r$	$\frac{1}{2} m_a \omega^2 r \lambda$
fase (cilindro 1)	$\pm\alpha$	$\pm 2\alpha$
fase (cilindro 2)	$\pm(\alpha + 2\psi)$	$\pm 2(\alpha + 2\psi)$

Per riferire tutti gli angoli all'asse del primo cilindro si deve sottrarre all'angolo calcolato 2ψ

Pertanto l'angolo di rotazione del vettore di ordine n del secondo cilindro, ruotante in verso orario, vale

$$n\alpha_2 - 2\psi = n(\alpha + 2\psi) - 2\psi$$

mentre quello del vettore ruotante in senso antiorario vale

$$-n\alpha_2 - 2\psi = -n(\alpha + 2\psi) - 2\psi$$

Vettori	I ordine	II ordine
modulo	$\frac{1}{2} m_a \omega^2 r$	$\frac{1}{2} m_a \omega^2 r \lambda$
fase (cilindro 1)	$\pm\alpha$	$\pm 2\alpha$
fase (cilindro 2 orario)	α	$2\alpha + 2\psi$
fase (cilindro 2 antiorario)	$-\alpha - 4\psi$	$-2\alpha - 6\psi$

Quindi risultante dei vettori in senso orario

Vettori	I ordine	II ordine
modulo	$m_a \omega^2 r$	$m_a \omega^2 r \lambda \cos\psi$
fase	α	$2\alpha + \psi$

E risultante dei vettori in senso antiorario

Vettori	I ordine	II ordine
modulo	$m_a \omega^2 r \cos 2\psi$	$m_a \omega^2 r \lambda \lvert\cos 3\psi\rvert$
fase	$-\alpha - 2\psi$	$-2\alpha - 3\psi(\pm\pi)$

Per cui, a esempio, un bicilindrico a V di 90° (ψ=45°) ha le forze d'inerzia del I ordine controrotanti nulle, mentre quelle rotanti possono essere equilibrate con una massa di momento statico pari a $m_a r$ posta sul contrappeso.