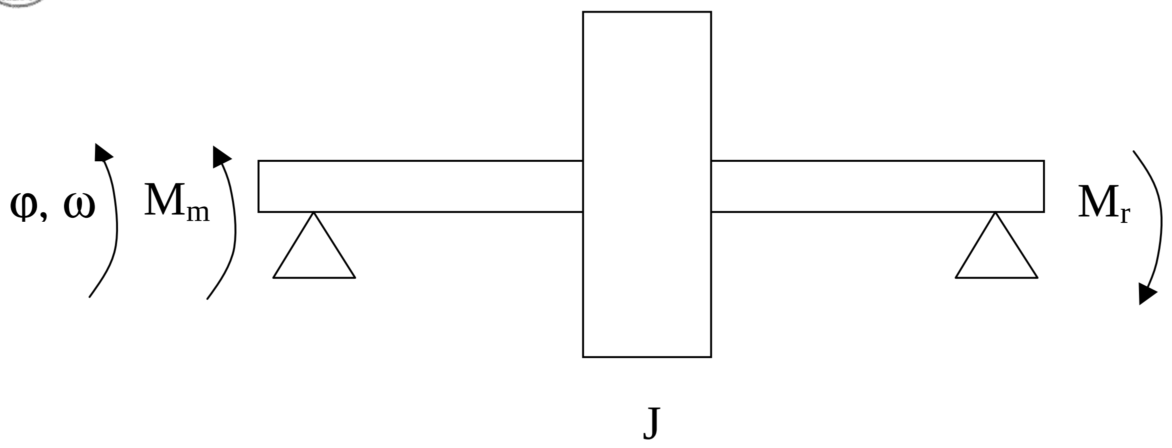


LAGRANGE

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q}+\frac{\partial E_p}{\partial q}=\frac{\delta^* L}{\delta^* q}$$

e sia

$q(t)\equiv\varphi(t)$ e quindi $\dfrac{dq}{dt}=\dot{q}(t)=\dfrac{d\varphi}{dt}=\omega(t)$

Supponiamo che il baricentro del sistema sia sulla traccia dell'asse di rotazione, per cui, mancando altre forze esterne che ammettano energia potenziale:

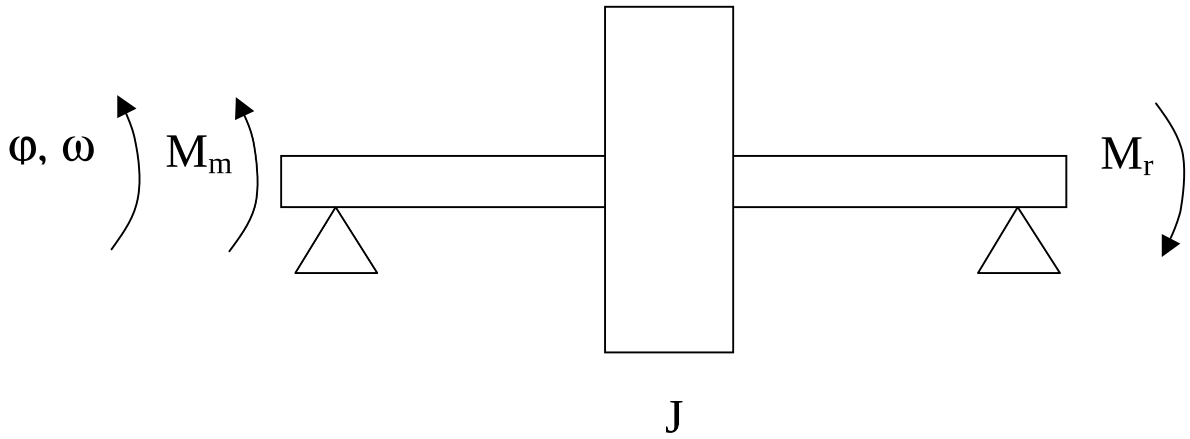
$E_p=k$ con k = costante per cui $\dfrac{\partial E_p}{\partial q}=0$

$$E_c(t)=\frac{1}{2}J\vec{\omega}(t)\times\vec{\omega}(t)=\frac{1}{2}J\left(\omega(t)\right)^2=\frac{1}{2}J\left(\dot{q}(t)\right)^2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}=J\dot{q}(t)\rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right)=J\ddot{q}(t)$$

$$\delta^* L=\vec{M}_m(\omega)\times\delta^*\vec{q}+\vec{M}_r(\omega)\times\delta^*\vec{q}=M_m(\omega)\delta^* q-M_r(\omega)\delta^* q$$

$$J\ddot{q}=M_m(\omega)-M_r(\omega)$$



Principio dei Lavori Virtuali

$$\delta^* L = 0$$

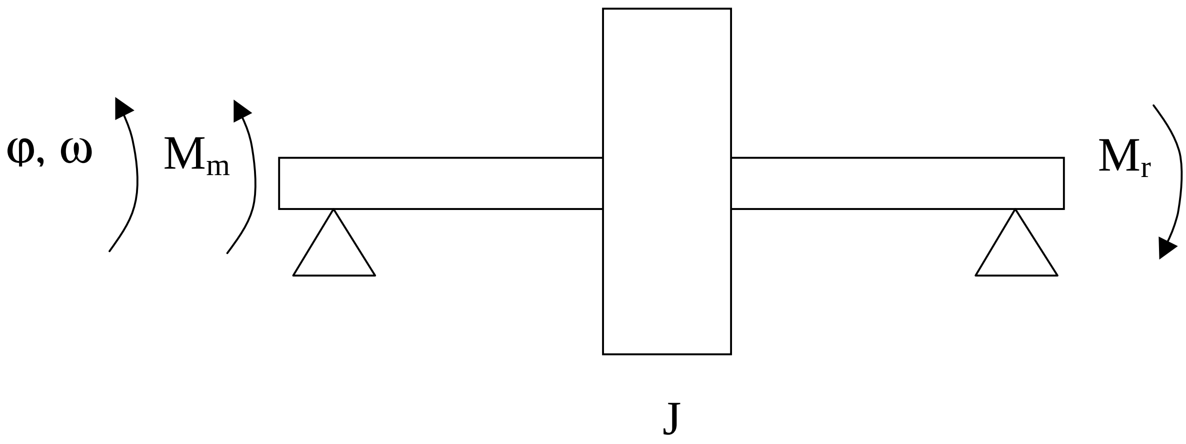
$$\delta^* L = -J\ddot{\varphi}\delta^*\varphi + M_m(\omega)\delta^*\varphi - M_r(\omega)\delta^*\varphi = 0$$

$$J\ddot{\varphi} = M_m(\omega) - M_r(\omega)$$

Equilibri dinamici

$$M_m(\omega) - M_r(\omega) - J\ddot{\varphi} = 0$$

Bilancio di potenze



POTENZA $W = \frac{dL}{dt}$

$$\sum W = \frac{dE_c}{dt} \qquad (1)$$

dove l'energia cinetica totale del sistema vale

$$E_c(t) = \frac{1}{2} J \vec{\omega}(t) \times \vec{\omega}(t)$$

Moto a regime assoluto : $E_c(t) = k$ con k = costante

$$\sum W = 0$$

Moto a regime periodico: $E_c(t) = E_c(t+T)$ con T = periodo, integrando la (1) su un periodo

$$\int_t^{t+T} \sum W dt = E_c(t+T) - E_c(t) = \Delta E_c(T) = 0$$

$$\sum L \Big|_t^{t+T} = 0$$

ma istantaneamente $\frac{dE_c(t)}{dt} \neq 0$

$$\sum \quad = \frac{dE_c}{dt}$$

$$\sum W = \sum_k \vec{F}_k \times \vec{v}_k + \sum_j \vec{M}_j \times \vec{\omega}_j$$

per il generico punto materiale k

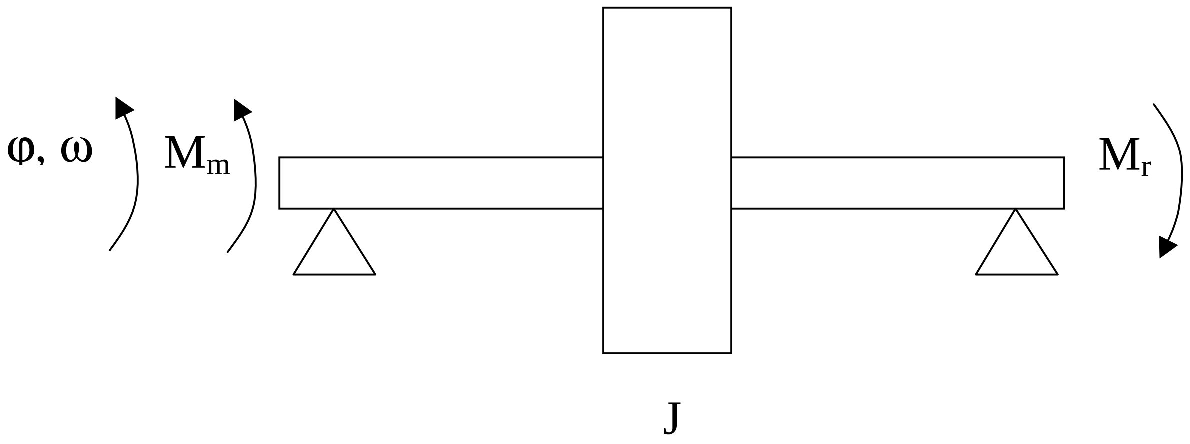
$$E_{ck} = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_k \times \vec{v}_k$$

Per il generico corpo rigido k

$$E_{ck} = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_{Gk} \times \vec{v}_{Gk} + \frac{1}{2}\left[J_{\xi 1k} \vec{\omega}_{\xi 1k} \times \vec{\omega}_{\xi 1k} + J_{\xi 2k} \vec{\omega}_{\xi 2k} \times \vec{\omega}_{\xi 2k} + J_{\xi 3k} \vec{\omega}_{\xi 3k} \times \vec{\omega}_{\xi 3k} \right]$$

Nel piano:

$$E_{ck} = \frac{1}{2} m_k \vec{v}_{Gk} \times \vec{v}_{Gk} + \frac{1}{2} J_{Gk} \vec{\omega}_k \times \vec{\omega}_k$$



$$M_m(\omega)\cdot\omega - M_r(\omega)\cdot\omega = J\ddot{\varphi}\cdot\omega$$

che semplificata per ω

(N.B.la soluzione $\omega = 0$ non interessa la dinamica)

$$M_m(\omega) - M_r(\omega) = J\ddot{\varphi}$$

- Se $M_m(\omega) > M_r(\omega) \Rightarrow \ddot{\varphi} > 0$ la macchina accelera
- Se $M_m(\omega) < M_r(\omega) \Rightarrow \ddot{\varphi} < 0$ la macchina decelera
- Se $M_m(\omega) = M_r(\omega) \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$ quindi ω è costante e la macchina è in moto a regime assoluto.

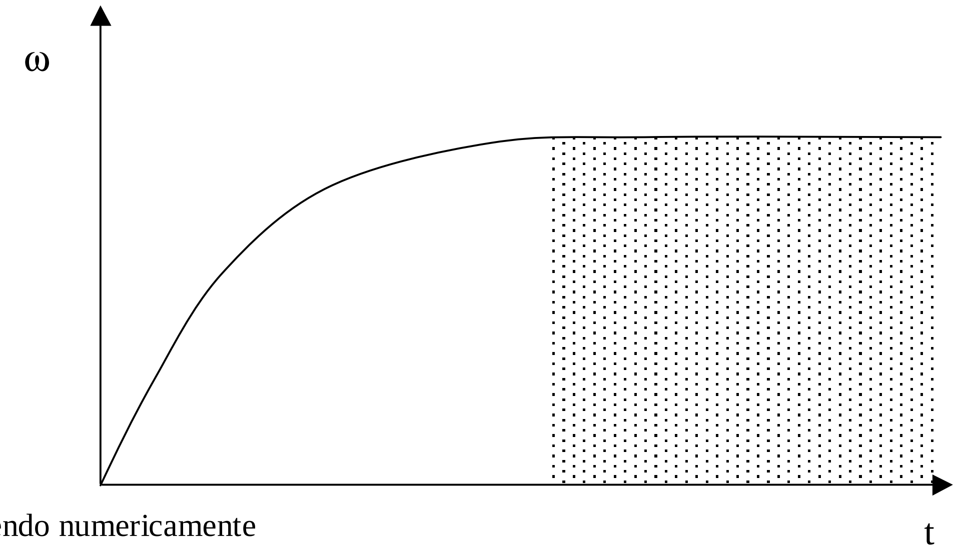
La condizione di regime assoluto può essere definita:

- integrando numericamente nel tempo

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{M_m(\omega) - M_r(\omega)}{J}$$

per cui

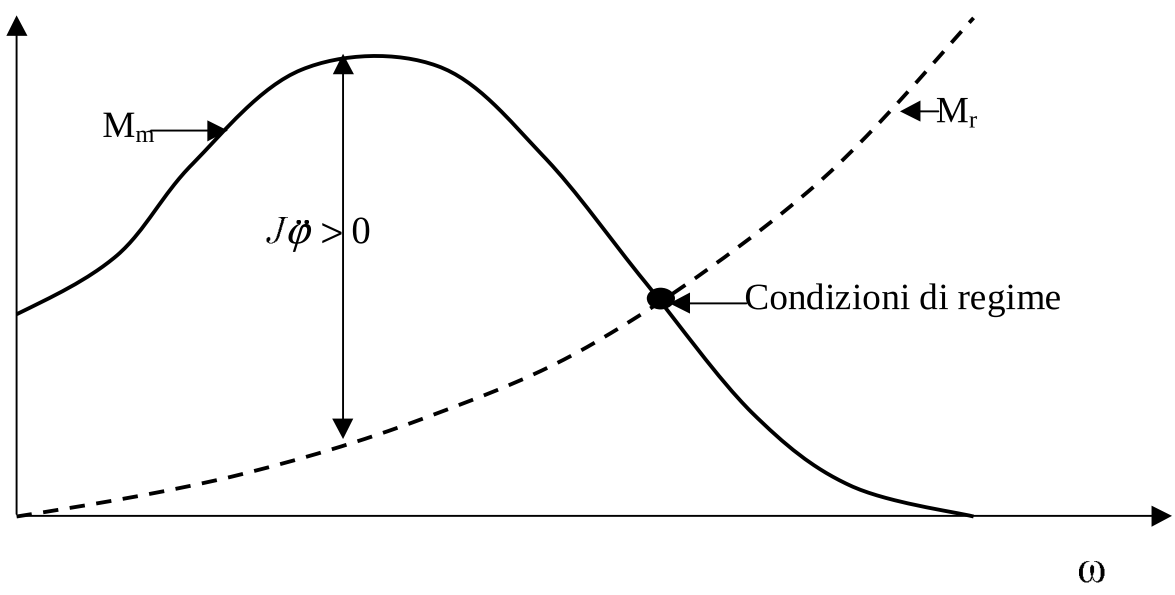
$$\omega(t) = \omega(t_0) + \frac{M_m(\omega) - M_r(\omega)}{J}(t - t_0)$$



- risolvendo numericamente

$$M_m(\omega) - M_r(\omega) = 0$$

- graficamente con la sovrapposizione delle curve caratteristiche



STABILITA' DELLA CONDIZIONE DI REGIME

$$M_m(\omega) - M_r(\omega) - J\ddot{\varphi} = 0$$

Equazione differenziale non lineare a coefficienti non costanti.
Detta ω_0 la velocità di regime studiamo il moto perturbato nell'intorno di quella velocità.

$$M_m(\omega) \cong M_m(\omega_0) + \left(\frac{dM_m}{d\omega}\right)_{(\omega=\omega_0)} (\omega - \omega_0)$$

$$M_r(\omega) \cong M_r(\omega_0) + \left(\frac{dM_r}{d\omega}\right)_{(\omega=\omega_0)} (\omega - \omega_0)$$

$$\left(\frac{dM_m}{d\omega}\right)_{(\omega=\omega_0)} (\omega - \omega_0) - \left(\frac{dM_r}{d\omega}\right)_{(\omega=\omega_0)} (\omega - \omega_0) - J\ddot{\varphi} = 0$$

ponendo

$$\bar{\omega} = \omega - \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 + \bar{\omega} \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\bar{\omega}}$$

$$K_{m,r} = \left(\frac{dM_{m,r}}{d\omega}\right)_{(\omega=\omega_0)}$$

$$J\dot{\bar{\omega}} + (K_r - K_m)\bar{\omega} = 0$$

equazione differenziale lineare a coefficienti costanti di primo ordine, la cui soluzione generale è del tipo

$$\bar{\omega}(t) = Ae^{\lambda t}$$

$$J\lambda A e^{\lambda t} + (K_r - K_m) A e^{\lambda t} =$$

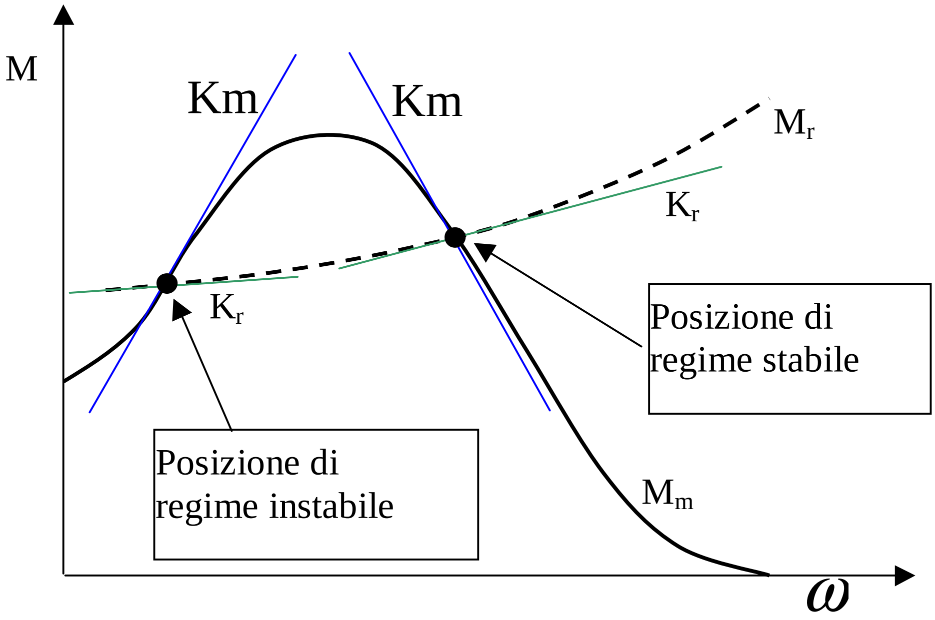
$$(\lambda J + (K_r - K_m)) A e^{\lambda t} = 0 \rightarrow \lambda + \frac{K_r - K_m}{J} = 0$$

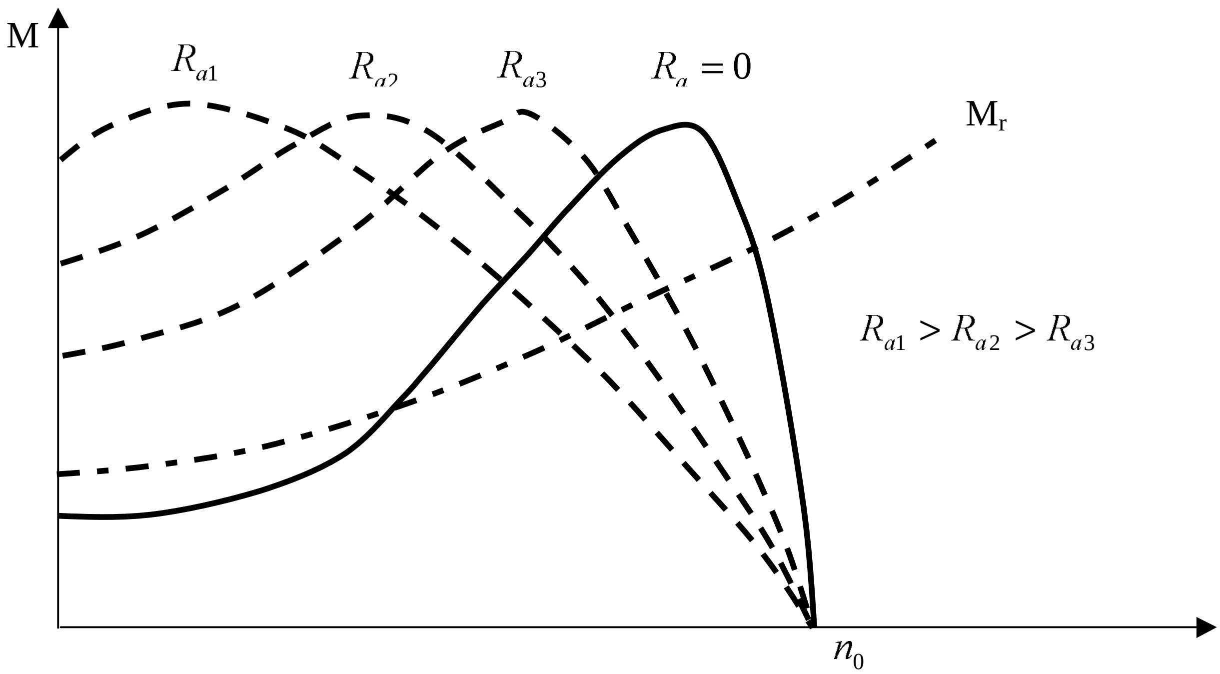
$$\lambda = \frac{K_m - K_r}{J}$$

$$\lambda = \frac{K_m - K_r}{J}$$

$K_m - K_r > 0 \rightarrow K_m > K_r \rightarrow \lambda = \alpha$ Moto instabile

$K_m - K_r < 0 \rightarrow K_m < K_r \rightarrow \lambda = -\alpha$ Moto stabile





Poiché la zona di regime stabile è tra la velocità di coppia massima e quella di sincronismo n_0, vista l'elevata pendenza della curva caratteristica tra queste due velocità, da un punto di vista pratico si considera n_0 come velocità angolare di funzionamento della macchina azionata da un motore elettrico asincrono trifase.