Sistemi a più gradi di libertà: cinematica inversa

Introduzione

La posizione e l'orientamento della terna di estremità di un meccanismo a più gradi di libertà dipendono dalle caratteristiche geometriche della struttura e dalla configurazione dei suoi giunti nel modo descritto nella lezione precedente.
Assai meno evidente è il procedimento, noto sotto il nome di cinematica inversa, con cui determinare quale configurazione deve assumere il meccanismo affinchè la terna di estremità assuma una certa posizione ed un certo orientamento.
Dopo un inquadramento qualitativo della cinematica inversa si risolve il problema per un robot a due gradi di libertà e si introduce la funzione trigonometrica inversa ATAN2(x,y). Si affronta quindi teoricamente la cinematica inversa per una struttura a sei gradi di libertà per terminare con una serie di esempi a tre gradi di libertà.

1. Cinematica inversa

La cinematica inversa affronta il problema statico della ricerca delle relazioni per il calcolo delle variabili di giunto, date la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura del meccanismo a più gradi di libertà e i parametri caratteristici dei giunti e dei segmenti (Fig.1).

Dati una certa posizione e un certo orientamento della terna di estremità della struttura, si tratta di calcolare tutti i possibili insiemi di variabili di giunto che permettono di ottenerli.
I parametri caratteristi dei giunti e dei segmenti vengono definiti durante la modellazione secondo Denavit & Hartenberg della struttura e, per ogni grado di libertà del robot, si avranno tre costanti e una variabile. La posizione e l'orientamento della estremità della struttura dipendono dal valore che le variabili di giunto assumono di volta in volta.

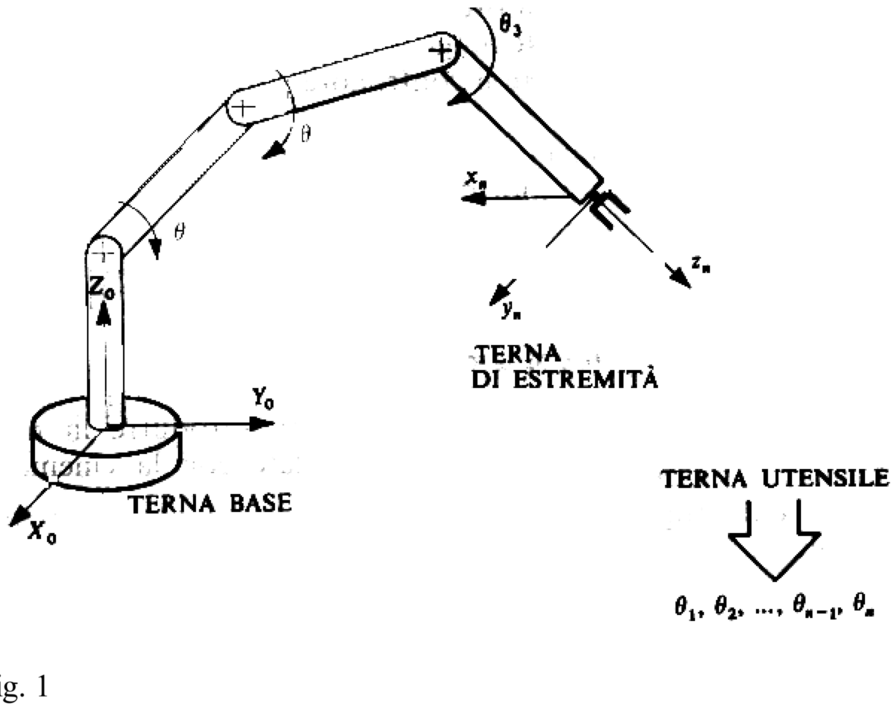


Fig. 1

Nella pratica, la cinematica inversa utilizza come dati di partenza i valori degli elementi della matrice T:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e ricava i valori delle variabili di giunto corrispondenti:

T --> $(q_1,q_2 \ldots ,q_{n-1},q_n)$ <- soluzione 1
$(q_1,q_2 \ldots ,q_{n-1},q_n)$ <- soluzione 2
....
$(q_1,q_2 \ldots ,q_{n-1},q_n)$ <- soluzione k

Con q_i si intende la generica variabile che sarà un angolo (ϑ_i) od una traslazione (d_i) in funzione del tipo di giunto corrispondente (rotatorio o prismatico).
La lezione pecedente si è visto come la posizione e l'orientamento della terna di estremità possa essere espressa sia nello spazio cartesiano (tramite la matrice T) sia in quello dei giunti (tramite le variabili di giunto). La cinematica diretta trasforma un punto dello spazio dei giunti nella corrispondente posizione ed orientamento della terna di estremità; quella inversa al contrario, data la posizione e l'orientamento della terna di estremità, determina, tutti i punti corrispondenti nello spazio dei giunti.
Nelle applicazioni pratiche la cinematica inversa è di gran lunga più importante di quella diretta.
Il programmatore ragiona infatti nello spazio tridimensionale cartesiano, mentre il controllo elettronico del robot opera in quello dei giunti. In altre parole ciò significa che il programmatore impone al robot movimenti di traslazione e di rotazione rispettivamente lungo od attorno agli assi del sistema di riferimento cartesiano adottato mentre il controllore può agire solo a livello dei giunti.
Le relazioni della cinematica inversa diventano pertanto di importanza fondamentale permettendo al controllore del robot di tradurre i movimenti desiderati dal programmatore nei corrispondenti spostamenti da imporre ai singoli giunti.

2. - Cinematica inversa per un sistema piano a due gradi di libertà

Il sistema a due gradi di libertà (Fig.2) permette di introdurre in modo semplificato alcune considerazioni e definizioni correlate con la cinematica inversa.

Il problema cinematico inverso per un sistema a due gradi di libertà piano è quello di ricavare i valori delle variabili di giunto che permettono di posizionare l'estremità della struttura (O_2) nella posizione specificata dalle coordinate x,y.
Si tratta di risolvere le equazioni cinematiche:

$x = f(q_1,q_2)$
$y = f(q_1,q_2)$

esplicitando le variabili di giunto:

$q_1 = f(x,y)$
$q_2 = f(x,y)$

Tale soluzione si presenta complessa quando, come per il sistema considerato, le equazioni cinematiche non sono lineari. Proprio per questo è possibile di affermare che il problema cinematico inverso si presenta di soluzione molto più complessa di quello diretto.

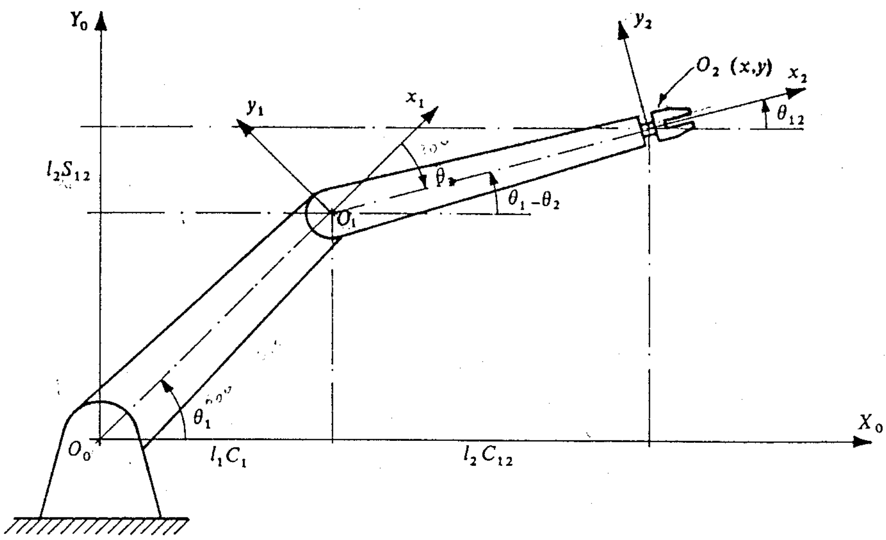


Fig. 2

Esistenza della soluzione

Il problema cinematico inverso, a differenza di quello diretto, può, per particolari posizioni dell'estremità O_2, non ammettere soluzione.
L'insieme di tutti i punti in cui il problema cinematico inverso ammette soluzione coincide con la porzione di piano raggiungibile dall'estremità del sistema e definisce la sua area di lavoro.

La Fig.3 mostra che, quando i due bracci del robot hanno lunghezze l_1,l_2 diverse, l'area di lavoro coincide con la corona circolare di raggio esterno l_1+l_2 e interno l_1-l_2. Quando i due bracci hanno uguale lunghezza tale area sarà il cerchio di raggio esterno l_1+l_2 .
Quanto detto vale nell'ipotesi di giunti ideali che permettono rotazioni di 360°. Nella realtà i giunti permettono raramente rotazioni così ampie e ciò provoca una riduzione dell'estensione dell'area di lavoro.

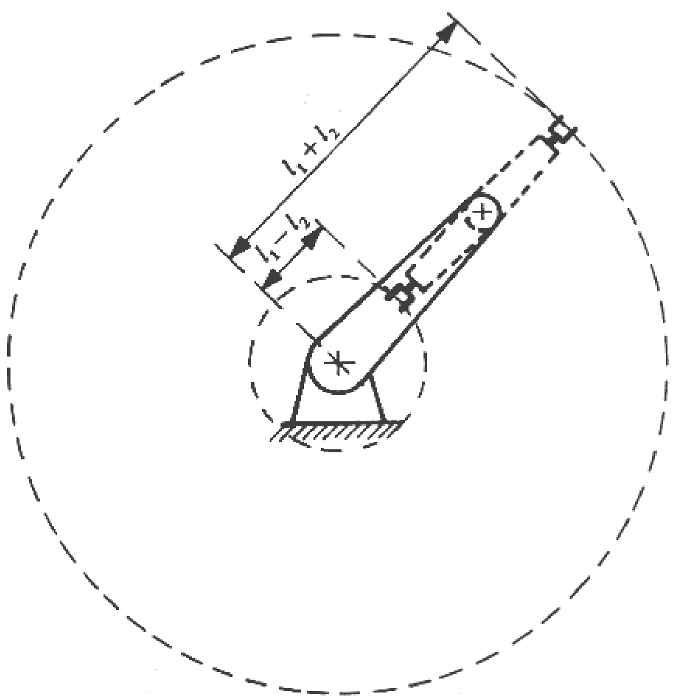
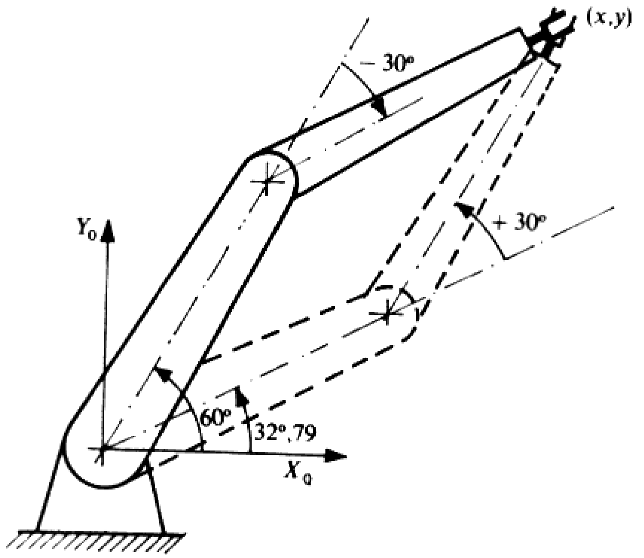


Fig. 3

Molteplicità della soluzione

Il problema cinematico inverso molto spesso ammette più di una soluzione nel senso che possono esistere più configurazioni della struttura che portano la sua estremità nella medesima posizione.



Si consideri ad esempio la Fig.4 in cui si vede come la pinza possa essere portata nello stesso punto P del piano con due diverse coppie di valori per le variabili di giunto.

Fig. 4

Strutture ridondanti

Al fine di posizionare un punto nel piano, i sistemi con più di due gradi di libertà sono da considerarsi ridondanti, in quanto hanno a disposizione più possibilità di movimento delle due necessarie per posizionare un punto nel piano. Il problema cinematico inverso ammette, nel caso di strutture ridondanti, una infinità di soluzioni. Tale affermazione può essere compresa osservando il robot di Fig.5 che ha a disposizione infinite configurazioni della struttura per raggiungere il punto P.

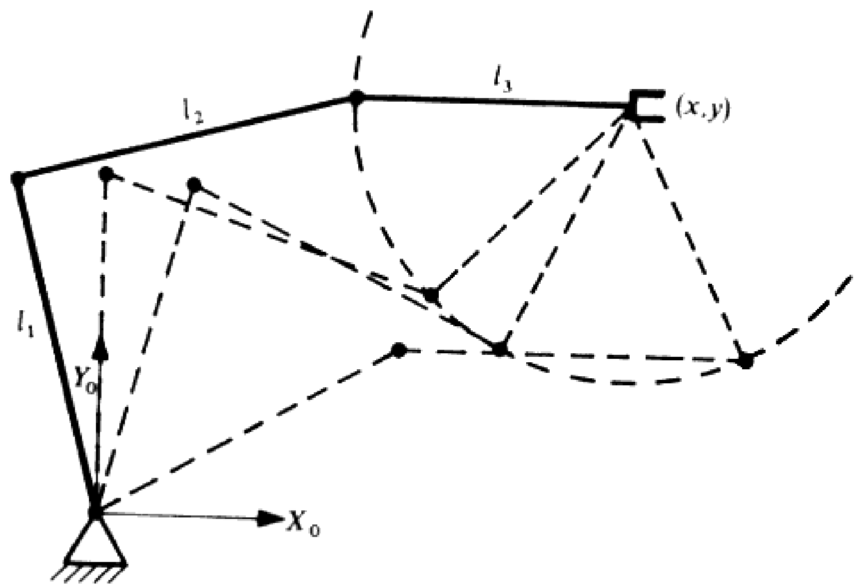


Fig. 5

Cinematica inversa

Le equazioni cinematiche per il sistema considerato sono state ricavate la lezione precedente:

$x = l_2 C_{12} + l_1 C_1$
$y = l_2 S_{12} + l_1 S_1$

Risolvere il problema cinematico inverso significa esplicitare le variabili θ_1 e θ_2:

$\vartheta_1 = f_1(x,y)$
$\vartheta_2 = f_2(x,y)$

ottenendo in tal modo due relazioni che, per ogni posizione x, y occupata dalla pinza, permettano di determinare gli angoli di rotazione θ_1 e θ_2 dei rispettivi giunti.
Si cominci con l'esplicitare θ_2; elevando al quadrato e quindi sommando le due equazioni si ottiene:

$$x^2 + y^2 = l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 (C_{12} C_{11} + S_{12} S_1)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi si ha:

$$\sin(\alpha + \beta) = sen\alpha \cos\beta + sen\beta \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta + sen\alpha sen\beta$$

si ottiene quindi:

$$x^2 + y^2 = l_2^2 + l_1^2 + 2 l_1 l_2 (C_2)$$

da cui è possibile ricavare C_2 e S_2:

$$C_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}$$
$$S_2 = \pm\sqrt{(1 - C_2^2)}$$

Utilizzando le funzioni trigonometriche inverse, si risale ai due possibili valori di :

$$\vartheta_{2a} = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2 l_1 l_2}\right)$$
$$\vartheta_{2b} = -\vartheta_{2a}$$

I valori di ϑ_1, noti C_2 ed S_2, si determinano applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, dalle equazioni cinematiche ottenendo:

$$x = l_2 (C_1 C_2 - S_1 S_2) + l_1 C_1$$
$$y = l_2 (S_1 C_2 + C_1 S_{2)} + l_1 S_1$$

Ricavando C_1 dalla prima equazione

$$C_1 = \frac{x + l_2 S_1 S_2}{l_2 C_2 + l_1}$$

e sostituendolo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene S_1:

$$S_1 = \frac{y(l_2 C_2 + l_1) - l_2 x S_2}{(l_1 + l_2 C_2)^2 + l_2^2 S_2^2}$$

Sostituendo nell'equazione i due possibili valori di S_2 e quello di C_2, si ricavano i corrispondenti valori di S_1: noti questi è possibile calcolare anche C_1 e quindi risalire al valore di utilizzando le funzioni trigonometriche inverse.

Esempio

Dato il sistema piano a due gdl di Fig.4, calcolare il valore delle due variabili di giunto quando:

x = 733.013 [mm]
y = 769.615 [mm]

sapendo che:

l_1= 600 [mm]
l_2= 500 [mm]

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

C_2= 0.866

S_2= +/- 0.5

da cui si ricavano i due possibili valori di ϑ_2:

$$\vartheta_2 = \pm 30°$$

È ora possibile ricavare i due valori di ϑ_1:

ϑ_2 = -30° -> S_1= 0.866, C_1= 0.500 -> ϑ_1 = 60°

ϑ_2 = 30° -> S_1= 0.542, C_1= 0.840 -> ϑ_1 = 32.79°

Le due coppie di angoli che permettono di portare l'estremità della struttura nel punto indicato sono (Fig.6):

ϑ_1 = 60 °	ϑ_2 = -30°	prima soluzione
ϑ_1 = 32.79 °	ϑ_2= 30°	seconda soluzione

3 - La funzione ATAN2

La risoluzione del problema cinematico inverso comporta un pesante utilizzo delle funzioni trigonometriche inverse.
Questa necessità si scontra col fatto che le funzioni trigonometriche (seno, coseno e tangente) non ammettono funzione inversa univoca. Infatti, rappresentando in ascissa gli angoli ed in ordinata il valore della funzione (Fig.7) si vede come, per tutte e tre, ad ogni valore di y corrispondano infiniti angoli.

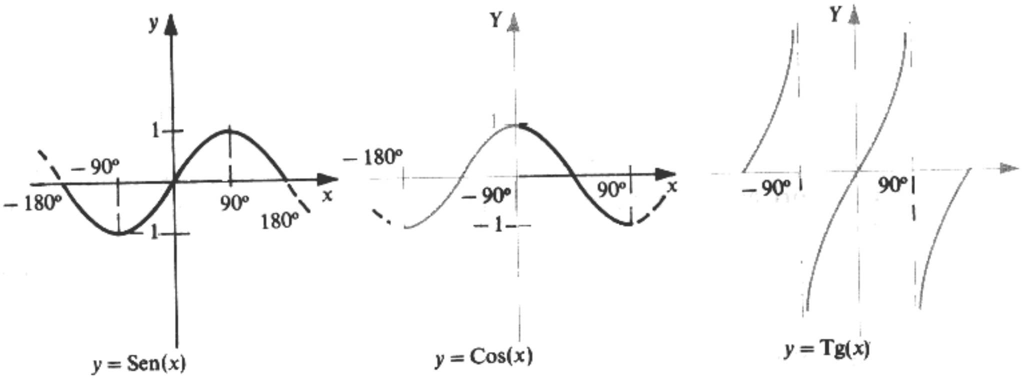


Fig. 6

Nell'ambito della robotica l'intervallo di variazione interessante per le variabili di giunto angolari è limitato a
quello compreso tra -180° e 180°, in quanto rotazioni di un angolo giro non modificano la configurazione della struttura.
Rimane comunque il fatto che, anche all'interno di questo modesto intervallo, dato un valore della funzione trigonometrica è impossibile risalire in modo univoco all'angolo. Per individuare l'angolo è infatti necessario conoscere i valori di due funzioni trigonometriche. Ad esempio conoscendo il seno e il coseno di un angolo si riesce a ricavare, rimanendo all'interno del campo stabilito, in modo univoco l'angolo .
Le funzioni trigonometriche inverse (ARCSEN(x), ARCCOS(x), ARCTAN(x)) oltre alla non univocità presentano anche il problema dell'accuratezza con cui determinano gli angoli.
La funzione ARCCOS(x) (Fig.8a) ha una tangente verticale quando l'angolo assume i valori 180°, 0° e -180° e, in tali zone, la accuratezza con cui fornisce l'angolo è scarsa.
La funzione ARCSEN(x) (Fig.8b) presenta identico problema quando l'angolo vale -90° o 90°.
La funzione ARCTAN(x) (Fig.8c) non è definita quando l'angolo vale -90 ° o 90° e, per valori nell'intorno di questi, non garantisce una sufficiente accuratezza.

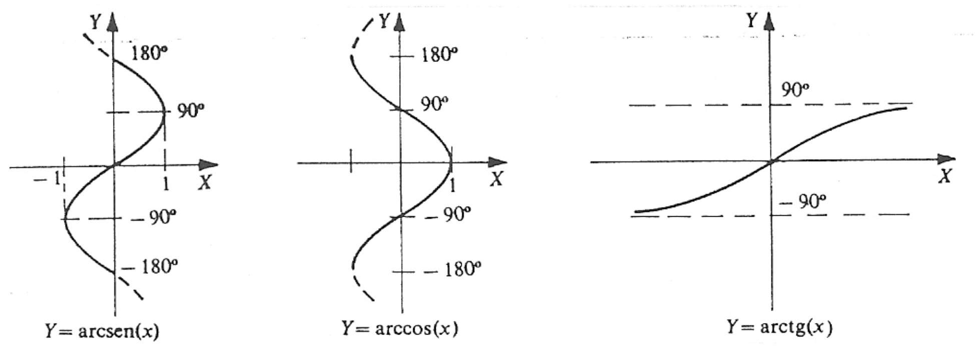


Fig. 7

Per ovviare a questi problemi si è introdotta la funzione trigonometrica inversa ATAN2(y,x), concettualmente simile alla ARCTAN(x).

La funzione ATAN2(y,x) calcola l'angolo utilizzando due argomenti. Tali argomenti possono essere assimilati all'ascissa e all'ordinata di un punto. Il valore restituito dalla ATAN2(y,x) è l'angolo, positivo in verso antiorario, compreso tra il semiasse delle ascisse positive e il segmento congiungente l'origine con il punto di coordinate x,y (Fig.9).
I vantaggi dell'utilizzo della funzione ATAN2(y,x) sono la determinazione univoca dell'angolo corrispondente agli argomenti x,y nell'intervallo da -180 ° a 180° e l'accuratezza uniforme in tutto il campo di definizione.

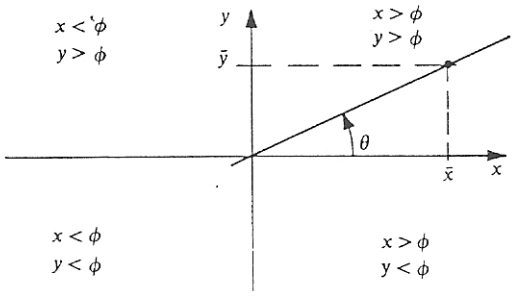


Fig. 8

4 - Cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà

La cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà si presenta in genere complessa poiché le difficoltà segnalate al paragrafo 2 vengono aumentate dal maggior numero di variabili di giunto.
Le equazioni cinematiche si presentano nella forma:

$$T = f(q_1,q_2, \dots ,q_{n-1},q_n)$$

dove con T si indica la trasformazione omogenea che descrive la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura rispetto a quella di riferimento.
Uguagliando la matrice T con la matrice P&O i cui elementi descrivono una particolare posizione ed orientazione della terna di estremità, si ottengono le dodici equazioni da cui partire per risolvere la cinematica inversa:

$$\begin{array}{lll} n_x = P\&O[1,1] & n_y = P\&O[2,1] & n_z = P\&O[3,1] \\ o_x = P\&O[1,2] & o_y = P\&O[2,2] & o_z = P\&O[3,2] \\ a_x = P\&O[1,3] & a_y = P\&O[2,3] & a_z = P\&O[3,3] \\ p_x = P\&O[1,4] & p_y = P\&O[2,4] & p_z = P\&O[3,4] \end{array}$$

In generale queste equazioni sono funzione di più di una variabile di giunto e si presentano non lineari a causa dei giunti rotoidali che introducono nelle relazioni le funzioni trigonometriche. Queste loro caratteristiche rendono particolarmente difficile, quando non del tutto impossibile, esplicitare le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi della matrice T:

$$q_1 = f(P\&O)$$
$$.. \quad ....$$
$$q_6 = f(P\&O)$$

<u>Risolubilità di una struttura</u>

Nel caso più generale si dovrà risolvere un sistema di sei equazioni trigonometriche in seno e coseno in sei incognite, rappresentate dalle variabili di giunto.
Quando non si riuscirà a risolvere analiticamente tale sistema, sarà impossibile ottenere delle relazioni che diano in forma esplicita le variabili di giunto in funzione dei valori degli elementi di P&O e la struttura del robot verrà detta non risolubile.
La cinematica inversa di un robot non risolubile può essere affrontata solo con tecniche di calcolo numerico che esigono un notevole carico computazionale. Questo costringe ad utilizzare un elaboratore di controllo più veloce e, spesso, ad accettare tempi più lunghi per la risoluzione della cinematica inversa (si sottolinea comunque che la potenza di calcolo dei migliori controllori per robot riescono comunque a padroneggiare senza problemi la complessità computazionale associata al problema). A fronte di questi aspetti negativi le tecniche numeriche offrono il non trascurabile vantaggio di potere essere applicate a tutte le strutture, indifferentemente dalle loro caratteristiche. Per
questo è possibile prevedere in futuro una loro diffusione quando saranno disponibili calcolatori sufficientemente veloci da garantire il calcolo delle soluzioni in tempo reale.
Tuttavia, per ora, in ambito industriale si utilizzano praticamente solo strutture per le quali sia possibile risolvere la cinematica inversa in modo esplicito.
Questa necessità ha spinto a ricercare quali caratteristiche debbano essere soddisfatte dalla struttura affinché la sua cinematica inversa ammetta soluzioni esplicite.

Condizione sufficiente affinché la struttura di un robot a sei gradi di libertà sia risolubile è che gli assi di rotazione di tre giunti consecutivi si incontrino in uno stesso punto, per tutti i possibili valori delle variabili di giunto.

Il punto di incontro dei tre assi può anche essere improprio e quindi anche quando tre giunti rotoidali consecutivi hanno gli assi di rotazione paralleli la struttura sarà risolubile.
Si ricorda che la condizione è solo sufficiente per cui possono esistere delle strutture che, pur non godendo di questa proprietà, sono risolubili.
Tutte le strutture che utilizzano un polso sferico soddisfano la condizione sufficiente sopra riportata e questo spiega la loro ampia diffusione in ambito industriale. Osservando la Fig.10 si può intuire perché queste strutture siano sempre risolubili.
Essendo nota la matrice P&O si conoscerà la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto al riferimento.
Risulta quindi possibile calcolare le coordinate di O_5 (x',y',z') trovandosi infatti sul prolungamento, in direzione negativa, dell'asse z_6, distante d_6 da O_6:

$$x' = p_x - a_x d_6$$
$$y' = p_y - a_6 d_6$$
$$z' = p_z - a_z d_6$$

La posizione di O_5 è tuttavia funzione solo dei primi tre gradi di libertà e quindi la cinematica inversa può essere scissa in due sottoproblemi in tre incognite.
Ricordando la formulazione della cinematica diretta come prodotto tra la matrice di posizionamento e quella di orientamento:

$$T = T_p T_o$$

si capisce come sia possibile ricavare le relazioni che danno i valori delle prime tre variabili di giunto utilizzando le seguenti equazioni:

$$Tp[1,4] = x'$$

Tp[2,4] = y'
Tp[3,4] = z'

Avendo ridotto il sistema a sole tre incognite si può essere certi di esplicitare le variabili di giunto essendo l'equazione risolvente al massimo di quarto grado (quando le relazioni sono in seno e coseno devono essere risolte utilizzando la tangente di $\frac{\vartheta}{2}$) e, come tale, analiticamente risolubile.

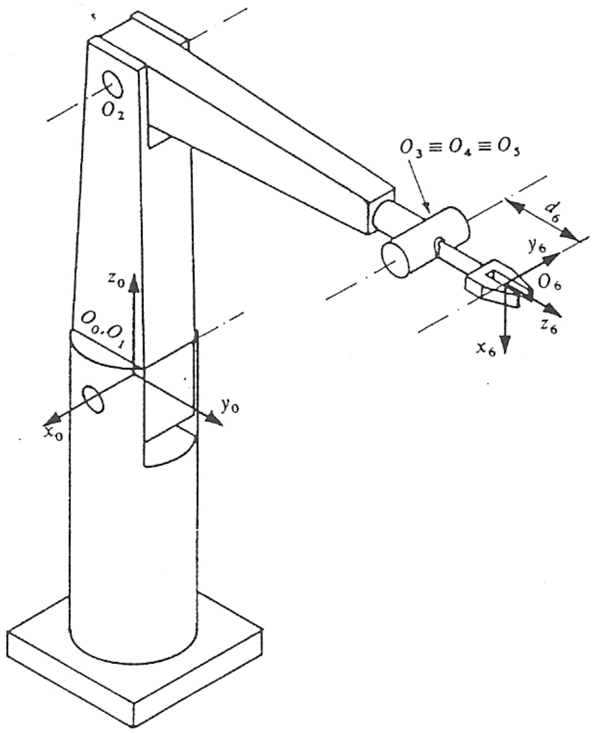


Fig. 9

Calcolati i valori delle prime tre variabili di giunto la matrice T_p è da considerarsi completamente nota e quindi varrà la relazione:

$$T_o = (T_p)^{-1}\,P\&O$$

che rappresenta un altro problema in tre incognite risolvendo il quale è possibile ricavare anche i valori delle variabili di giunto corrispondenti agli ultimi tre gradi di liberta.

Esistenza della soluzione

Il problema della cinematica diretta ammette sempre una soluzione in quanto, dato un certo valore a tutte le variabili di giunto, la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura sono sempre completamente determinati.
Il problema della cinematica inversa non sempre ammette, al contrario, soluzione. L'esistenza o la non esistenza della soluzione permette di definire rigorosamente lo spazio (volume) di lavoro.

Lo spazio di lavoro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità. Lo spazio di lavoro destro è l'insieme di tutti i punti raggiungibili dalla terna di estremità con orientamento arbitrario.

Limiti e caratteristiche del campo di lavoro sono determinate dai valori dei parametri caratteristici dei segmenti della struttura e dal campo di variazione delle variabili di giunto. In particolare i giunti rotoidali difficilmente permettono rotazioni complete (360°), mentre le traslazioni permesse da quelli prismatici sono limitate dalla necessità di garantire una adeguata rigidezza alla struttura.

<u>Molteplicità delle soluzioni</u>

Il problema cinematico inverso è caratterizzato, in molti casi, dalla molteplicità delle soluzioni, cioè dalla possibilità che un certo numero di configurazioni diverse della struttura portino la terna di estremità nella medesima posizione con lo stesso orientamento.
Anche le strutture di comune impiego in ambito industriale possono avere più soluzioni al problema cinematico inverso.
Si consideri per ora separatamente il posizionamento e l'orientazione della terna di estremità:

<u>posizionamento</u>: la struttura antropomorfa permette di raggiungere lo stesso punto dello spazio con ben quattro diverse configurazioni della struttura (Fig.11): braccio destro con gomito alto e basso, braccio sinistro con gomito alto e basso.
Lo SCARA, così come il cilindrico, ha invece a disposizione solo le due possibilità di braccio destro e sinistro (Fig.12).

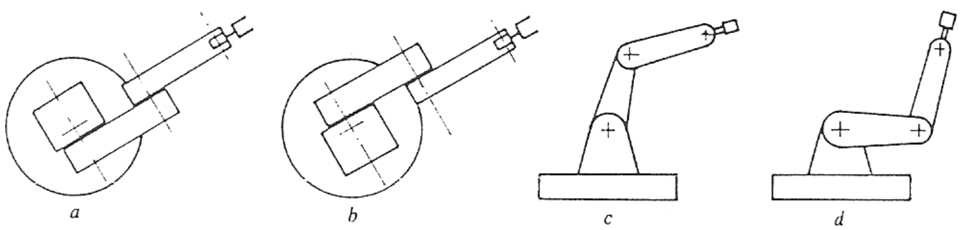


Fig. 10

<u>orientazione</u>: il polso sferico permette di ottenere la stessa orientazione con due diverse configurazioni della struttura. Si immagini di avere la configurazione di Fig.13a e di cercare gli altri valori delle variabili di giunto che danno lo stesso orientamento alla terna di estremità. Si ruoti allo scopo il giunto 4 di 180°, il giunto 5 lo si porti da $\vartheta_5 a - \vartheta_5$, e si ruoti il sesto di 180 ° e si otterrà la configurazione cercata (Fig.13b).

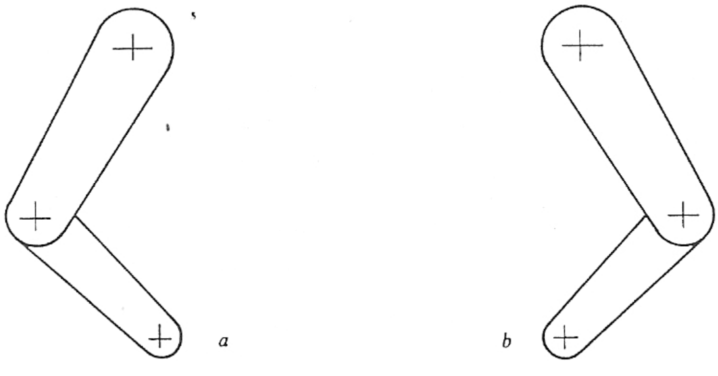


Fig. 11

Considerando una struttura completa a sei gradi di libertà il numero di configurazioni che permettono di ottenere la stessa posizione ed orientamento della terna di estremità aumentano.
Nel caso di robot che utilizzano un polso sferico il numero di soluzioni al problema cinematico inverso sarà il doppio di quelle permesse dai primi tre gradi di libertà. Questo perché ogni configurazione dei primi tre giunti genera due diverse soluzioni al problema cinematico inverso tenendo conto delle due possibili disposizioni dei gradi di libertà del polso.

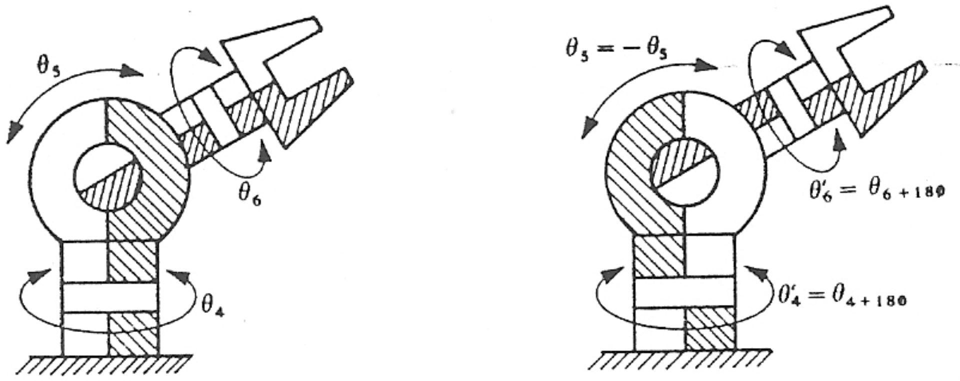


Fig. 12

Il numero di soluzioni dipende, a parità di gradi di libertà, dalle caratteristiche della struttura. In generale si può
affermare che maggiore è il numero di parametri caratteristici non nulli e maggiore sarà il numero di soluzioni al problema della cinematica inversa.

Strutture ridondanti e incomplete

I robot con più di sei gradi di libertà sono detti ridondanti in quanto hanno a disposizione più possibilità di movimento di quante ne servano per posizionare ed orientare nello spazio un oggetto. Questo significa che, data una certa posizione ed orientamento della loro terna di estremità, esisteranno una infinità di soluzioni al problema cinematico inverso.
Tali strutture sono comunque quasi assenti in ambito industriale. Molto diffuse sono invece le strutture incomplete, cioè quelle con meno di sei gradi di libertà che vengono utilizzate quando non è indispensabile disporre di tutte le possibilità di orientamento.

5 - Esempi di cinematica inversa

Gli esempi riguardano strutture con le stesse caratteristiche di quelle proposte nella lezione precedente dal momento che la soluzione della cinematica inversa presuppone la conoscenza delle relazioni di quella diretta.
Il procedimento risolutivo del problema cinematico inverso non si presta ad essere codificato in una serie di regole che, applicate meccanicamente e rigorosamente, permettano di arrivare alla soluzione (come per la cinematica diretta). Per questo motivo i procedimenti esposti nel seguito devono essere considerati solo come esempi e suggerimenti in quanto in generale la metodica di risoluzione del problema cinematico inverso non è univoca.

Trovandosi di fronte a strutture semplici il migliore sistema per risolvere la cinematica inversa è di studiare geometricamente la struttura e quindi di utilizzare le equazioni della cinematica diretta che sembrano più opportune Con un minimo di esperienza la via per raggiungere la soluzione risulta in questi casi praticamente sempre immediata.
Per strutture complesse, in cui non è semplice capire intuitivamente le relazioni tra gli spostamenti dei giunti e la posizione e l'orientamento della terna di estremità esistono più schemi risolutivi che propongono un indirizzo nella ricerca delle soluzioni.
Il metodo che verrà utilizzato nel seguito è dovuto principalmente all'americano R. Paul [1981] e propone una serie di manipolazioni della equazione cinematica nel tentativo di isolare alcune relazioni facilmente risolubili.
Nel caso più generale si conosceranno gli elementi della trasformazione omogenea (P&O) che descrive la posizione e l'orientamento della terna di estremità rispetto al riferimento. Tale matrice sarà il risultato del prodotto delle sei matrici Ai:

$$T = A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5\, A_6 \qquad [k = f(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)]$$

Uguagliando membro a membro le due matrici si ottengono dodici equazioni in cui il termine a sinistra è una costante mentre quello a destra è funzione delle variabili di giunto.
In casi semplici, come quello di strutture a tre gradi di libertà specializzate nel posizionamento o nell'orientamento di oggetti si avrà a che fare con un numero di relazioni inferiore.
Più precisamente si avranno a disposizione tre equazioni se il problema è di posizionamento (sottomatrice di posizione, quarta colonna) e nove se è di orientazione (sottomatrice di orientamento, prime tre colonne).
In alcuni casi felici può darsi che qualcuna di queste equazioni sia facilmente risolubile, ad esempio quando contiene una sola variabile di giunto che può essere esplicitata in modo univoco.
Quando non si riesce ad esplicitare nessuna variabile di giunto, il metodo di Paul, consiglia di premoltiplicare o di postmoltiplicare l'equazione cinematica per l'inversa della matrici A_1 o A_6, rispettivamente quella a sinistra e a destra del secondo membro.
Si ottengono cosi due relazioni:

$$A_1^{-1}P\&O = = A_2\, A_3\, A_4\, A_5\, A_6 \qquad [g(q_1) = f(,q_2,q_3,q_4,q_5,q_6)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto alla prima, e:

$$P\&OA_6^{-1} = = A_1\, A_2\, A_3\, A_4\, A_5 \qquad [g(q_1) = f(q_1,q_2,q_3,q_4,q_5,)]$$

che esprimono la posizione e l'orientamento della quinta terna rispetto al riferimento.
Ciascuna delle due equazioni matriciali così ottenute genera dodici equazioni tra cui ricercarne qualcuna facilmente risolubile.
In caso di ulteriore insuccesso si può procedere portando a sinistra un'altra matrice Ai mediante una premoltiplicazione (la matrice dovrà essere quella a sinistra del secondo membro) o una postmoltiplicazione (e sarà quella a destra del secondo membro).
Nell'ipotesi che la struttura di cui si cerca la soluzione al problema cinematico inverso sia caratterizzato da un polso sferico si ha la certezza di riuscire, con un appropriato numero di premoltiplicazioni e di postmoltiplicazioni, ad individuare delle relazioni che permettono di esplicitare semplicemente le variabili di giunto.
Va sottolineato che, una volta esplicitata una variabile di giunto, questa è determinabile e quindi tutti gli elementi della matrice A corrispondente possono essere calcolati. In tal modo, diminuendo il numero di variabili in gioco, la ricerca di equazioni che permettano di esplicitare le variabili di giunto rimanenti risulta semplificato.

Se la spiegazione teorica della metodologia risolutiva risultasse complicata, il modo migliore per comprenderla è quello di seguire la risoluzione degli esempi e solo dopo rileggere questa parte.
Si ricorda ancora che esistono altri approcci altrettanto validi alla soluzione del problema cinematico inverso e soprattutto, che queste tecniche si limitano a fornire solo degli indirizzi di carattere generale. Infatti la soluzione può sempre essere ottenuta con molte modalità diverse fra le quali solo l'intuito e l'esperienza permettono di destreggiarsi agevolmente. Quanto detto risulta ancora più vero per la risoluzione delle strutture che non soddisfano la condizione sufficiente per la risolubilità.

5.1 – Sistema piano a due gradi di libertà

Un robot piano a due gradi di libertà può soltanto posizionare gli oggetti in un piano. Per poterli anche orientare è necessario un terzo grado di libertà che permetta di ruotare le parti manipolate attorno ad un asse perpendicolare al piano di lavoro.
Mancando il terzo grado di libertà l'orientamento della terna di estremità del robot è fissata dalla posizione della sua origine . Fissato il punto O_2 infatti, la terna potrà assumere solo due diverse orientazioni, corrispondenti alle due possibili configurazioni della struttura. Questa affermazione è valida in generale, ma esiste la singolarità dell'origine O della terna base, punto nel quale , quando i due bracci hanno lunghezze uguali, la terna di estremità può essere arbitrariamente ruotata attorno ad un asse verticale.
Per quanto riguarda la soluzione della cinematica inversa e il relativo esempio numerico si può fare riferimento al paragrafo 2.

5.2 – Robot cilindrico a tre gradi di libertà

Si consideri il robot cilindrico di fig. 13 e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

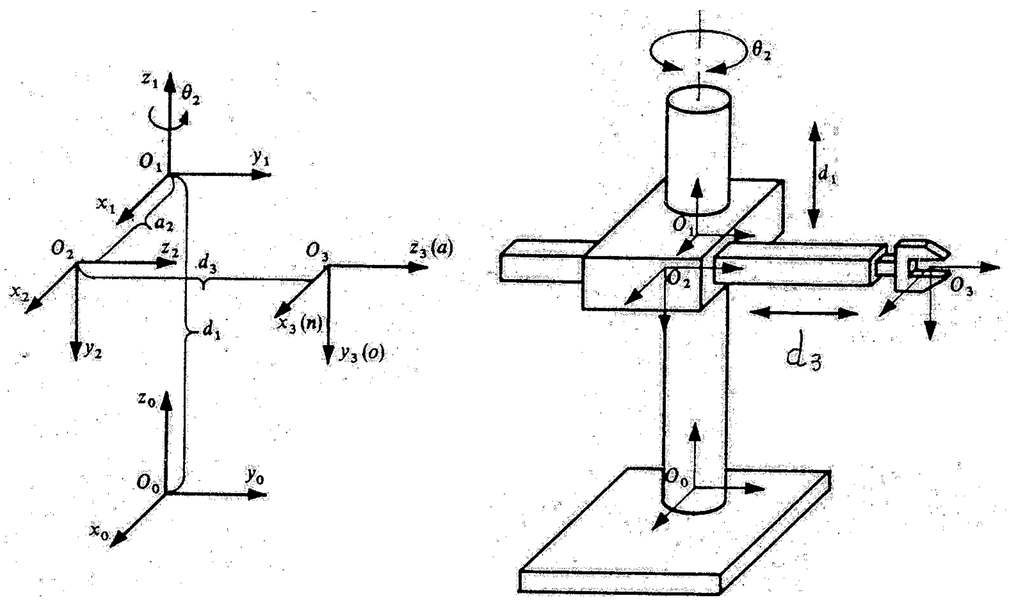


Fig. 13

Un robot a tre gradi di liberà può soltanto posizionare degli oggetti nello spazio. Si tratta quindi, note le coordinate
p_x, p_y ,p_z di O_3 (coincidenti con quelle della pinza), di calcolare tutti i corrispondenti valori della variabile di giunto.

Aggiungendo a valle di questa struttura un polso sferico si guadagna la possibilità di orientare arbitrariamente gli oggetti senza modificare le coordinate di O_3. Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato,come la prima delle due tappe in cui può essere suddivisa la risoluzione della cinematica inversa di un robot a sei gradi di libertà.
Le tre equazioni che danno le coordinate di O_3 sono:

P_x= - $d_3S_2 + a_2C_2$
p_y= + $d_3C_2 + a_2S_2$
p_z = d_1

La relazione che fornisce il valore della prima variabile di giunto è banale:

$d_1 = p_z$

Osservando la Fig.13 è d'altra parte evidente che la quota di O_3 è determinata dal solo valore del primo giunto.
Elevando al quadrato e sommando tra loro le due relazioni non utilizzate si ha :

$$p_x^2 + p_y^2 = d_3^2 + a_2^2$$

da cui si ricava il valore della terza variabile di giunto:

$$d_3 = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 - a_z^2)}$$

Delle due possibili soluzioni solo quella positiva ha significato fisico in quanto, per come sono state disposte le terne di riferimento, la variabile d_3 può assumere solo valori positivi.
Il procedimento applicato può essere pensato come l'applicazione del teorema di Pitagora per il calcolo del cateto del triangolo rettangolo rappresentato in Fig.14 nella quale sono evidenziate anche le altre grandezze coinvolte.

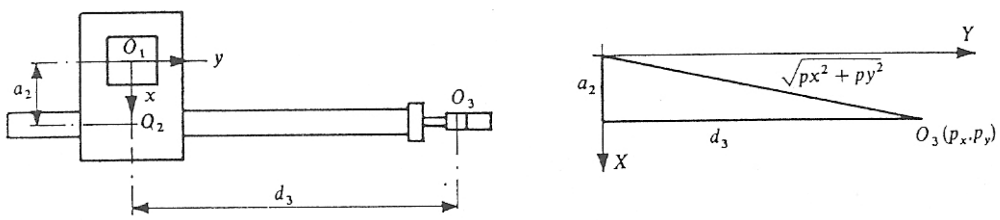


Fig. 14

Noto d_3 si ricavano seno e coseno della seconda variabile di giunto risolvendo il seguente sistema di due equazioni in due incognite:

$$P_x = -d_3S_2 + a_2C_2$$
$$p_y = d_3C_2 + a_2S_2$$

ottenendo:

$$S_2 = \frac{a_2 p_y - d_3 p_x}{d_3^2 + a_2^2}$$

$$C_2 = \frac{p_y - a_2 S_2}{d3}$$

I valori di ϑ_2 si ottengono applicando la funzione ATAN2:

ϑ_2 =ATAN2(S_2 ,C_2)

Esempio

Dato il robot di fig.13, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

p_x = 113.4 [mm]
p_y = 396.4 [mm]
p_z = 500[mm]

e il valore del parametro a_2:

a_2 = 100 [mm]

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa individuate in precedenza si ha :

d1 = 500 mm.

$$d_3 = \sqrt{113{,}4^2 + 396{,}4^2 - 100^2)} = 400mm$$

$$S_2 = 0.5$$

$$C_2 = 0.8666$$

$$\vartheta_2 = ATAN2(0{,}5{,}0{,}866) = 30°$$

5.3. - Robot antropomorfo a tre gradi di libertà

Si consideri il robot antropomorfo di Fig.15 e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

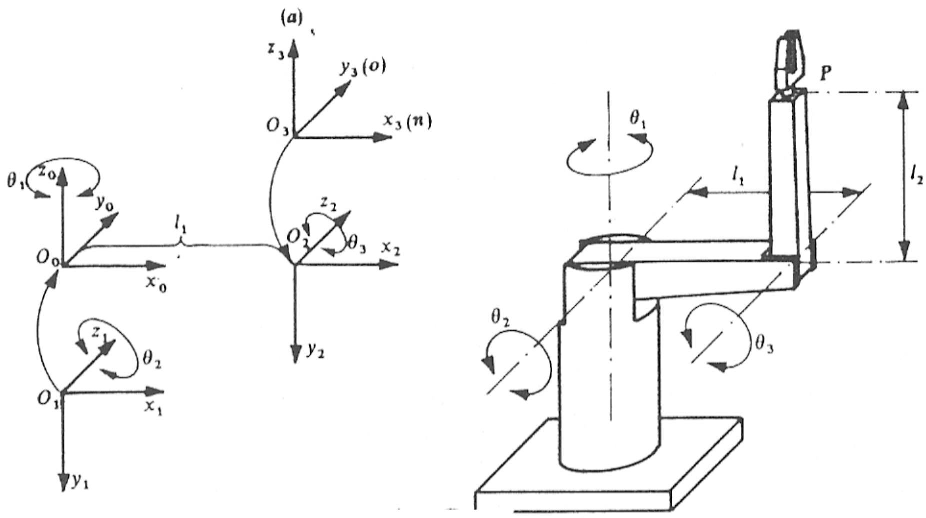


Fig. 15

Si tratta di individuare quelle relazioni che, note le coordinate p_x,p_y,p_z della pinza, determinano tutti i corrispondenti valori delle variabili di giunto. Come per quella cilindrica, anche la risoluzione di questa struttura può essere pensata come la prima delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa per un robot a sei gradi di libertà.
Nella modellazione della struttura l'origine della terza terna è stata fatta coincidere con quella della seconda per rispettare la convenzione di Denavit-Hartenberg e quindi le coordinate di O3
non coincideranno con quelle della pinza. Le tre equazioni che danno le coordinate p_x,p_y,p_z della pinza sono:

$$p_x = C_1(S_{23}l_2 + C_2 l_1)$$
$$p_y = S_1(S_{23}l_2 + C_2 l_1)$$
$$p_z = C_{23}l_2 - S_2 l_1$$

Prima di tentare di esplicitare qualche variabile conviene studiare geometricamente la struttura osservando la Fig.15 che riporta la configurazione del robot quando le sue variabili di giunto assumono valore nullo.
La quota della pinza è data dalla somma del contributo del primo segmento ($S_2 l_1$) e di quello del secondo ($C_{23} l_2$).
L'ascissa e l'ordinata della pinza si ottengono moltiplicando per C_1 e S_1 l'estensione orizzontale del braccio ($S_{23}l_2$+ C_2 l_1), il che equivale a trovarne la proiezione sugli assi X_0 e Y_0 rispettivamente.
L'estensione orizzontale del braccio può essere calcolata utilizzando il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo O_0O_2P':

$$S_{23}l_2 + C_2 l_1 = \sqrt{(O_oP)^2 + (PO_2)^2} = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - p_z^2)} = \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

Il segmento $O_O O_{2'}$ assume sempre valore positivo tranne quando il robot è completamente verticale ($\vartheta_2 = -90°, \vartheta_3 = 90°$). Escludendo quest'ultima configurazione particolare, sarà quindi sempre possibile calcolare C_1 e S_1:

$$C_1 = p_x \Big/ (S_{23}l_2 + C_2 l_1) = p_x \Big/ \sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}$$

$$S_1 = p_y \Big/ S_{23}l_2 + C_2 l_1) = \frac{p_y}{\sqrt{(p_x^2 + p_y^2)}}$$

e quindi ottenere l'angolo ϑ_1:

$$\vartheta_{1a} = \mathrm{ATAN2}(S_1, C_1)$$
$$\vartheta_{1b} = \mathrm{ATAN2}(-S_1, -C_1) = \vartheta_{1a} + 180°$$

Noti p_x, p_y l'angolo ϑ_1 è completamente individuato. La seconda soluzione dipende dal fatto che le stesse ascisse ed ordinate della pinza possono essere ottenute ruotando di 180° la prima variabile di giunto e ribaltando rispetto alla verticale il secondo segmento della struttura (Fig.16).

Quando il robot è verticale il calcolo di ϑ_1, impossibile attraverso il metodo in oggetto, perché si annulla il
denominatore delle formule che ne danno il seno e il coseno, non costituisce problema in quanto il suo valore non influisce sulle coordinate della pinza.

Per determinare i due rimanenti valori delle variabili di giunto si hanno ora a disposizione le due relazioni:

$$S_{23}l_2 + C_2 l_1 = \frac{p_x}{C_1}$$
$$C_{23}l_2 - S_2 l_1 = p_x$$

che presentano molte analogie con quelle che sono state utilizzate per risolvere la cinematica inversa del robot a due gradi di libertà. Tale analogia è immediatamente comprensibile pensando di ragionare nel piano verticale passante per Z_0 individuato dall'angolo di rotazione ϑ_1 (Fig.17).

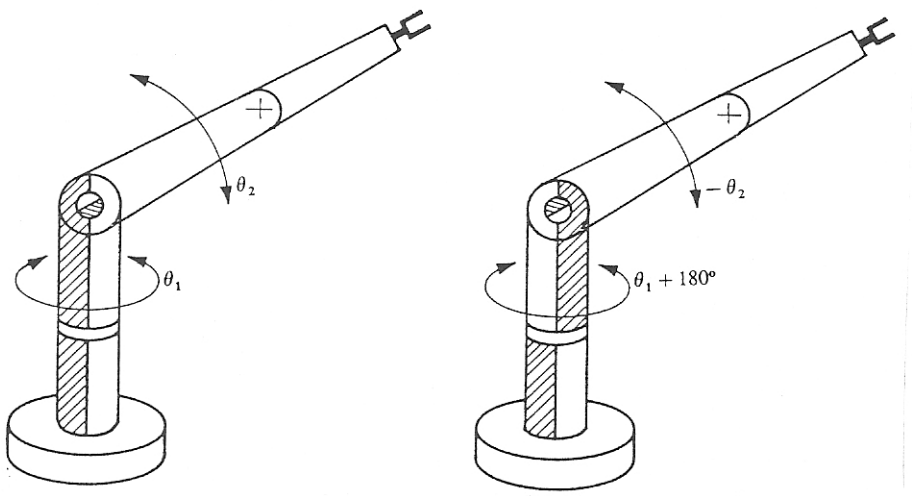


Fig. 17

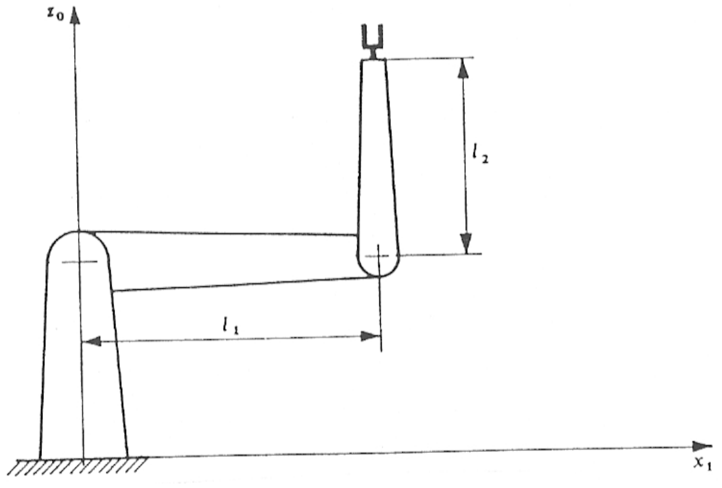


Fig. 18

Bisogna comunque sottolineare che la prima delle due relazioni è valida solo per C_1 diverso da zero; quando $C_1=0$ essa deve essere sostituita con la relazione equivalente:

$$S_{23}l_2 + C_2 l_1 = \frac{p_y}{S_1}$$

Per isolare le due variabili di giunto conviene elevare al quadrato e sommare le due relazioni sopra riportate ottenendo:

$$l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 (S_{23}C_2 - C_{23}S_2) = \left(\frac{p_x^2}{C_1^2} + p_z^2 \right)$$

Applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, si ottiene:

$$l_2^2 + l_1^2 + 2l_1 l_2 S_3 = \left(\frac{p_x^2}{C_1^2} + p_z^2 \right)$$

da cui è possibile ricavare S_3 e C_3:

$$S_3 = \frac{p_x^2 / C_1^2 + p_z^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$

$$C_3 = \pm\sqrt{(1 - S_3^2)}$$

Noti S_3 e C_3 è possibile calcolare i due possibili valori dello angolo ϑ_3 :

ϑ_{3a} = ATAN2(S_3,C_3)

ϑ_{3b} = ATAN2(S_3,-C_3)

I valori di ϑ_3 , noti C_3 ed S_3, si determinano applicando le formule trigonometriche relative al seno e coseno della somma di due archi, alle equazioni di partenza ottenendo:

$$l_2(S_2C_3 + C_2S_3) + l_1C_2 = p_x / C_1$$
$$l_2(C_2C_3 - S_2S_3) + l_1S_2 = p_x$$

Ricavando C_2 dalla prima equazione si ha:

$$C_2 = \frac{P_x / C_1 - l_2S_2C_3}{l_1 + l_2S_3}$$

e sostituendolo nella seconda, dopo alcuni passaggi algebrici si ottiene S_2:

$$S_2 = \frac{-p_x(l_1 + l_2S_3) + (p_x / C_1)\, l_2C_3}{l_2^2 + l_1^2 + 2l_1l_2S_3}$$

Sostituendo nell' equazione i due possibili valori di C_3 e di C_1, oltre a quello di S_3, si ricavano i corrispondenti valori di S_2: noti questi è possibile calcolare anche C_2 e quindi risalire al valore di ϑ_2 utilizzando la funzione ATAN2(S_2,C_2). Si noti che esistono quattro possibili valori di C_2 ed S_2, a causa dei due possibili valori di C_1 e C_3.
Riassumendo le possibili soluzioni al problema cinematico inverso sono in genere quattro, corrispondenti alle quattro colonne sottoriportate:

$$\begin{array}{llll}
\theta_1 = \theta_{1a} & \theta_1 = \theta_{1a} & \theta_1 = \theta_{1a} + 180 & \theta_1 = \theta_{1a} + 180 \\
\theta_2 = \theta_{2a} & \theta_2 = \theta_{2a} & \theta_2 = 180 - \theta_{2a} & \theta_2 = 180 - \theta_{2a} \\
\theta_3 = \theta_{3a} & \theta_3 = 180 - \theta_{3a} & \theta_3 = \theta_{3a} & \theta_3 = 180 - \theta_{3a}
\end{array}$$

Esempio

Dato il robot di Fig.15, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo le coordinate della pinza:

$p_x = 1100$ [mm]
$p_y = 0$ [mm]
$p_z = 0$ [mm]
e il valore dei due parametri:
$l_1 = 600$ [mm]
$l_2 = 500$ [mm]

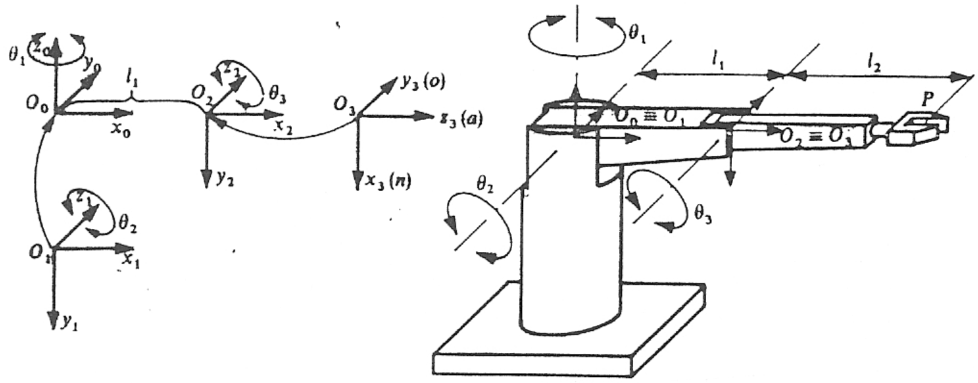


Fig. 18

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

$C_1 = 1$
$S_1 = 0$

e quindi:

$\vartheta_{1a} = \text{ATAN2}(0,1) = 0°$
$\vartheta_{1b} = \text{ATAN2}(0,-1) = 180°$

Per il calcolo della terza variabile di giunto si ha:

$S_3 = 1$
$C_3 = +/-0$

e quindi:

$\vartheta_3 = \text{ATAN2}(1,0) = 90°$

In questo esempio, dove il braccio del robot è completamente esteso orizzontalmente, le due soluzioni di gomito in alto e gomito in basso vengono a coincidere. Per il calcolo della seconda variabile di giunto si ha:

$S_{2a} = 0$ <-- $C_1=1, C_3=0$
$S_{2b} = 0$ <-- $C_1=-1, C_3=0$

$C_{2a} = 1$ <-- $C_1=1, C_3=0$
$C_{2b} = -1$ <-- $C_1=-1, C_3=0$

e quindi:

$\vartheta_{2a} = \text{ATAN2}(1,0) = 0°$
$\vartheta_{2b} = \text{ATAN2}(1,0) = 180°$

5.4 - Polso sferico

Si consideri il polso sferico di Fig.18 e se ne determinino le relazioni della cinematica inversa.

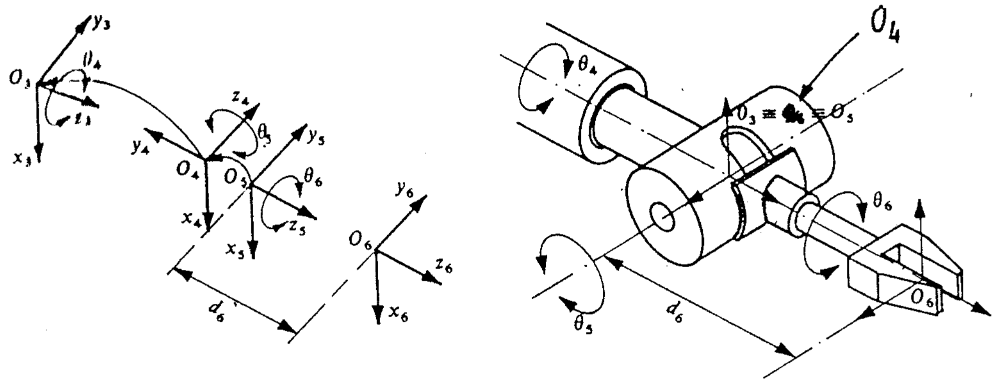


Fig. 19

Il polso sferico permette di orientare gli oggetti nello spazio e quindi, aggiungendo a monte del polso sferico una struttura che sia in grado di posizionarlo si ottiene un robot completo a sei gradi di libertà. Questo permette di considerare il procedimento che verrà sviluppato come la seconda delle due tappe in cui è possibile suddividere la risoluzione della cinematica inversa di un robot completo.
Per determinare il valore assunto dalle variabili di giunto, bisognerà utilizzare i valori delle componenti dei versori della terna di estremità rispetto al riferimento base.
Nota la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità (la sesta) rispetto a quella base (la terza), tali componenti sono contenute nella sottomatrice di orientazione.
L'equazione matriciale da utilizzare sarà quindi:

$$\begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 \\ -S_5S_6 & S_5S_6 & C_5 \end{bmatrix}$$

Nessuna delle nove relazioni si presta per ricavare in modo esplicito qualche variabile di giunto; conviene quindi tentare una premoltiplicazione che isoli a destra, ad esempio, la variabile ϑ_4.Limitandosi a considerare la sottomatrice di orientazione e premoltiplicando entrambi i membri per l'inversa della matrice A_4 si ottiene:

$$\begin{bmatrix} C_4n_x + S_4n_y & C_4o_x + S_4o_y & C_4a_x + S_4a_y \\ -n_z & o_z & a_z \\ -S_4n_x + C_4n_y & -S_4o_x + C_4o_y & -S_4a_x + C_4a_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_5C_6 & -C_5C_6 & S_5 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 \\ S_6 & C_6 & 0 \end{bmatrix}$$

Uguagliando gli elementi [3,3] delle due matrici sopra riportate si ottiene un'equazione in cui compare come unica variabile θ_4:

$$-S_4a_x + C_4a_y = 0$$

da cui è facile ottenere i due possibili valori di θ_4 che la soddisfano:

θ_{4a} = ATAN2(a_y,a_x)
θ_{4b} = ATAN2(-a_y,-a_x) = θ_{4a} +180

La variabile θ_{5a} può essere ricavata uguagliando gli elementi [1,3] e [2,3] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_5 = C_4 a_x + S_4 a_y$$
$$C_5 = a_z$$

Sostituendo i due possibili valori di θ_4 si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

θ_{5a} = ATAN2(a_x*C_4 + a_y*S_4,a_y) <-- θ_{4a}
θ_{5b} = ATAN2(a_x*C_4 + a_y*S_4,a_y) = θ_{5a} <-- θ_{4b}

Con analogo procedimento è possibile determinare la variabile θ_6 eguagliando gli elementi [3,1] e [3,2] che danno rispettivamente il seno e il coseno di tale angolo:

$$S_6 = -S_4 n_x + C_4 n_y$$
$$C_5 = -S_4 o_x + C_4 o_y$$

Sostituendo i due possibili valori di θ_4 si ottengono in corrispondenza le due soluzioni:

θ_{6a} = ATAN2($-S_4n_x+C_4n_y$,$-S_4o_x+C_4o_y$) <-- θ_{4a}
θ_{6b} = ATAN2($-S_4n_x+C_4n_y$,$-S_4o_x+C_4o_y$) =θ_{6a} +180 <-- θ_{4b}

Le due soluzioni trovate valgono nell'ipotesi che tutti i giunti possano ruotare di 360.

Esempio

Dato il polso sferico di Fig. 19, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

$$\begin{bmatrix} n_x = 1 & o_x = 0 & a_x = 0 \\ n_y = 0 & o_y = 1 & a_y = 0 \\ n_z = 0 & o_z = 0 & a_z = 0 \end{bmatrix}$$

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

θ_{4a} =ATAN2(a_y,a_x) = ATAN2(0,0) = indeterminato

In realtà ci si trova di fronte al caso degenere del polso sferico riconoscibile dal fatto che gli assi z_3 e z_6 paralleli. Gli assi di rotazione del quarto e del sesto giunto sono paralleli e quindi il numero di gradi di libertà indipendenti del polso scende a due.

Esempio

Dato il polso sferico di Fig.20, calcolare i valori delle tre variabili di giunto conoscendo l'orientazione dei tre versori degli assi della terna associata alla pinza:

$$\begin{bmatrix} n_x = 0 & o_x = 0 & a_x = -1 \\ n_y = 0 & o_y = 1 & a_y = 0 \\ n_z = 1 & o_z = 0 & a_z = 0 \end{bmatrix}$$

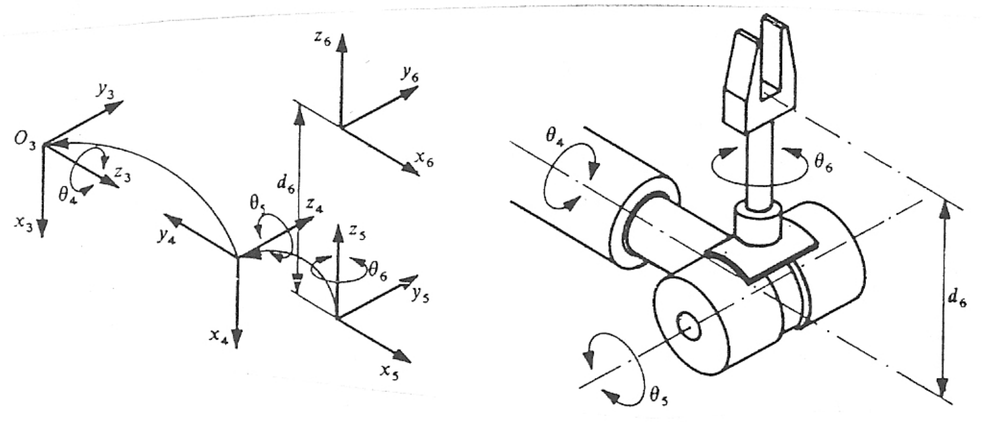


Fig. 20

Utilizzando le relazioni della cinematica inversa si ha:

θ_{4a} = ATAN2(0,-1) = 180
θ_{4b} = ATAN2(0,1) = 0

Sostituendo i due possibili valori di θ_4 nelle relazioni che danno θ_5 se ne ottengono i due possibili valori:

θ_{5a} = ATAN2(-1,0) = -90 <-- θ_{4a}
θ_{5b} = ATAN2(1,0) = 90 <-- θ_{4b}

Analogamente si determinano i due possibili valori per la variabile θ_6:

θ_{6a} = ATAN2(0,-1) = 180 <-- θ_{4a}
θ_{6B} = ATAN2(0,1) = 0 <-- θ_{4B}