Sistemi a più gradi di libertà: cinematica diretta

Introduzione

La posizione e l'orientamento di una terna solidale all'ultimo elemento di un meccanismo a più gradi di libertà (robot) dipende evidentemente dalle caratteristiche geometriche della sua struttura e dalla configurazione dei suoi giunti.
La risoluzione del problema prevede l'individuazione di una relazione analitica esplicita che, nota la geometria e la configurazione del meccanismo fornisca la posizione l'orientazione della terna di estremità: tale procedimento viene globalmente detto cinematica diretta.
La prima parte (Par.1,2,3), dedicata all'inquadramento qualitativo del problema, definisce il formalismo con cui verrà affrontata la cinematica diretta, risolve il problema in modo intuitivo per un sistema a due gradi di libertà utilizzando le trasformazioni omogenee e propone una serie di considerazioni sull'estensione del metodo a robot a sei gradi di liberta.
La seconda (Par.4,5), dedicata all'approccio quantitativo alla cinematica diretta, sviluppa un metodo di modellizzazione della struttura del robot basata sull'assegnazione di terne di riferimento cartesiane ai suoi elementi e sull'utilizzo di trasformazioni omogenee per descriverne le posizioni relative. Al termine vengono proposti una serie di esempi applicativi.

1 - Cinematica diretta

La cinematica diretta affronta il problema statico della ricerca delle relazioni che legano la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura del robot alle variabili di giunto. Tale relazione prende il nome di equazione cinematica in quanto governa il comportamento cinematico del robot (Fig.1).

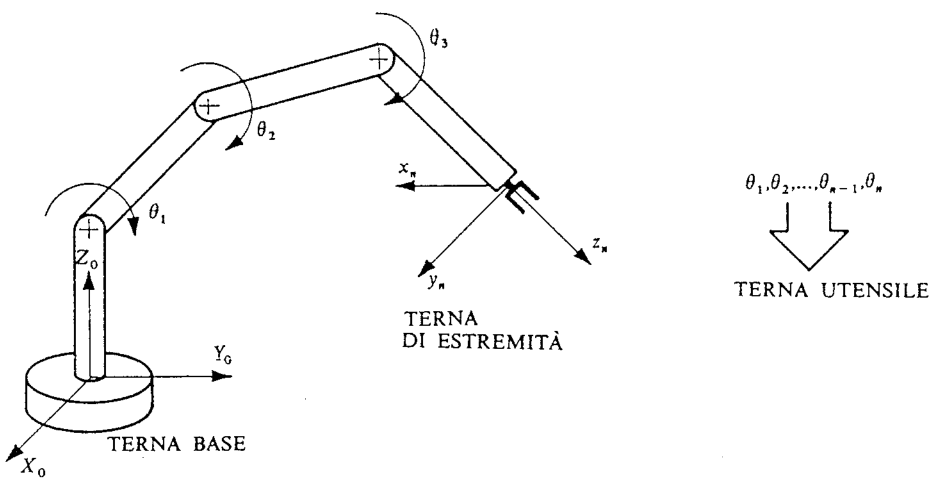

Fig. 1 – Schema generale di un meccanismo a più gradi di libertà

La struttura dei robot industriali è sempre costituita da una catena cinematica aperta, cioè da una serie di elementi rigidi collegati l'uno all'altro da giunti. Per identificare correttamente e sinteticamente i componenti della struttura conviene associare a ciascuno di essi un numero seguendo un'opportuna convenzione (Fig.2).

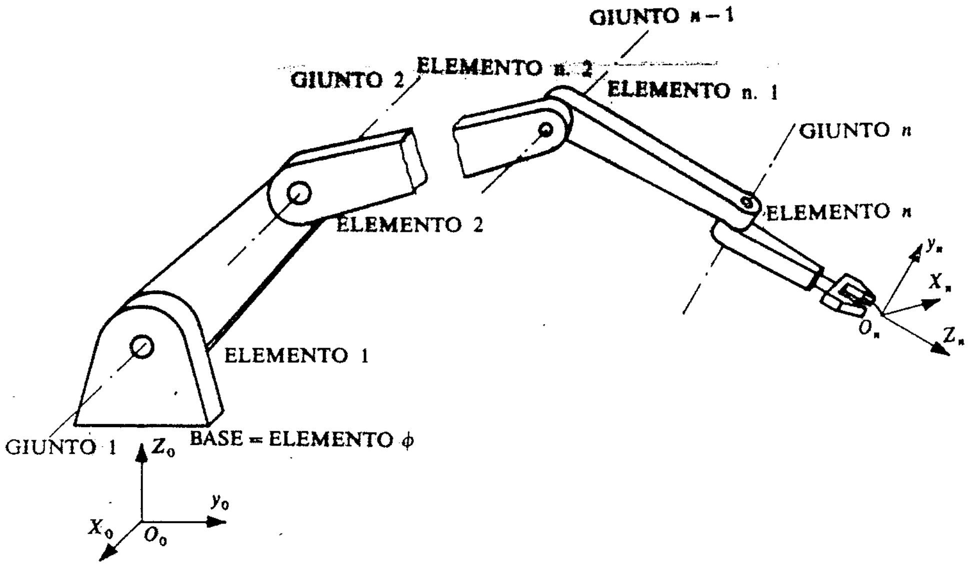

Fig. 2 – Numerazione di elementi e giunti in un robot a n giunti

Nel seguito il primo elemento della struttura, cioè quello collegato a terra, sarà identificato come segmento zero e i successivi con una numerazione progressiva: 1, 2, ..., n-1, n dove n è il numero dei giunti.
I giunti vengono numerati progressivamente, a partire da uno, nell'ordine in cui si incontrano muovendosi dalla base della struttura verso la sua estremità. Con questa convenzione, il generico giunto i sarà quello che unisce gli elementi i-1 e i della struttura.
La cinematica diretta è meglio definita introducendo n+1 sistemi di riferimento tali che:

- ϑ_2 la terna $O_0\_X_0Y_0Z_0$ sia quella base,
- ϑ_2 la terna $O_1\_x_1y_1z_1$ sia solidale con il primo elemento della struttura,
- ϑ_2 la terna $O_2\_x_2y_2z_2$ sia solidale con il secondo elemento
- ϑ_2 ………………………………………………………………
- ϑ_2 la terna $O_2\_x_ny_nz_n$ sia solidale con l'estremità della struttura

L'equazione cinematica è l'insieme delle relazioni che esprimono la posizione e l'orientamento della terna $O_2\_x_ny_nz_n$ rispetto a quella di riferimento $O_0\_X_0Y_0Z_0$, in funzione delle variabili di giunto.

La configurazione assunta dalla struttura del robot, e quindi la posizione e l'orientamento della terna di estremità, possono essere calcolate note che siano le relazioni della cinematica diretta e gli n valori delle variabili di giunto. Premesso questo si può pensare di definire uno spazio, detto spazio dei giunti, avente un numero di dimensioni pari a quello dei giunti, cioè n.
Un punto appartenente a tale spazio viene individuato da un insieme ordinato di n coordinate $(n_1,n_2,...,n_n)$. Quindi ad ogni configurazione assunta dalla struttura del robot corrisponderà in tale spazio un punto le cui n coordinate saranno i valori delle variabili di giunto. L'inverso non e' sempre vero in quanto i giunti hanno possibilità di movimento limitata e quindi non sarà possibile far corrispondere ad ogni punto dello spazio dei giunti una possibile configurazione della struttura del robot.
La cinematica diretta può quindi essere pensata come l'insieme di quelle relazioni che trasformano un punto dello spazio dei giunti (che esprime la configurazione della struttura del robot) nella posizione ed orientamento di una terna cartesiana (quella solidale con l'estremità della struttura).

2 - Cinematica diretta per un meccanismo piano a due gradi di libertà

Si consideri un meccanismo a due gradi di libertà in cui gli assi di rotazione dei due giunti siano entrambi perpendicolari al foglio in modo tale che ogni suo movimento avvenga in tale piano (Fig.3).

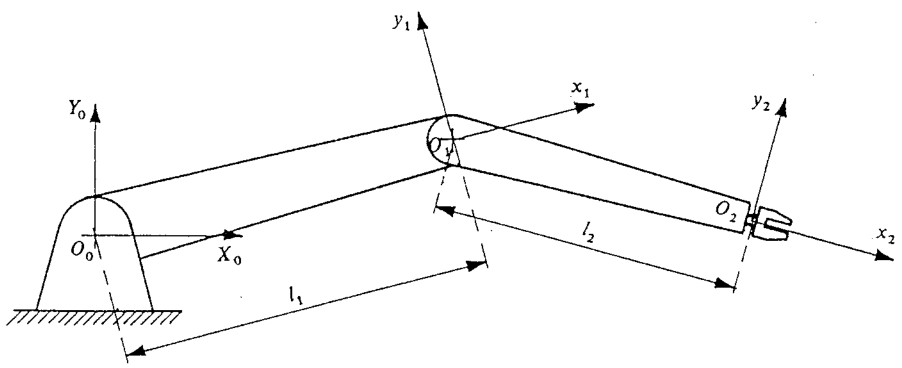

Fig. 3 – Schema e geometria del meccanismo

Essendo due i giunti, si dovranno definire tre terne, la prima di riferimento, la seconda solidale al primo segmento della struttura e l'ultima al secondo. Essendo a priori del tutto arbitraria sia la posizione in cui sistemare l'origine che l'orientamento da dare agli assi di riferimento, conviene posizionare le terne in modo tale da semplificare il problema.
Una buona soluzione per la terna di riferimento O_0_$X_0 Y_0 Z_0$ è quella di fare coincidere l'origine con l'intersezione tra l'asse di rotazione del primo giunto e il piano in cui si muove il robot. Per quanto riguarda l'orientazione è conveniente che l'asse Z_0 coincida con quello di rotazione del primo giunto.
L'origine della terna O_1_$x_1 y_1 z_1$ può essere sistemata tra l'intersezione dell'asse di rotazione del secondo giunto ed il piano di movimento del robot, l'asse z1 coincidente con quello di rotazione del secondo giunto mentre l'asse x_1 può essere vantaggiosamente orientato in modo da essere il prolungamento del primo braccio.
L'origine dell'ultima terna, O_1_$x_2 y_2 z_2$, viene in genere posizionata in un punto dell'ultimo elemento della struttura particolarmente interessante, ad esempio quello in cui avviene la chiusura delle due dita. Per quanto riguarda gli assi, una buona soluzione e' di disporre z_2 parallelo a Z_0 e z_1 e x_2 come il prolungamento del secondo braccio.
Nel seguito si utilizzeranno le matrici di trasformazione 4 x 4 introdotte nel capitolo precedente anche se, essendo tutti i movimenti appartenenti al piano $X_0 Y_0$ della terna di riferimento, sarebbe in teoria possibile utilizzare delle matrici 3 x 3 che trascurino la terza dimensione. Tali matrici si ottengono da quelle che verranno utilizzate togliendo la terza colonna e la terza riga.
La scelta di utilizzare comunque le più complesse matrici 4 x 4 è giustificata dalla esigenza di rendere l'esempio più aderente alla trattazione generale del problema che verrà sviluppata nel seguito.
Nell'intento di semplificare la rappresentazione delle funzioni trigonometriche seno e coseno, di cui si farà un uso intenso, si adotteranno le seguenti convenzioni:

$$\sin \vartheta_n = S_n$$
$$\cos \vartheta_n = C_n$$
$$\sin(\vartheta_m + \vartheta_n) = S_{mn}$$
$$\cos(\vartheta_m + \vartheta_n) = C_{mn}$$

La trasformazione omogenea che descrive la terna $O_1\_x_1y_1z_1$ rispetto a quella di riferimento e':

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & -S_1 & 0 & l_1\,C_1 \\ S_1 & C_1 & 0 & l_1\,S_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La variabile di giunto è l'angolo di rotazione ϑ_1 attorno all'asse Z_0 del sistema di riferimento base. Questa prima osservazione permette di scrivere immediatamente la sottomatrice di rotazione rot(z, ϑ).
Rimangono da determinare gli elementi della quarta colonna, che sono poi le coordinate di O_1. Tale punto è vincolata a muoversi attorno a O_0 ad una distanza fissa pari alla lunghezza del primo elemento della struttura del robot (distanza tra i due assi di
rotazione). Quindi e' possibile esprimere la sua ascissa e la sua ordinata in modo trigonometrico:

$$X = l_1 * C_1 \quad Y = l_1 * S_1$$

La coordinata Z di O_1 non pone alcun problema in quanto e' sempre nulla. Determinate le prime tre righe della matrice non resta che completarla con la quarta per ottenere la matrice sopra riportata.
La trasformazione omogenea che descrive la terna $O_2\_x_2\,y_2\,z_2$ rispetto alla $O_1\_x_1\,y_1\,z_1$ è:

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_2C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_2S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il procedimento per ottenere questa matrice e' analogo a quello utilizzato per determinare A_1.
L'equazione cinematica per questo robot a due gradi di libertà sarà:

$$T = A_1A_2 = \begin{bmatrix} C_{12} & -S_{12} & 0 & l_2C_{12}+l_1C_1 \\ S^1{}_2 & C_{12} & 0 & l_2S_{12}+lS_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'esattezza dei risultati può essere verificata calcolando la posizione dell'origine O_2 della seconda terna e l'angolo di cui risulta ruotata rispetto a quella di riferimento utilizzando la trigonometria.
La coordinate x ed y del punto O_2 si ottengono proiettando sull'asse delle ascisse e delle ordinate le lunghezze dei due bracci (Fig.4):

$x = l_2\,C_{12} + l_1C_1$ elemento [1,4] della matrice

$y = l_2\,S\,_2{}^1 + l_1\,S_1$ " [2,4] " "

La terna di estremità risulta ruotata attorno all'asse Z dell'angolo ϑ_{12} rispetto al riferimento, come risulta dalla sottomatrice di rotazione 3 x 3.

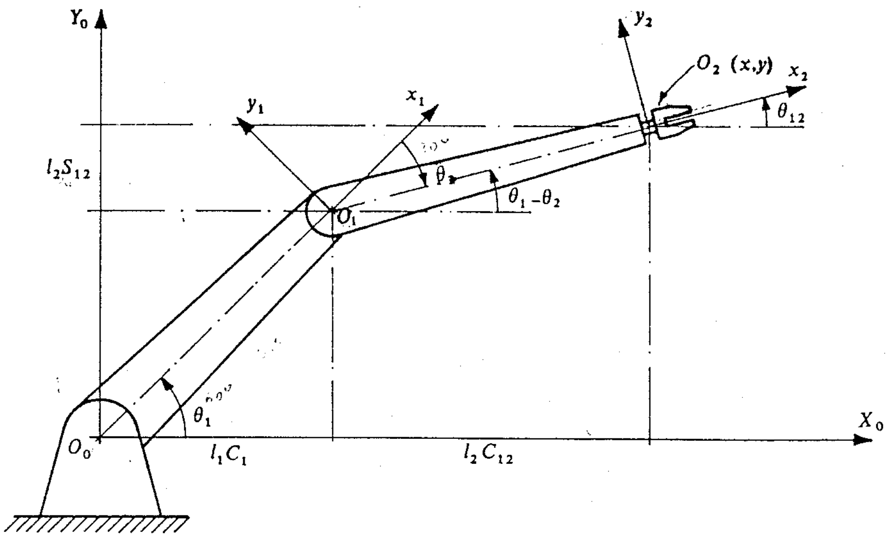

Fig. 4 – Schema del meccanismo con riportate le terne di riferimento e le coordinate libere

<u>Esempio</u>: dato il robot di Fig.4, calcolare la posizione dell'estremità della struttura quando:

$$\vartheta_1 = 60°$$
$$\vartheta_2 = -30°$$

sapendo che:

$l_1 = 600$ mm
$l_2 = 500$ mm

Disponendo le terne come precedentemente descritto e facendo coincidere l'origine della seconda terna con il punto cercato, si ottiene:

$$\begin{bmatrix} .866 & -.500 & 0 & 733.013 \\ .500 & .866 & 0 & 769.615 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La posizione dell'estremità della struttura sarà:

x = 733.013
y = 769.615

3 - Cinematica diretta per un robot a sei gradi di libertà

I robot a sei gradi di liberta rappresentano le strutture più complete effettivamente operanti in ambito industriale e quindi la ricerca della loro equazione cinematica può essere vista come il caso più complesso che si possa incontrare.
L'equazione cinematica viene ricavata con l'applicazione ripetuta del procedimento utilizzato per il robot a due gradi di libertà: prima si numerano i segmenti che costituiscono la struttura e i giunti e

poi si dispongono le terne, una di riferimento e altre sei, ciascuna solidale ad un singolo elemento nella struttura del robot (Fig.5).
L'equazione cinematica è la relazione matematica che, in funzione dei valori delle sei variabili di giunto, dà posizione ed orientamento della terna $O_6 \ldots x_6y_6z_6$ rispetto al riferimento $O_0 \ldots X_0Y_0Z_0$.

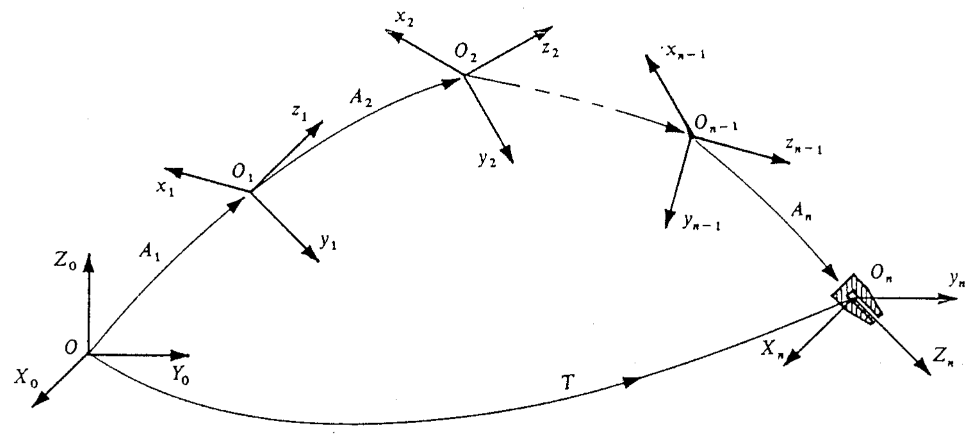

Fig. 5 – Schema generale dell'applicazione delle terne al meccanismo

Tale relazione sarà in pratica una trasformazione omogenea, cioè una matrice 4 x 4, i cui singoli elementi saranno funzione delle variabili di giunto.
La posizione e l'orientamento di una qualsiasi delle terne introdotte, rispetto alla sua precedente, può essere espressa tramite una opportuna trasformazione omogenea funzione della variabile di giunto che ne permette il movimento relativo.
Quindi l'equazione cinematica può essere ottenuta come il prodotto delle sei trasformazioni omogenee che descrivono le relazioni tra le terne (Fig.5).
Le sei trasformazioni di interesse sono:

A_1 ->	posiz. ed orient. di	$O_1\_X_1Y_1Z_1$	rispetto ad	$O_0\_x_0y_0z_0$
A_2 ->	" " " "	$O_2\_x_2y_2z_2$	rispetto ad	$O_1\_x_1y_1z_1$
A_3 ->	" " " "	$O_3\_x_3y_3z_3$	rispetto ad	$O_2\_x_2y_2z_2$.
A_4 ->	" " " "	$O_4\_x_4y_4z_4$	rispetto ad	$O_3\_x_3y_3z_3$
A_5 ->	" " " "	$O_5\_x_5y_5z_4$	rispetto ad	$O_4\_x_4y_4z_4$
A_6 ->	" " " "	$O_6\_x_6y_6z_6$	rispetto ad	$O_5\_x_5y_5z_4$

dove con A si indica la matrice corrispondente e con l'indice il numero del giunto che permette il movimento relativo delle due terne. Ad esempio, gli elementi della matrice A_3 saranno funzione della posizione assunta dal terzo giunto ed esprimeranno la posizione e l'orientamento di $O_3\_x_3y_3z_3$ rispetto ad $O_2\_x_2y_2z_2$.
L'equazione cinematica, che d'ora in poi chiameremo T, sarà data dal prodotto delle sei matrici che descrivono le relazioni tra le terne:

$$T = A_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

Tutto è quindi ricondotto alla determinazione delle singole trasformazioni, problema che verrà affrontato successivamente.

La maggior parte delle strutture dei robot industriali prevedono che i primi tre giunti siano specializzati a posizionare gli oggetti nello spazio mentre i tre rimanenti ne permettono l'orientazione. Questa considerazione suggerisce di riscrivere l'equazione cinematica sottolineando questa specializzazione:

$$T = TpTo$$

dove:

$$Tp = A_1A_2A_3$$
$$To = A_4A_5A_6$$

La trasformazione Tp esprime la posizione e l'orientamento della terza terna, solidale con il terzo elemento della struttura, rispetto al riferimento base.
Quando il robot è cartesiano tale trasformazione sarà caratterizzata dall'avere la componente rotatoria costante in quanto i primi tre assi del robot sono prismatici e quindi non modificano l'orientamento della terza terna rispetto al riferimento (Fig.6).

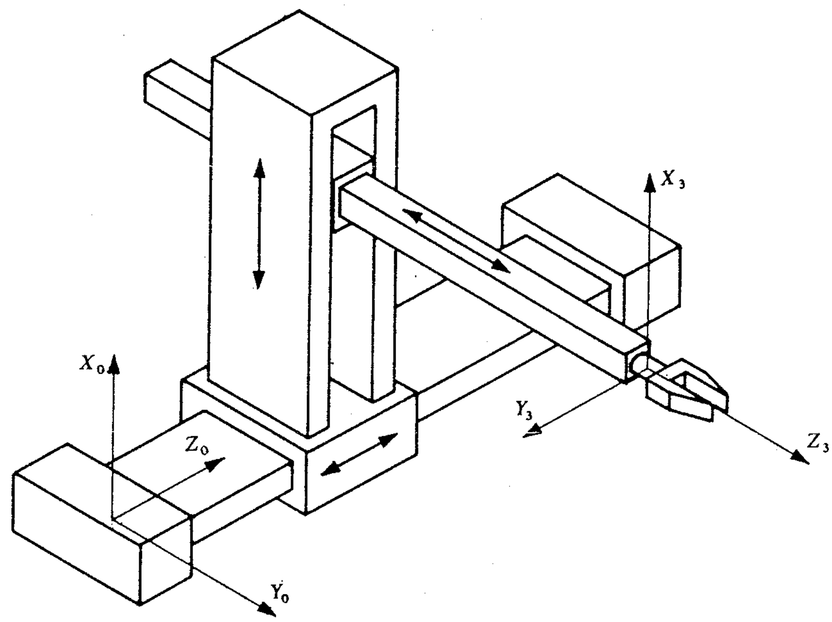

Fig. 6

Quando invece almeno uno dei primi tre giunti è rotoidale, anche la componente rotatoria della matrice Tp sarà funzione delle variabili di giunto (Fig.7).
La trasformazione To esprime la posizione e l'orientamento della terna di estremità della struttura rispetto alla terza. Gli ultimi tre giunti delle strutture dei robot sono praticamente sempre rotoidali per cui la trasformazione To conterrà sempre una componente rotatoria funzione delle variabili di giunto.
La componente traslatoria può al contrario essere nulla. Questo accade quando i giunti sono disposti in modo che i tre assi di rotazione si incontrano in un unico punto (si parla di polso sferico e la condizione e' verificata nella maggior parte dei robot industriali) che viene fatto coincidere con l'origine delle terne, dalla terza alla sesta (Fig.8a). La componente di traslazione sarà in questo caso nulla perché la posizione dell'origine della sesta terna, coincidente con quella della terza, non può essere modificata dal movimento degli ultimi tre giunti in quanto appartiene ai loro assi di rotazione.

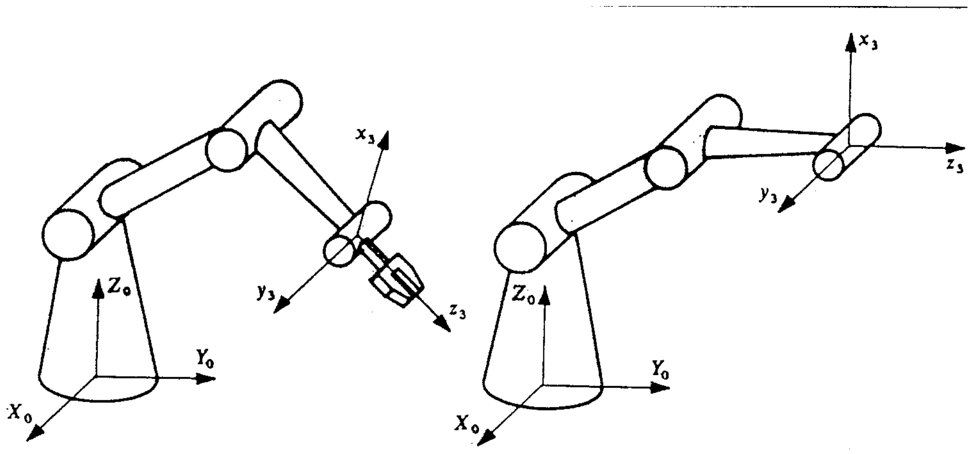

Fig. 7

Nella pratica questa situazione si riscontra raramente in quanto la sesta terna viene sempre posizionata in un punto significativo della struttura (Fig.8b); ad esempio in corrispondenza della flangia di attacco degli utensili o coincidente con la loro estremità operativa.

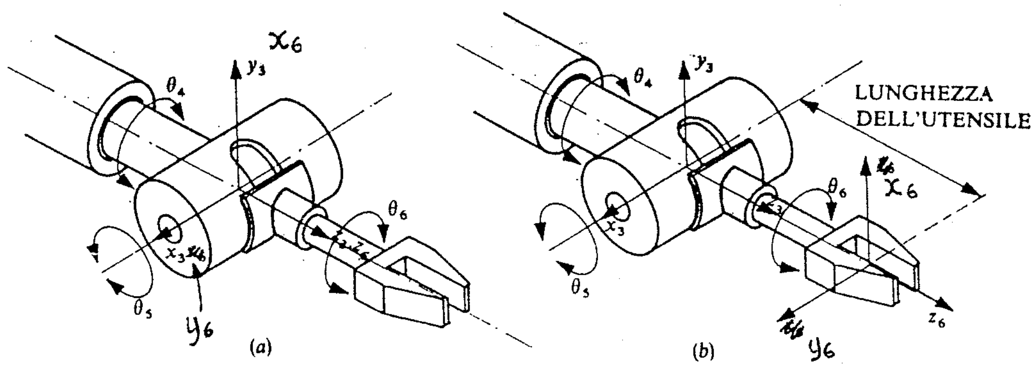

Fig. 8

Quando il polso non e' sferico la To conterrà sempre una componente traslatoria risultato del movimento rotatorio dei giunti (Fig.9).

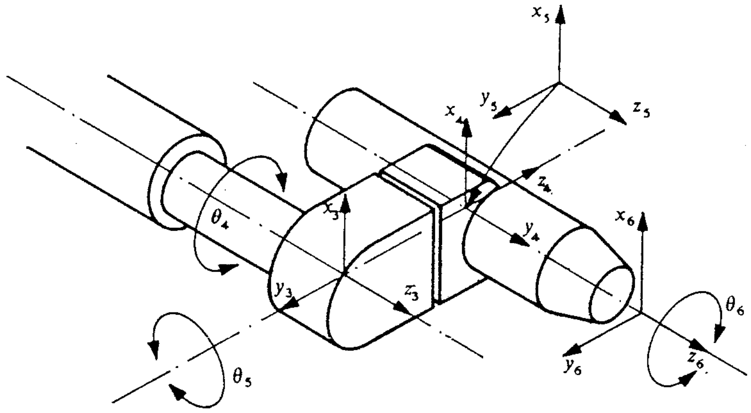

Fig. 9

La matrice T esprime la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto a quella di riferimento e quindi avrà la seguente forma:

$$T = \begin{bmatrix} i_{x6} & j_{x6} & k_{x6} & O_{6x} \\ i_{y6} & j_{y6} & k_{y6} & O_{6y} \\ i_{z6} & j_{z6} & k_{z6} & O_{6z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intenso uso che si farà nel seguito di questa matrice consiglia tuttavia di utilizzare una formulazione più semplice:

$$T = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analizzando per colonne la matrice si ha (Fig. 10):

n = vettore normale.
Considerando una pinza ad apertura parallela delle dita sarà ortogonale al piano in cui avviene tale movimento.

o = vettore apertura.
Verrà orientato in modo da descrivere il movimento di apertura e di chiusura delle dita.

a = vettore avvicinamento.
Indica la normale al palmo della mano e quindi la direzione con cui l'utensile di presa deve approcciare le parti da manipolare.

p = vettore posizione.
Esprime la posizione dell'origine della sesta terna rispetto a quella di riferimento. In generale l'origine viene posizionata nel punto centrale della pinza quando le due dita sono completamente chiuse.

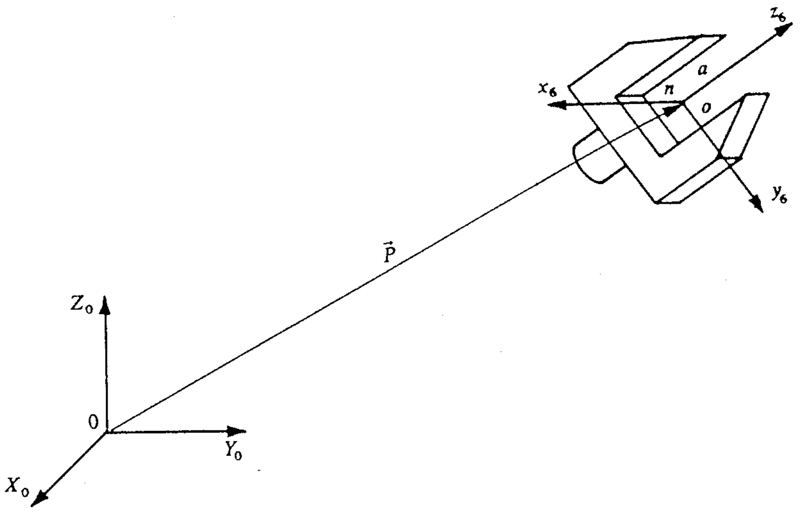

Fig. 10

Nella pratica risulta spesso conveniente adottare come terna di riferimento un sistema di riferimento cartesiano diverso da $O_0\_X_0Y_0Z_0$. Questa eventualità si presenta ad esempio quando si deve gestire un'isola robotizzata in cui operano contemporaneamente più macchine. In tal caso è evidente il vantaggio di riferire le posizioni di tutti gli oggetti e le operazioni ad essi relative ad un unico sistema di riferimento.

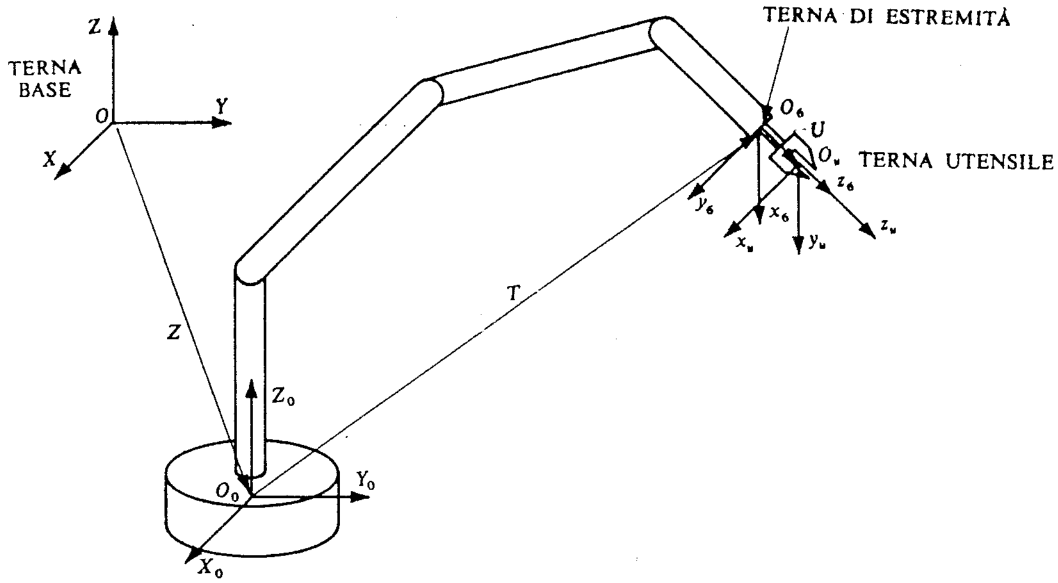

Fig. 11

In questi casi, per descrivere la posizione e l'orientamento della sesta terna rispetto al nuovo riferimento costituito dalla terna B (base), occorrerà considerare una ulteriore trasformazione omogenea (Fig. 11). Tale trasformazione, indicata nel seguito con Z, esprimerà posizione ed orientamento della terna $O_0\_X_0Y_0Z_0$ rispetto alla B. Quindi la sesta terna sarà identificata dalla trasformazione:

$$ZT = ZA_1A_2A_3A_4A_5A_6$$

Sempre esigenze pratiche spingono ad introdurre, a volte, una ulteriore trasformazione, indicata con U, che descrive la posizione e l'orientazione dell'utensile o della pinza montato sul robot rispetto alla sesta terna (Fig. 11). Un esempio di tale esigenza si ha nei robot di saldatura in cui e' necessario conoscere il punto terminale della torcia di saldatura. Quindi la relazione che da' la posizione e l'orientamento dell'utensile manipolato dal robot rispetto alla terna base sarà:

$$ZTU = ZA_1A_2\,A_3\,A_4\,A_5\,A_6\,U$$

4 - Parametri caratteristici degli elementi della struttura

Le trasformazioni omogenee Ai descrivono la rototraslazione della generica terna i-esima rispetto alla i-1-esima. La loro ricerca è semplificata dall'utilizzo della rappresentazione di Denavit e Hartenberg. Tale rappresentazione consiste in una matrice di trasformazione omogenea che permette di stabilire in modo sistematico la posizione e l'orientamento dei sistemi di riferimento solidali con i singoli elementi della struttura del robot.
Prima di utilizzare questa matrice è tuttavia utile ripercorrere la strada che ha portato alla sua formulazione.
Il primo passo e' l'introduzione di alcune regole per la disposizione delle terne di riferimento.
Si considerino due elementi generici della struttura (i-1 e i) e il giunto che li collega (i) che, in ambito industriale, potrà essere di tipo rotoidale (di torsione Fig.12a o di flessione (Fig12b) o prismatico (Fig.13).
Ogni sistema di coordinate può essere ben definito utilizzando le seguenti regole (Fig.14):

origine

all'intersezione tra l'asse di rotazione del giunto i+1 e la normale comune agli assi dei giunti i e i+1. Si noti che la terna i-esima è quindi in corrispondenza del giunto i+1-esimo. Quando i due assi di rotazione dei giunti i e i+1 sono concorrenti l'origine andrà posizionata nel punto di incontro. Quando invece sono paralleli si sceglierà, tra le infinite normali comuni, quella che passa per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica.

asse z_i

coincidente con l'asse di rotazione del giunto i+1.

asse x_i

lungo il prolungamento della normale comune ed orientato in direzione opposta all'asse i-1. Quando gli assi di rotazione dei giunti i e i-1 sono concorrenti la normale comune degenera in un punto e quindi l'asse x_i avrà direzione coincidente con quella del prodotto vettore tra z_{i-1} e z_1 e verso arbitrario.

asse y_i

perpendicolare agli altri due assi in modo da ottenere una terna destra.

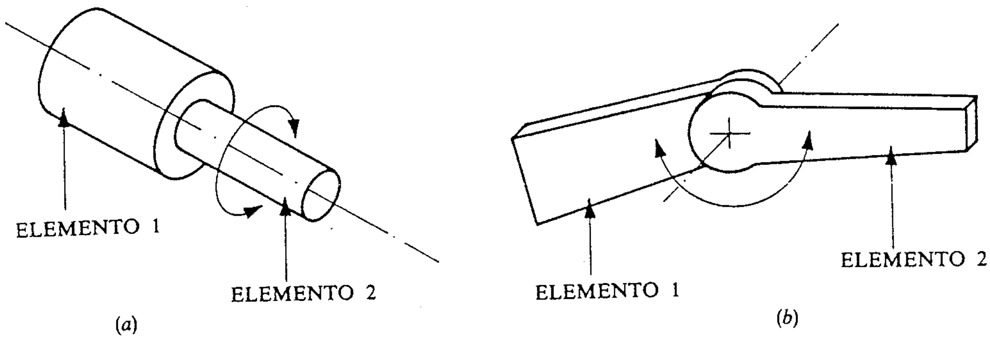

Fig. 12

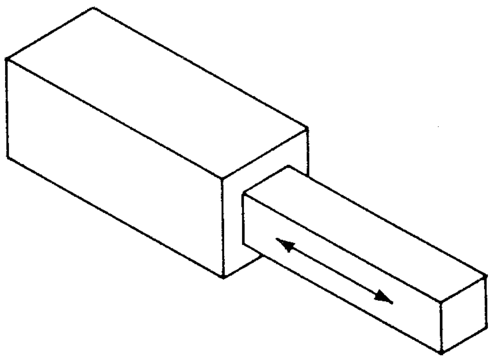

Fig. 13

Le regole sopra esposte sono facilmente estendibili ai giunti prismatici pur di sostituire all'asse di rotazione la direzione di traslazione. Tra le infinite rette aventi tale direzione si opterà per quella passante per la prima origine ben definita che si incontra avanzando nella catena cinematica (Fig.15). La prima e l'ultima terna non possono essere completamente definite utilizzando le regole viste in quanto si trovano alle estremità della struttura.

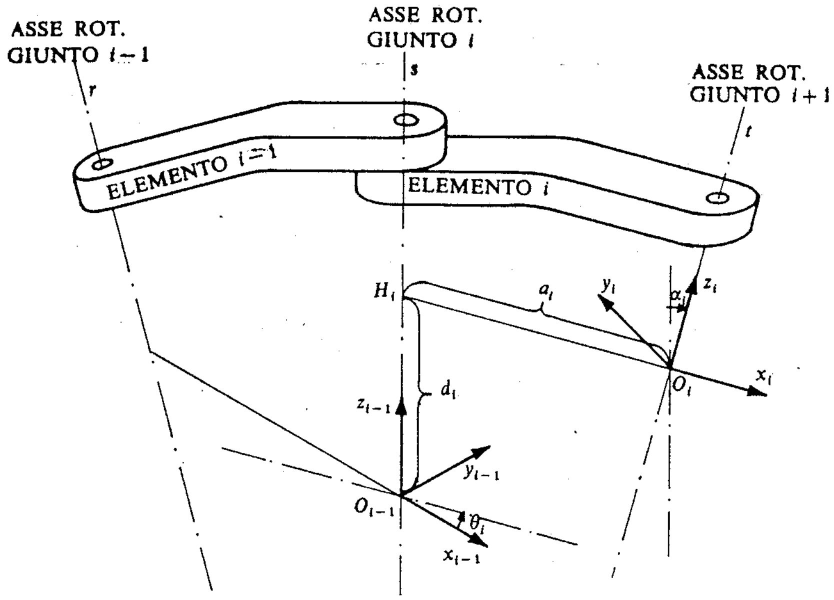

Fig. 14

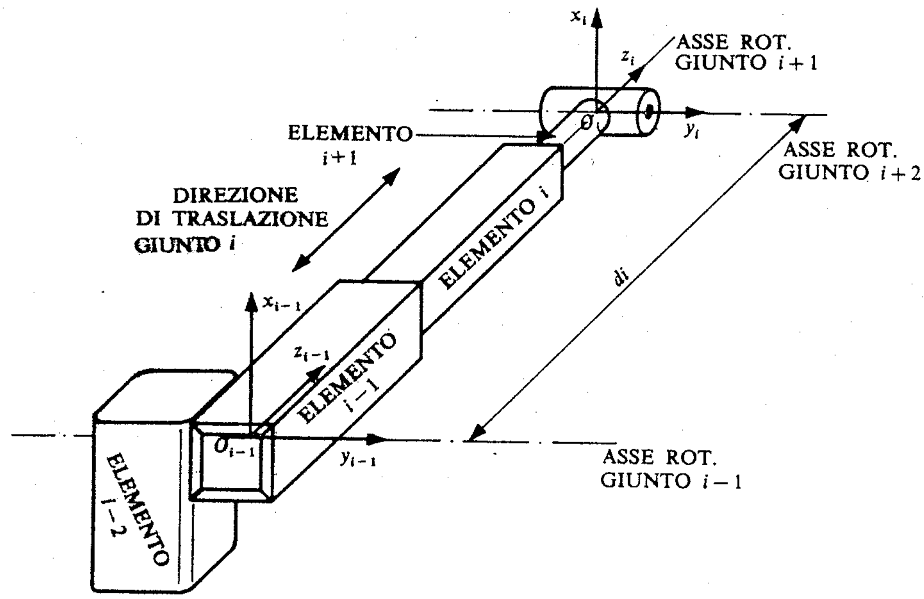

Fig. 15

Per quanto riguarda la terna base (la prima) si conviene di posizionare l'origine in un opportuno punto appartenente all'asse di rotazione del primo giunto e di far coincidere quest'ultimo con l'asse Z_0. La disposizione degli assi X_0 e Y_0 e' invece arbitraria.
Per la terna di estremità risulta conveniente posizionare l'origine in un opportuno punto dell'organo terminale e di orientare gli assi in modo che sia semplice descrivere rispetto ad essi le operazioni di lavoro (Fig.10).
Si considerino ora i due generici elementi della struttura di un robot riportati in Fig.14 con le relative terne.
La rappresentazione di Denavit e Hartenberg utilizza quattro parametri per descrivere la posizione e l'orientamento della i_esima terna rispetto alla i-1-esima.
La prima coppia descrive la geometria dell'i-esimo elemento della struttura ed è costituita pertanto da due costanti. Tali costanti sono:

a_i - distanza dell'asse z_i da z_{i-1} . Tale distanza e' la lunghezza della normale comune, cioè di quel segmento compreso tra i due assi e normale ad entrambi. Questa costante esprime la lunghezza dell'elemento della struttura.

α_i **-** angolo formato dalle proiezioni dei due assi z_i e z_{i-1} su un piano perpendicolare alla normale comune. Per convenzione si assume l'angolo positivo quando la proiezione dell'asse z_{i-1} deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse x_i per sovrapporla a quella dell'asse z_i. Questa costante esprime l'angolo di rotazione dell'elemento della struttura.

La seconda coppia determina la posizione relativa dei due giunti adiacenti i ed i+1 ed è formata da una costante e da una variabile.

d_i - distanza tra le due intersezioni che gli assi x_{i-1} ed x_i hanno con l'asse e z_{i-1}. Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto i sia di tipo prismatico;

ϑ_i - angolo formato dalla proiezione delle due normali comuni (assi x_{i-1} ed x_i su un piano perpendicolare all' asse e z_{i-1}. Per convenzione si assume positivo l'angolo quando la proiezione dell'asse x_{i-1} deve essere ruotata in senso antiorario attorno all'asse z_{i-1} per sovrapporla a quella dell'asse x_i. Tale parametro risulta essere variabile nel caso in cui il giunto i sia rotoidale.

Con questi quattro parametri si e' in grado di rappresentare la posizione e l'orientamento della terna i-esima rispetto alla terna i-1-esima. Per semplificare la procedura che porta a scrivere la trasformazione omogenea relativa e' utile introdurre la terna intermedia H_i_x'y'z' (Fig.16). Tale terna avrà l'origine nel punto di intersezione tra l'asse z_{i-1} e x_i , l'asse x' diretto come x_i e l'asse z' come z_{i-1}. Utilizzando le due costanti a_i ed α_i che descrivono la geometria dell'i-esimo elemento della struttura è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna O_i_$x_i y_i z_i$ alla H_i _x'y'z'. Tale trasformazione sarà il risultato di una traslazione di a_i lungo l'asse x' e di una rotazione di α_i attorno all'asse x':

$$H_i=\mathrm{trasl}(a_i,0,0)\mathrm{rot}(x',\alpha_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & \cos\alpha_i & -sen\alpha_i & 0 \\ 0 & sen\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tramite i due parametri che descrivono la posizione relativa dei due giunti i-1 e i è possibile scrivere la trasformazione omogenea che permette di passare dalla terna H_i_x'y'z' alla O_{i-1}_$x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$. Tale trasformazione e' composta dalla traslazione di lungo l'asse Z_{i-1} e dalla rotazione ϑ_i attorno allo stesso asse.

$$H'_i= \mathrm{trasl}\,(0,0\,d_i)\,\mathrm{rot}\,(z,\ \vartheta_i) = \begin{bmatrix} C_i & -S_i & 0 & 0 \\ S_i & C_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

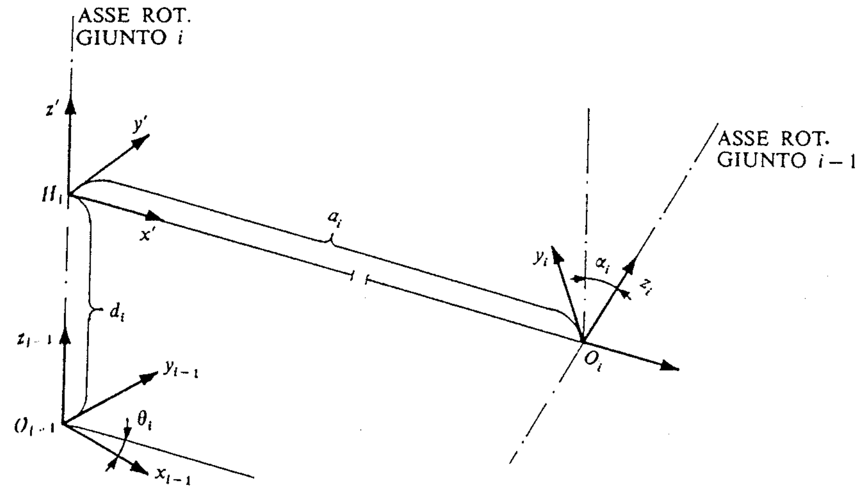

Fig. 16

La trasformazione omogenea di Denavit e Hartenberg è data dal prodotto delle due matrici H_i ed H_i':

$$H_{i'}H_i = A_i^{i-1} = \begin{bmatrix} C_i & -S_1\cos\alpha_1 & S_1 sen\alpha & a_iC_i \\ S_i & C_1\cos\alpha_{ii} & -C_1 sen\alpha_i & a_iS_i \\ 0 & sen\alpha_i & \cos\alpha_i & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Per i giunti rotoidali la variabile di giunto è l'angolo ϑ_i mentre per quelli prismatici è la lunghezza d_i. Inoltre, quando il giunto i-esimo e' prismatico, la costante a_i si annulla.

5 - Esempi di cinematica diretta

Le fasi che permettono di ricavare l'equazione cinematica di un robot, indipendentemente dalla complessità della sua struttura, possono essere così riassunte:
- definire una terna base di riferimento e assegnare ad ogni elemento della struttura una terna secondo le regole precedentemente esposte. Pur seguendo il formalismo di Denavit e Hartenberg le terne possono essere disposte in molti modi diversi per cui uno stesso problema può essere risolto con più procedimenti equivalenti al fine del risultato finale.
- ricavare i parametri cinematici caratteristici per i giunti e per gli elementi della struttura.
- ricavare le trasformazioni omogenee Ai che mettono in relazione la terna i-esima con la i-1-esima.
- ottenere l'equazione cinematica moltiplicandole tra loro.

5.1 - Robot a due gradi di libertà

Si consideri il robot a due gradi di libertà descritto nel Par. 2 e riportato in Fig. 4 e se ne determini l'equazione cinematica.

Terne di riferimento:

O_0_X_0,$Y_0$$Z_0$

O_0: intersezione tra Z_0 e il piano in cui si muove il robot.
X_0: direzione arbitraria.
Y_0: completa la terna destra.

Z_0: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.

$O_1\_x_1y_1z_1$

O_1: intersezione tra z_1 e il piano in cui si muove il robot.
x_1: prolungamento della normale comune agli assi Z_0 e z_1 passante per O_0 .
y_1: completa la terna destra.
z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

$O_2\_x_2y_2z_2$

O_2: punto di chiusura della pinza del robot.
x_2: prolungamento del segmento O_1O_2
y_2: completa la terna destra.
z_2: parallelo a Z_0 e z_1.

Parametri cinematici e variabili di giunto:

Giunto	ϑ_i	d 1	α_i	a_1	Matrice
1	ϑ_1	0	0	l_1	A_1
2	ϑ_2	0	0	l_2	A_2

Matrici di trasformazione D-H:

Sostituendo nella trasformazione di Denavit e Hartenberg i parametri cinematici e le variabili di giunto si ricavano le matrici A_1 e A_2 riportate nel Punto.2.

Equazione cinematica:

$n_x = C_{12}$
$n_y = S_{12}$
$n_z = 0$

$o_x = -S_{12}$
$o_y = C_{12}$
$o_z = 0$

$a_x = 0$
$a_y = 0$
$a_z = 1$

$p_x = l_2 * C_{12} + l_1 * C_1$
$p_y = l_2 * S_{12} + l_1 * S_1$
$p_z = 0$

<u>5.2 - Robot cilindrico a tre gradi di libertà</u>

Si consideri il robot cilindrico di Fig.17 e se ne determini l'equazione cinematica.

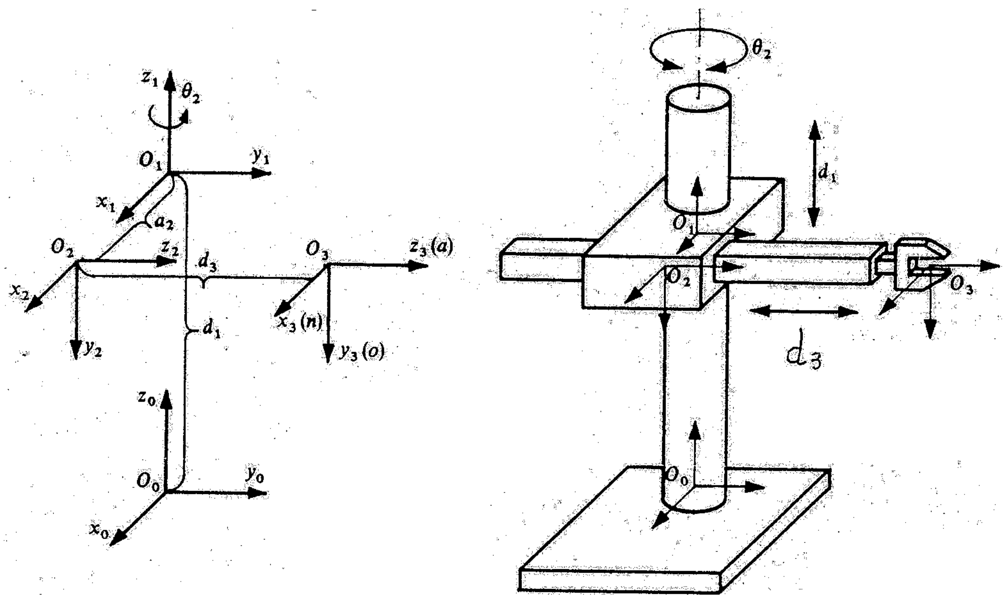

Fig. 17

Terne di riferimento:

O_0_$X_0Y_0Z_0$

O_0: un punto dell'asse di traslazione del primo giunto coincidente con quello di rotazione del secondo.

X_0: direzione arbitraria.

Y_0: completa la terna destra.

Z_0: coincidente con l'asse parallelo alla direzione di traslazione del 1° giunto passante per O_0.

O_1_$x_1y_1z_1$

O_1: intersezione tra z_1 e la normale comune con la retta parallela alla direzione di traslazione del terzo giunto passante per O_3.

x_1: coincidente con X_0 quando d_1=0.

y_1: coincidente con Y_0 quando d_1=0.

z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

O_2_$x_2y_2z_2$

O_2: intersezione tra z_2 e la normale comune a z_1.

x_2: normale al piano individuato da z_1 e z_2.

y_2: completa la terna destra.

z_2: coincidente con la retta parallela alla direzione di traslazione del 3°giunto passante per O_3.

O_3_$x_3y_3z_3$

O_3: punto di chiusura della pinza del robot.

x_3: coincidente con il vettore normale della pinza.

y_3: coincidente con il vettore apertura.

z_3: coincidente con il vettore avvicinamento.

Parametri cinematici e variabili di giunto:

Giunto	ϑ_i	d_i	α_i	a_i	Matrice
1	0	d_1	0	0	A_1
2	ϑ_3	0	-90°	a_2	A_2
3	0	d_3	0	0	A_3

Matrici di trasformazione D-H:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & a_2C_2 \\ S_2 & 0 & C_2 & a_2S_2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazione cinematica:

$n_x = C_2$
$n_y = S_2$
$n_z = 0$

$o_x = 0$
$o_y = 0$
$o_z = -1$

$a_x = -S_2$
$a_y = C_2$
$a_z = 0$

$p_x = -d_3 S_2 + a_2 C_2$
$p_y = d_3 C_2 + a_2 S_2$
$p_z = d_1$

<u>Esempio</u>: dato il robot di Fig.17, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$d_1 = 500$ mm
$\vartheta_3 = 30°$

d_3 = 400 mm

sapendo che:

a_2 = 100 mm

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto al riferimento:

$$T = A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} .866 & 0 & -.500 & -113.4 \\ .500 & 0 & .866 & 396.4 \\ 0 & -1 & 0 & 500 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato disegnando la configurazione della struttura corrispondente ai dati del problema.

5.3 - Robot antropomorfo a tre gradi di libertà

Si consideri il robot antropomorfo di Fig.18 e se ne determini l'equazione cinematica.

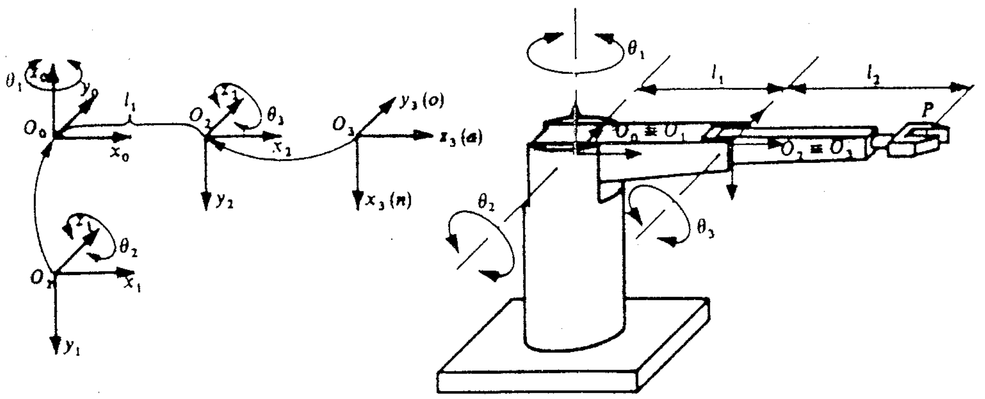

Fig. 18

Terne di riferimento:

O_0_$X_0Y_0Z_0$

O_0: intersezione tra Z_0 e Z_1.

X_0,Y_0: direzioni arbitrarie.

Z_0: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto.

O_1_$x_1y_1z_1$

O_1: coincidente con O_0.

x_1: normale al piano individuato da Z_0 e z_1.

y_1: completa la terna destra.

z_1: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto.

O_2_$x_2y_2z_2$

O_2: intersezione tra z_2 e la normale comune con z_1 passante per O_1.

x_2: prolungamento della normale comune.
y_2: completa la terna destra.
z_2: coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto.

$O_3\_x_3y_3z_3$

O_3: coincidente con O_2.
x_3: coincidente con il vettore normale della pinza.
y_3: coincidente con il vettore apertura.
z_3: coincidente con il vettore avvicinamento.

Intuitivamente si sarebbe tentati di sistemare l'origine di questa terna in corrispondenza del punto di chiusura della pinza. Questa sistemazione non è tuttavia compatibile con la metodologia di Denavit e Hartenberg in quanto i quattro parametri non sarebbero sufficienti per descriverne la posizione rispetto alla terna precedente. In particolare, per portare a coincidere le due origini, sarebbe necessario traslare O_3 lungo l'asse x_2, movimento non permesso dal formalismo adottato.
La posizione della pinza (P in Fig.18), detta l_2 la distanza tra P ed O_3 può essere calcolata come segue:

$$P_x = p_x + l_2 a_x$$
$$P_y = p_y + l_2 a_y$$
$$P_z = p_z + l_2 a_z$$

Infatti P si trova sul prolungamento in direzione positiva dell' asse z_3, di cui si conoscono i coseni direttori a_x, a_y, a_z.
L'orientamento e' invece determinato dalla conoscenza di quello della terza terna.

Parametri cinematici e variabili di giunto:

Giunto	ϑ_i	d_i	α_i	a_i	Matrice
1	ϑ_1	0	-90	0	A_1
2	ϑ_2	0	0	l_1	A_2
3	ϑ_3	0	90	0	A_3

Matrici di trasformazione D-H:

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & l_1C_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & l_1S_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} C_3 & 0 & S_3 & 0 \\ S_3 & 0 & -C_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazione Cinematica

$n_x = C_1C_{23}$
$n_y = S_1C_{23}$
$n_z = -S_{23}$

$o_x = -S_1$
$o_y = C_1$
$oz = 0$

$a_x = C_1S_{23}$
$a_y = S_1S_{23}$
$az = C_{23}$

$p_x = l_1C_1C_2$
$p_y = l_1S_1C_2$
$p_z = - l_1S_2$

La posizione della pinza è data da :

$Px = l_1C_1C_2 \; + \; l_2C_1S_{23}$
$Py = l_1S_1C_2 \; + \; l_2S_1S_{23}$
$Pz = -l_1S_2+l_2C_{23}$

<u>Esempio</u>: dato il robot di Fig.18, calcolare la posizione e l'orientamento dell'estremità della struttura quando:

$\vartheta_1 = 90\ °$
$\vartheta_2 = 0\ °$
$\vartheta_3 = 0°$

sapendo che:

$l_1 = 600$
$l_2 = 500$

Sostituendo nell'equazione cinematica, si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terza terna rispetto al riferimento:

$$T = A_1A_2A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato osservando la Fig.18 che rappresenta il robot con questa configurazione dei giunti.
La posizione del centro pinza sarà un punto che, rispetto all'origine O_3 e' traslato di 500mm nel verso positivo dell'asse z_3. Conoscendo i versori di z_3 le coordinate di tale punto possono essere calcolate:

ascissa	->	600+1*500 = 1100 mm
ordinata	->	0+0*0 = 0 mm
quota	->	0+0*0 = 0 mm

L'orientamento della pinza è definito dai versori degli assi della terza terna.

5.4 - Polso sferico

Si consideri il polso sferico di Fig.19 e se ne determini l'equazione cinematica.

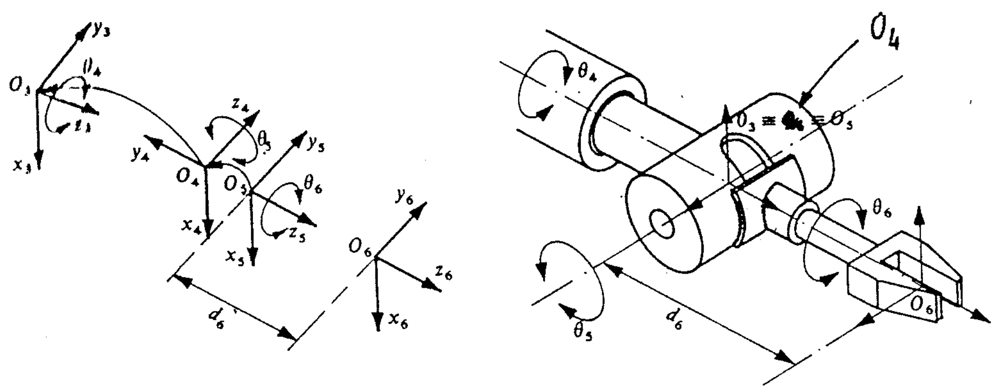

Fig. 19

Terne di riferimento:

Il polso viene normalmente collocato a valle dei tre giunti principali per permettere al robot di orientare correttamente gli oggetti. Per questo si considererà come terna di riferimento la $O_3\_x_3y_3z_3$ mentre le successive avranno indice crescente, così come le variabili di giunto che saranno indicate con $\vartheta_4 \vartheta_5 \vartheta_6$.

$O_3\_x_3y_3z_3$

O_3: intersezione degli assi di rotazione dei giunti.
x_3,y_3: direzioni arbitrarie.
z_3: coincidente con l'asse di rotazione del primo giunto del polso.

$O_4\_x_4y_4z_4$

O_4: coincidente con O_3.
x_4: normale al piano individuato da z_3 e z_4.
y_4: completa la terna destra.
z_4: coincidente con l'asse di rotazione del secondo giunto del polso.

$O_5\_x_5y_5z_5$

O_5: coincidente con O_4.
x_5: normale al piano individuato da z_4 e z_5.
y_5: completa la terna destra.

z_5: coincidente con l'asse di rotazione del terzo giunto del polso.

$O_6\_x_6 y_6 z_6$

O_6: punto di chiusura della pinza del robot.
x_6: coincidente con il vettore normale della pinza.
y_6: coincidente con il vettore apertura.
z_6: coincidente con il vettore avvicinamento.

Parametri cinematici e variabili di giunto:

Giunto polso	ϑ_i	d_i	α_i	a_i	Matrici
1	ϑ_4	0	-90	0	A_1
2	ϑ_5	0	90	0	A_2
3	ϑ_6	d_6	0	0	A_3

Matrici di trasformazione D-H:

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & -S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Equazione cinematica:

$n_x = C_4C_5C_6-S_4 S_6$
$n_y = S_4C_5C_6-C_4 S_6$
$n_z = -S_5C_6$

$o_x = -C_4C_5S_6-S_4 C_6$
$o_y = S_4C_5C_6-C_4 S_6$
$o_z = -S_5C_6$

$a_x = C_4S_5$
$ay = S_4S_5$
$az = C_5$

$p_x =d_6C_4 S_5$
$p_y =d_6S_4 S_5$

$p_z = d_6 S_5$

<u>Esempio</u>: dato il polso di Fig.19, calcolare la posizione e l'orientamento della sua terna di estremità quando:

$\vartheta_4 = 0°$
$\vartheta_5 = 0°$
$\vartheta_6 = 0°$

sapendo che:

d6 = 150 mm

Sostituendo nell'equazione cinematica si calcola la trasformazione omogenea che descrive la terna di estremità rispetto a quella di riferimento:

$$T = A_4 A_5 A_6 = = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il risultato ottenuto può essere verificato immediatamente in riferimento alla fig.19.