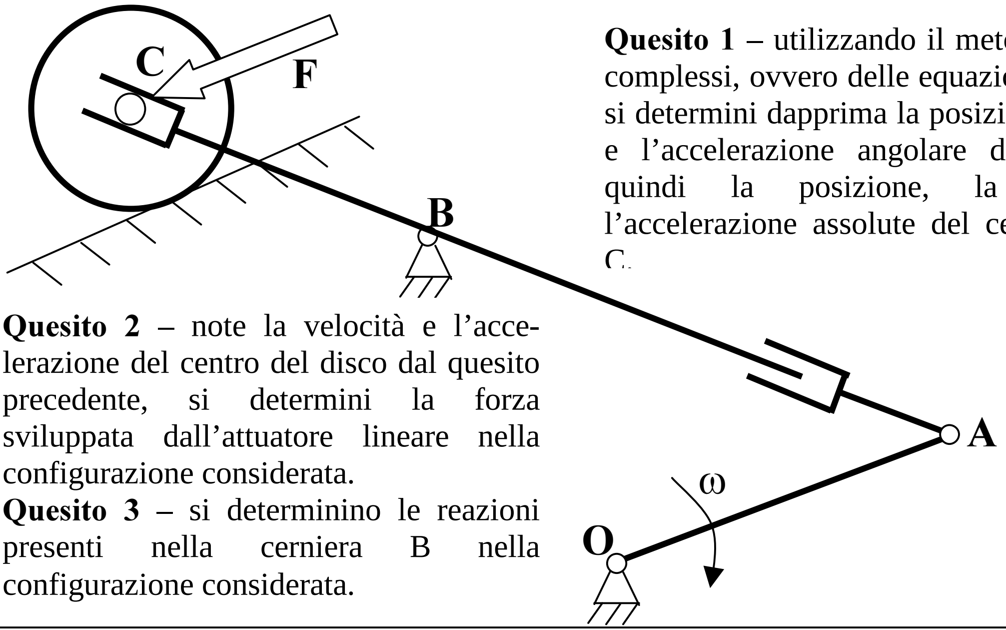
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 23 gennaio 2002

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato di cui si conosce:

- la geometria del sistema (si ritengano noti il vettore OA, il vettore OB, l'equazione del piano su cui rotola il disco e il raggio dello stesso);
- le inerzie dei componenti (disco: massa (M) e momento di inerzia baricentrico (J), asta OA e asta AB con massa trascurabile);
- la forza F costante agente sul centro del disco con direzione parallela al piano di rotolamento;
- la velocità angolare ω=costante con verso orario della manovella OA.



Quesito 1 – utilizzando il metodo dei numeri complessi, ovvero delle equazioni di chiusura, si determini dapprima la posizione, la velocità e l'accelerazione angolare dell'asta AB e quindi la posizione, la velocità e l'accelerazione assolute del centro del disco C.

Quesito 2 – note la velocità e l'accelerazione del centro del disco dal quesito precedente, si determini la forza sviluppata dall'attuatore lineare nella configurazione considerata.

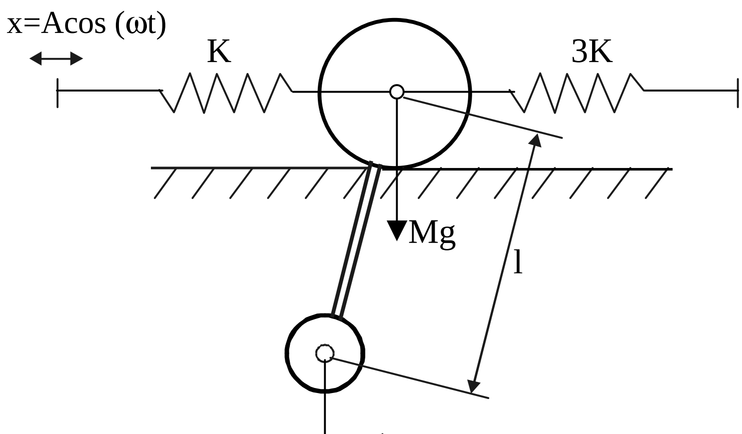
Quesito 3 – si determinino le reazioni presenti nella cerniera B nella configurazione considerata.

Es. 2 - Dato il sistema a due gradi di libertà sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio del sistema;
- linearizzare le equazioni sopra determinate nell'intorno della posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema linearizzato.

A tal fine si ritengano note:

- la massa, il momento di inerzia baricentrico e il raggio del disco (M, J, R);
- la massa puntiforme (m) del disco di estremità del pendolo considerando trascurabile quella dell'asta;
- la lunghezza del pendolo (l);
- le rigidezze delle due molle.



Es. 3 – Descrivere i vantaggi derivanti dall'utilizzo di un profilo ad evolvente nella realizzazione di ingranaggi ad assi paralleli.

Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	punto a terra	nulla	nulla
Punto A	circonferenza centrata in O	ωOA	ω^2OA
Punto B	Punto a terra	Nulla	nulla
Punto C	// piano di scorrimento	?	?

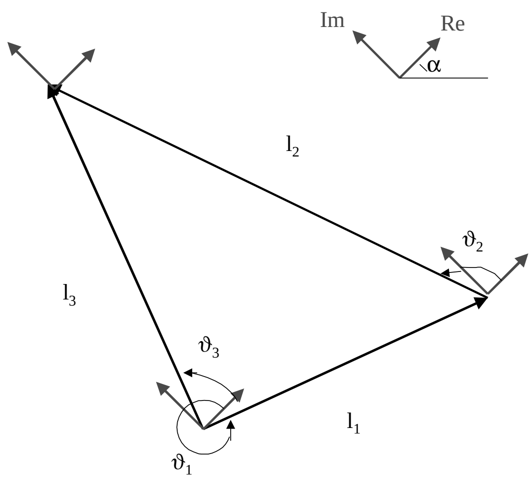
Analizziamo ora i gradi di libertà: il sistema e' formato da quattro corpi (asta OA, le due parti che compongono l'attuatore lineare AC e il disco C) per un totale di dodici gradi di liberta'.
Analizziamo ora i vincoli: il sistema sono rappresentati da tre cerniere (O, A e B), da un giunto prismatico (quello dell'attuatore lineare), dal contatto tra disco e piano e dal collegamento in C tra asta e disco per un totale di undici gradi di vincolo.
Si evince che il sistema presenta un unico grado di libertà.

Sistema vettoriale equivalente

Prima di tutto osserviamo che e' utile operare un cambio di riferimento, chiamando α l'angolo che il piano inclinato (lungo il quale scorre il disco) forma con l'orizzontale avremo:

$$e^{i\alpha} = \vec{i}_1$$
$$ie^{i\alpha} = \vec{j}_1$$

Dove $\vec{i}_1$ e $\vec{j}_1$ sono i nuovi assi. D'ora in poi tutti gli angoli saranno riferiti al nuovo sistema di assi coordinati.
Dato il sistema di partenza ne consideriamo dapprima il sottosistema OAB costituito dall'asta OA e dall'asta AB come mostrato nella figura sottostante, adottando come convenzioni per i versi quelle esposte nella prima esercitazione sui numeri complessi.



Dai dati del problema abbiamo che nell'istante iniziale:

$$\vartheta_1 = \vartheta_0$$
$$\dot{\vartheta}_1 = \omega \text{ =costante}$$
$$\ddot{\vartheta}_1 = 0$$

Analizziamo i vettori in modo da verificare che non siano presenti più di due incognite, nella quale ipotesi il sistema non sarebbe risolubile a mezzo della sola equazione di chiusura.

	l_1	l_2	l_3
modulo	Noto (OA)	?	Noto (OB)
anomalia	Nota ϑ_1	?	Nota e costante ϑ_2

Il sistema vettoriale equivalente e':

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$$

dove i vettori $\vec{l}_1$ e $\vec{l}_3$ hanno modulo costante mentre il vettore $\vec{l}_2$ ha modulo variabile come conseguenza dell'allungamento dell'attuatore lineare.

Posizione dell'asta AB

Scomponendo l'equazione nelle sue due componenti lungo l'asse reale $\vec{i}_1$ e l'asse immaginario $\vec{j}_1$ otteniamo:

$$l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2 = l_3 \cos\vartheta_3$$
$$l_1 sen\vartheta_1 + l_2 sen\vartheta_2 = l_3 sen\vartheta_3$$

in cui le nostre incognite sono $\vec{l}_2$ e ϑ_2.
Ricaviamo $\vec{l}_2$ dalla seconda equazione:

$$l_2 = \frac{l_3 sen\vartheta_3 - l_1 sen\vartheta_1}{sen\vartheta_2}$$

lo sostituiamo nella prima equazione e otteniamo:

$$\tan\vartheta_2 = \frac{l_3 sen\vartheta_3 - l_1 sen\vartheta_1}{l_3 \cos\vartheta_3 - l_1 \cos\vartheta_1}$$

da cui:

$$\vartheta_2 = \arctan(\frac{l_3 sen\vartheta_3 - l_1 sen\vartheta_1}{l_3 \cos\vartheta_3 - l_1 \cos\vartheta_1})$$

e' quindi facilmente ottenibile anche il valore di $\vec{l}_2$.

Velocita' dell'asta AB

Derivo il sistema di equazioni precedente:

$$
\begin{aligned}
&-l_1\dot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1 + \dot{l}_2\cos\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 = 0\\
&l_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 + \dot{l}_2 sen\vartheta_2 + l_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 = 0
\end{aligned}
$$

non compare il termine contenente la derivata di ϑ_3 essendo quest'ultimo costante e determinato dalla geometria.
Dalla prima equazione ottengo:

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{\dot{l}_2\cos\vartheta_2 - l_1\dot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1}{l_2 sen\vartheta_2}$$

sostituendolo nella seconda equazione abbiamo:

$$\dot{l}_2 = -l_1\dot{\vartheta}_1 sen(\vartheta_2 - \vartheta_1)$$

Si ricava quindi il valore di $\dot{\vartheta}_2$.

Accelerazione dell'asta AB

Derivo ulteriormente il sistema di equazioni precedente:

$$
\begin{aligned}
&-l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1 + \ddot{l}_2\cos\vartheta_2 - \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - l_2\ddot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2^2\cos\vartheta_2 = 0\\
&-l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\vartheta_1 + \ddot{l}_2 sen\vartheta_2 + \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 + \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 + l_2\ddot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2^2 sen\vartheta_2 = 0
\end{aligned}
$$

notiamo che non e' presente il termine in $\ddot{\vartheta}_1$ avendo quest'ultimo valore nullo.
Raccogliamo i termini noti e denominiamoli con delle lettere maiuscole:

$$
\begin{aligned}
&A = -l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1 - \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_{22} - l_2\dot{\vartheta}_2^2\cos\vartheta_2\\
&B = -l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\vartheta_1 + \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 + \dot{l}_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2^2 sen\vartheta_2
\end{aligned}
$$

il sistema pertanto si riduce a:

$$
\begin{aligned}
&A + \ddot{l}_2\cos\vartheta_2 - l_2\ddot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 = 0\\
&B + \ddot{l}_2 sen\vartheta_2 + l_2\ddot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 = 0
\end{aligned}
$$

Si noti che i termini incogniti sono quelli che contengono termini con l'accelerazione essendo sia le posizioni che le velocità note o determinate ai passi precedenti del problema.
Dalla prima equazione otteniamo:

$$\ddot{l}_2 = \frac{l_2\ddot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - A}{\cos\vartheta_2}$$

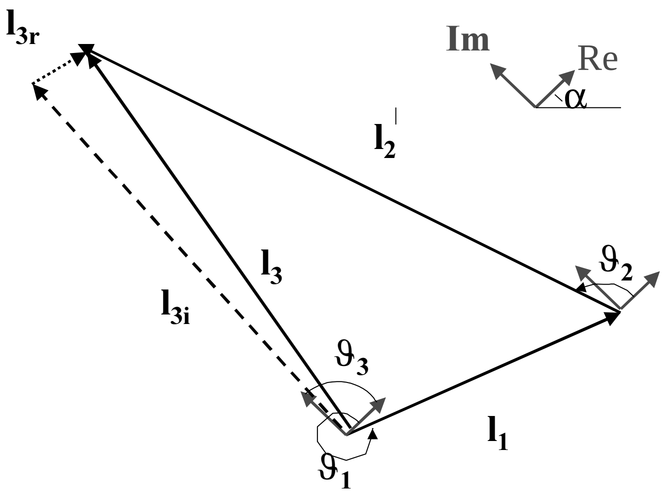
che sostituito nella seconda permette di ottenere:

$$\ddot{\vartheta}_2 = \frac{Asen\vartheta_2 - B\cos\vartheta_2}{l_2}$$

tramite il quale si ricava il valore di $\ddot{l}_2$.

Considero ora il sistema OAC (due aste piu' disco) rappresentato nel disegno sottostante, con il vettore $l_2^{'}$ che individua l'asta AC:

$$l_2^{'} = l_2 + BC$$



Analizziamo i singoli vettori per verificare che non siano presenti piu' di due incognite.

	l_1	$l_2^{'}$	l_{3i}	l_{3r}
modulo	Noto (OA)	?	Noto	?
anomalia	Nota (ϑ_1)	Nota (ϑ_2)	90°	0°

il sistema vettoriale equivalente e':

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2^{\,'} = \vec{l}_3$$

Posizione del disco C

Scomponendo l'equazione nelle sue due componenti lungo l'asse reale $\vec{i}_1$ e l'asse immaginario $\vec{j}_1$ otteniamo:

$$l_1\cos\vartheta_1 + l'_2\cos\vartheta_2 = l_{3r}$$

$$l_1 sen\vartheta_1 + l'_2 sen\vartheta_2 = l_{3i}$$

dove si e' scomposto il vettore che individua la posizione del disco C nelle sue due componenti: una variabile lungo l'asse reale e l'altra fissa (dovuta al fatto che il disco e' vincolato a scorrere sul piano senza distaccarsene) lungo l'asse immaginario.
Dalla prima delle due equazioni ricaviamo facilmente la posizione del disco C, l_{3r} essendo gli altri valori noti dai calcoli precedenti.

Velocita' del disco C

Derivando le due equazioni sopra riportate si determina la velocità $\dot{l}_{3r}$ del disco C che è presente al secondo membro della prima delle due equazioni come sotto riportata:

$$-l_1\dot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1 + \dot{l}'_2 \cos\vartheta_2 - l'_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 = \dot{l}_{3r}$$

$$l_1\dot{\theta}_1 \cos\vartheta_1 + \dot{l}'_2 sen\vartheta_2 + l'_2\dot{\theta}_2 \cos\vartheta_2 = 0$$

Nota la velocità del disco, nell'ipotesi di puro rotolamento, si ricava la velocità angolare dello stesso.

Accelerazione del disco C

Derivando ancora una volta le equazioni sopra riportate si ottiene l'accelerazione $\ddot{l}_{3r}$ del disco C, presente al secondo membro della prima delle due equazioni sotto riportate:

$$-l_1\dot{\vartheta}_1^2 \cos\vartheta_1 + \ddot{l}'_2 \cos\vartheta_2 - \dot{l}'_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - \dot{l}'_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - l'_2\ddot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 - l'_2\dot{\vartheta}_2^2 \cos\vartheta_2 = \ddot{l}_{3r}.$$

$$l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\vartheta_1 + \ddot{l}'_2 sen\vartheta_2 + \dot{l}'_2\dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2 + \dot{l}'_2\dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2 + l'_2\ddot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2 + l'_2\dot{\vartheta}_2^2 sen\vartheta_2 = 0$$

Nota la accelerazione del disco, nell'ipotesi di puro rotolamento, si ricava la accelerazione angolare dello stesso.

La forza motrice sviluppata dall'attuatore lineare AB

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato, nel problema specifico, dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dt} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella del disco essendo l'asta OA in moto uniforme:

$$\frac{dE_C}{dt} = m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \dot{\vec{\omega}}_d$$

.

Potenza motrice

E' fornita dall'attuatore lineare:

$$W_m = \vec{F}_a \times \vec{v}$$

dove la velocità è quella relativa tra B ed A.

Potenza resistente

E' dovuta alla massa del disco il cui baricentro varia di quota ed alla forza applicata nel suo centro:

$$W_{rd} = -M\vec{g} \times \vec{v}_C - \vec{F}_r \times \vec{v}_C$$

dove C è il baricentro ed il punto centrale del disco. Nell'ipotesi di presenza di attrito volvente la relazione si modifica nel seguente modo:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_C - \vec{F}_r \times \vec{v}_C + f_v N v_C$$

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

- Ipotesi di assenza di attrito volvente:

$$m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \dot{\vec{\omega}}_d = \vec{F}_a \times \vec{v} + M\vec{g} \times \vec{v}_C + \vec{F}_r \times \vec{v}_C$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F.

- Ipotesi di presenza di attrito volvente:

$$m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \dot{\vec{\omega}}_d = \vec{F}_a \times \vec{v} + M\vec{g} \times \vec{v}_C + \vec{F}_r \times \vec{v}_C - f_v N v_C$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F e della reazione N che può tuttavia essere calcolata con gli equilibri dinamici.

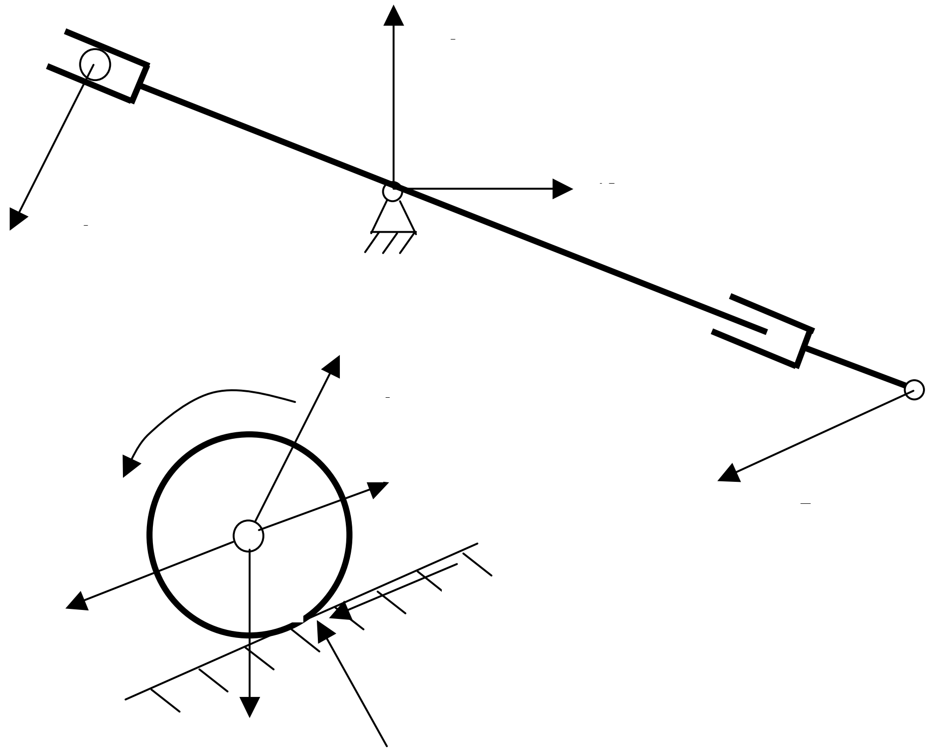
Le reazioni vincolari nella cerniera B

La cerniera presente in B materializza una cerniera priva di attrito per cui la sua rimozione comporterà l'introduzione di una forza di reazione vincolare; non essendo possibile determinare a priori la direzione di tale reazione vincolare, bisognerà disporre di due equazioni in modo da determinarne sia il modulo che l'anomalia (verso e direzione).

Per semplicità andremo a scomporre la reazione nelle sue componenti orizzontale (R_X) e verticale (R_Y).

Separiamo l'asta AC dal resto del sistema ed applichiamo nei punti di taglio le reazioni corrispondenti. In particolare la reazione che applicheremo in A sarà diretta come la manovella OA essendo quest'ultima scarica mentre quella in C sarà perpendicolare all'asta stessa essendo il vincolo con il disco liscio (il che garantisce l'assenza di componenti di reazione tangenziali, cioè dirette come il vincolo). Operando in questo modo abbiamo introdottc riori incognite portando il loro numero totale a quattro; si tratterà quindi di scrivere quatt ıi indipendenti in modo da avere a disposizione un sufficiente numero di reazioni per determınare ıe ıncognite.

Scriveremo le prime tre equazioni di equilibrio sull'asta, mentre per la quarta ricorreremo al disco isolato (facendo attenzione a non introdurre ulteriori incognite).



- Equilibrio alla rotazione attorno a C dell'asta:

$$M_C = \vec{R}_x \Lambda \overline{CB} + \vec{R}_y \Lambda \overline{CB} + \vec{R}_2 \Lambda \overline{CA} = 0$$

- Equilibrio alla rotazione attorno ad A dell'asta:

$$M_A = \vec{R}_x \Lambda \overline{AB} + \vec{R}_Y \Lambda \overline{AB} + \vec{R}_1 \Lambda \overline{AC} = 0$$

- Equilibrio alla rotazione attorno a B dell'asta:

$$M_B = \vec{R}_1 \Lambda B\vec{C} + \vec{R}_2 \Lambda B\vec{A}$$

Si sottolinea che l'asta permette di scrivere un massimo di tre relazioni indipendenti e che la scelta di scrivere l'equilibrio di tre momenti non è univoca in quanto si sarebbe potuto in modo equivalente scrivere i classici due equilibri alla traslazione (orizzontale e verticale) ed un momento. La scrittura di tre momenti si presenta vantaggiosa in quanto limita il numero di incognite presenti nelle singole equazioni.

Serve scrivere una quarta equazione che individuiamo nell'equilibrio alla rotazione attorno al centro di istantanea rotazione H in quanto questa scelta permette di eliminare dall'equazione la reazione orizzontale T.

- Equilibrio alla rotazione del disco attorno al centro di istantanea rotazione H :

$$M_H = -M\vec{a}\Lambda\overrightarrow{HC} + M\vec{g}\Lambda\overrightarrow{HC} + \vec{R}_2\Lambda\overrightarrow{HC} - J_d\vec{\dot{\omega}} = 0$$

Per quanto riguarda la N, essa non entra nelle equazioni solo nell'ipotesi di attrito volvente nullo; in presenza di attrito volvente essa si sposta infatti nella direzione del moto di una quantità u, per cui entra nell'equazione come sotto riportato.

$$M_H = \vec{N}\Lambda\vec{u} - M\vec{a}\Lambda\overrightarrow{HC} + M\vec{g}\Lambda\overrightarrow{HC} + \vec{R}_2\Lambda\overrightarrow{HC} - J_d\vec{\dot{\omega}} = 0$$

In quest'ultima ipotesi si dovrà scrivere una quinta equazione per determinare il valore della N che, per non introdurre ulteriori incognite, potrebbe essere convenientemente l'equilibrio alla traslazione verticale del disco (normale alla linea sulla quale avviene il rotolamento).

$$N + mg \cos \alpha - R_1 \operatorname{sen} \beta = 0$$

Volendo alfine determinare anche la T sarà sufficiente scrivere una ulteriore relazione, ad esempio l'equilibrio alla traslazione lungo la linea di scorrimento, oppure direttamente rispetto all'orizzontale:

$$Y = T \operatorname{sen} \alpha - N \cos \alpha + mg \cos \alpha + F \cos \alpha + Ma \cos \alpha - R_2 \cos \beta = 0$$

dove l'angolo α esprime l'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale e l'angolo β l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale.

Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a tre gradi di libertà anche se la posizione del vincolo è data da una legge imposta:

θ rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
φ rotazione assoluta del pendolo (positiva se oraria);
y spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra);

si ipotizza che tutte le coordinate sopra riportate hanno valore nullo nella configurazione in cui tutte le molle del sistema non presentino deformazione. In particolare in corrispondenza alle due coordinate angolari nulle si immagina che la lunghezza delle due molle coincida con la loro lunghezza indeformata mentre la posizione del pendolo sia verticale.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del disco e di quella del pendolo, nelle componenti dovute alla rotazione ed alla traslazione. Si indichi con l la lunghezza del pendolo.

Energia cinetica del disco:

$$T_d = \frac{1}{2} M V_d{}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Dove V_d rappresenta la velocità assoluta del baricentro del disco che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_d = R\dot{\theta}$$

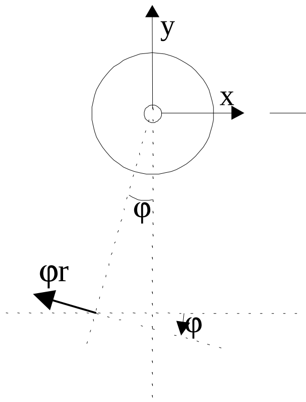
Energia cinetica del pendolo:

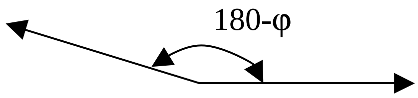
$$T_p = \frac{1}{2} m V_p{}^2$$

Dove V_p rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo. Immaginando di posizionare nel baricentro del disco una terna traslante solidalmente con esso, tale velocità può essere pensata come la somma di una componente di trascinamento (velocità del baricentro del disco e quindi della terna sopra definita) e di una relativa (oscillazione del pendolo rispetto alla terna sopra definita).

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{trasc} + \vec{V}_{rel}$$

Dal disegno del sistema risulta chiaro che la velocità di trascinamento è orizzontale diretta verso destra mentre quella relativa è diretta verso sinistra con un angolo rispetto all'orizzontale pari a 180-φ.
La massa m concentrata all'estremità inferiore del pendolo è puntiforme e quindi priva di momento di inerzia; questo significa fare coincidere l'energia cinetica con la sua componente legata alla traslazione.





Il quadrato della velocità assoluta può essere ottenuto come somma dei quadrati della velocità orizzontale e di quella verticale.

Velocità orizzontale:

$$V_o = V_{trasc\_o} + V_{rel\_o} = R\dot{\theta} + l\cos(180-\varphi)\dot{\varphi} = R\dot{\theta} - l\cos\varphi\dot{\varphi}$$

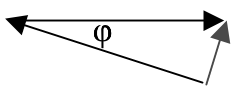
Velocità verticale:

$$V_v = V_{rel\_v} = lsen(180-\varphi)\dot{\varphi} = lsen\varphi\dot{\varphi}$$

Il quadrato della velocità assoluta sarà quindi dato da:

$$\begin{aligned} V_p &= (V_{trasc\_o} + V_{rel\_o})^2 + (V_{rel\_o})^2 = \\ &= (R\dot{\theta} - l\cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (lsen\varphi\dot{\varphi}) = \\ &= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\cos\varphi^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2 sen\varphi^2\dot{\varphi}^2 = \\ &= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} \end{aligned}$$

Si noti come allo stesso risultato si sarebbe arrivato utilizzando il teorema di Carnot o teorema del coseno, che poi non è altro che la legge di composizione delle velocità:



$$V_p = R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2(R\dot{\theta})(l\dot{\varphi})\cos\varphi$$

In definitiva l'energia cinetica associato alla massa m è quindi data da:

$$T_p = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi})$$

L'energia cinetica complessiva del sistema risulta quindi essere:

$$T_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro del pendolo conseguente alla sua oscillazione) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle due molle):

Energia potenziale elastica:

$$V_E = \frac{1}{2}K(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}(3K)(-R\theta)^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$V_G = mgl(1-\cos\varphi)$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$V_p = \frac{1}{2}K(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}(3K)(-R\theta)^2 + mgl(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}K(R^2\theta^2 - 2Rx\vartheta + x^2) + \frac{3}{2}KR^2\theta^2 + mgl(1-\cos\varphi) =$$

$$= 2KR^2\theta^2 + \frac{1}{2}K(x^2 - 2Rx\vartheta) + mgl(1-\cos\varphi)$$

Equazioni di equilibrio non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl(sen\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$\left((M+m)R^2+J\right)\ddot{\theta}+mRl(sen\varphi\dot{\varphi}^2-\cos\varphi\ddot{\varphi})+4KR^2\theta-KRx=0$$

<u>Seconda equazione:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi}+\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}-mRl\cos\varphi\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=ml^2\ddot{\varphi}+mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta}-mRl\cos\varphi\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=mRlsen\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=mglsen\varphi$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$ml^2\ddot{\varphi}+mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta}-mRl\cos\varphi\ddot{\theta}-mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta}+mglsen\varphi=$$
$$=ml^2\ddot{\varphi}-mRl\cos\varphi\ddot{\theta}+mglsen\varphi=0$$

<u>Posizione di equilibrio</u>

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze (scritte nell'ipotesi che il vincolo mobile sia fermo alla coordinata x=0):

$$\frac{\partial V}{\partial\theta}=4KR^2\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial\varphi}=mglsen\varphi$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\theta = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3......$$
$$\varphi = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3......$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta \partial \varphi}\right|_{0,0}\right)^2 > 0$$

Le derivate necessarie sono:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 4KR^2$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} = 0$$

da cui:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} = mgl$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0}\right)^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$V = V(\alpha,\beta) \cong V\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right|_{0,0}\alpha + \left.\frac{\partial V}{\partial \beta}\right|_{0,0}\beta + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right|_{0,0}\frac{\beta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{0,0}\alpha\beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} = mgl$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$V = \frac{1}{2}\left[4KR^2\right]\theta^2 + \frac{1}{2}\left[mgl\right]\varphi^2$$

Alla quale aggiungiamo ora il termine contenente la dipendenza dallo spostamento del vincolo, già lineare in partenza:

$$V = \frac{1}{2}4KR^2\theta^2 + \frac{1}{2}K(x^2 - 2Rx\vartheta) + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

Nell'esercizio proposto l'energia cinetica non necessita di linearizzazione. Ci limitiamo ad indicare il processo che sarebbe stato applicato in presenza di non linearità nella stessa.
Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$T = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$T \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nell'esercizio l'espressione dell'energia cinetica risulta è:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

per cui l'energia cinetica linearizzata sarà data da:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzati si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$\left((M+m)R^2 + J\right)\ddot{\theta} + mRl\ddot{\varphi} + 4KR^2\theta - KRx = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}-mRl\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right)=ml^2\ddot{\varphi}-mRl\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi}=0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi}=mgl\varphi$$

L’equazione di equilibrio risultante è:

$$ml^2\ddot{\varphi}-mRl\ddot{\theta}+mgl\varphi=0$$

In termini matriciali l’equazione può essere espressa come:

$$\begin{bmatrix}(M+m)R^2+J & mlR \\ mlR & ml^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4KR^2 & 0 \\ 0 & mgl\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta \\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}KRx \\ 0\end{Bmatrix}$$

Si noti che si perviene solo a due equazioni differenziali in quanto lo spostamento del vincolo è fornito in termini finiti dai dati del problema.

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\}=\{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

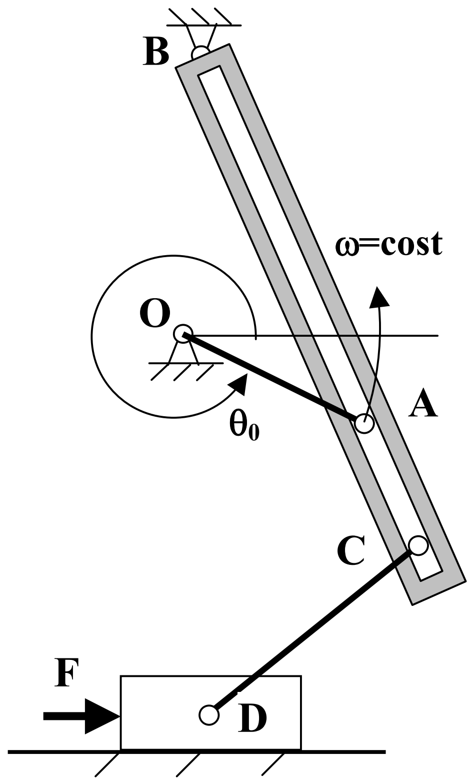
$$\det\left[-\omega_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]=0$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 04 febbraio 2002

Es. 1 - Dato il meccanismo riportato a lato di cui si conosce:

- il piano di lavoro che è verticale;
- la seguente geometria del sistema: i vettori OB ed OA nonché le lunghezza BC e CD;
- le inerzie dei componenti: la massa delle aste OA e CD siano trascurabili, il glifo BC abbia massa m e momento di inerzia rispetto a B pari a j e la slitta abbia massa M;
- la forza F costante agente sulla slitta con il verso indicato in figura;
- la anomalia θ_0 della manovella OA nella configurazione rappresentata e la sua velocità angolare ω=costante diretta in verso antiorario.

Quesito 1 – utilizzando il metodo dei numeri complessi, ovvero delle equazioni di chiusura, si determini dapprima la posizione, la velocità e l'accelerazione angolare del glifo BC e quindi la posizione, la velocità e l'accelerazione assolute della slitta D.
Quesito 2 – utilizzando le informazioni ricavate al quesito precedente si determini la coppia motrice applicata alla manovella OA nelle ipotesi di assenza di attrito;
Quesito 3 – si determinino le reazioni presenti nella cerniera B nella configurazione considerata.

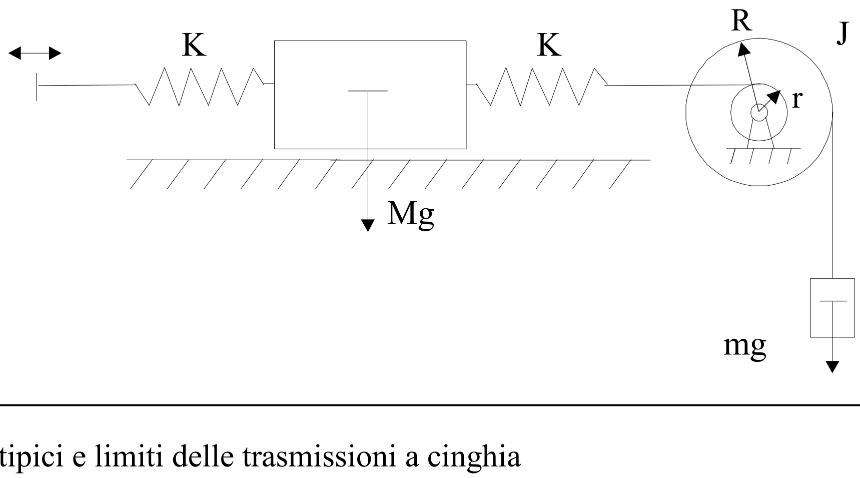


Es. 2 - Dato il sistema a due gradi di libertà sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio del sistema;
- linearizzare le equazioni sopra determinate nell'intorno della posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema linearizzato.

A tal fine si ritengano note: la massa del carrello (M) e della massa sospesa (m), il momento di inerzia baricentrico (J) del disco nonché i suoi raggi r (interno) ed R (esterno).

Y = Acos (ωt)



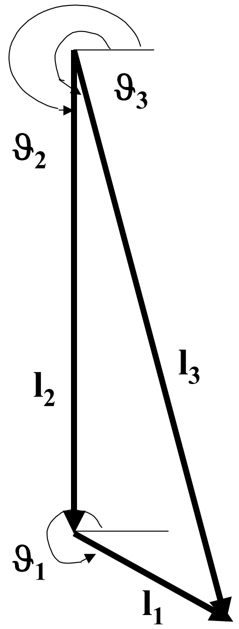
Es. 3 - Utilizzi tipici e limiti delle trasmissioni a cinghia

Analisi del sistema

Determiniamo i gradi di liberta' del sistema; esso e' formato da quattro corpi rigidi (aste OA e CD, glifo BC e da una slitta D) per un totale di dodici gradi di liberta' e da sei cerniere (di cui quattro rotoidali, una prismatica ed una assimilabile ad un carrello) che eliminano undici gradi di liberta'. Il sistema e' pertanto ad un solo grado di liberta'.

Sistema vettoriale equivalente

Dato il sistema di partenza ne consideriamo dapprima il sottosistema BOA costituito dall'asta OA e dal glifo BC come mostrato nella figura sottostante.
Le convenzioni adottate per il verso e la fase dei vettori sono quelle proposte ad esercitazione ed ivi descritte (verso antiorario e zero a partire da una semiretta orizzontale orientata verso destra uscente dall'origine).



Consideriamo la figura sopra riportata ed analizziamo i singoli vettori per verificare di non avere più di due incognite nel sistema, in quanto in tale ipotesi lo stesso non sarebbe risolubile con la sola equazione di chiusura.
A tal fine, considerando il solo problema della posizione è possibile scrivere la seguente tabella:

	l_1	l_2	l_3
modulo	Noto (costante)	Noto (costante)	?
fase	θ_1	Nota (270°)	?

dalla quale si evince che il numero di incognite è pari a due. Tale risultato discende direttamente dal fatto che il terzo vettore esprime la posizione del punto A che, essendo mobile rispetto al glifo, si caratterizzerà per avere un modulo variabile e la fase coincidente con quella del glifo stesso. Per quanto riguarda la fase del primo vettore essa è nota dai dati del problema e coincide con la legge del moto della manovella.

L'equivalente vettoriale del sottosistema e' dunque:

$$OA = \vec{l}_1$$
$$OB = \vec{l}_2$$
$$BA = \vec{l}_3$$

L'equazione vettoriale e':

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$$

che, passando ai numeri complessi diviene:

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 e\vartheta^{i\vartheta_2} = l_3 e^{i\vartheta_3}$$

Scomponendo l'equazione nelle sue due componenti secondo l'asse reale e immaginario otteniamo:

$$l_1 \cos\vartheta_1 = l_3 \cos\vartheta_3$$
$$-l_2 + l_1 sen\vartheta_1 = l_3 sen\vartheta_3$$

considerando che l'angolo ϑ_2 e' pari a $270°$.
Le nostre due incognite sono l_3 e ϑ_3 e dobbiamo esprimerle in funzione di ϑ_1.
Dalla prima equazione ricaviamo:

$$l_3 = \frac{l_1 \cos\vartheta_1}{\cos\vartheta_3}$$

lo sostituiamo nella seconda equazione e otteniamo:

$$\tan\vartheta_3 = \frac{l_1 sen\vartheta_1 - l_2}{l_1 \cos\vartheta_1}$$

da cui:

$$\vartheta_3 = \arctan\left(\frac{l_1 sen\vartheta_1 - l_2}{l_1 \cos\vartheta_1}\right)$$

ho cosi' determinato la posizione del glifo BC.
Noto quest'ultimo valore e sostituendolo in una delle due equazioni precedenti, si ricava anche il valore di l_3.

Velocita'

Per il calcolo delle velocita' derivo le due equazioni precedenti:

$$-l_1\dot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1 = \dot{l}_3\cos\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3$$
$$l_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 = \dot{l}_3 sen\vartheta_3 + l_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3$$

Dalla prima equazione ricavo:

$$\dot{l}_3 = \frac{l_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_1\dot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1}{\cos\vartheta_3}$$

lo sostituisco nella seconda espressione e ottengo:

$$l_1\dot{\vartheta}_1\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3) = l_3\dot{\vartheta}_3$$

da cui:

$$\dot{\vartheta}_3 = \frac{l_1\dot{\vartheta}_1\cos(\vartheta_1 - \vartheta_3)}{l_3}$$

ho cosi' ottenuto la velocità angolare del glifo. Ora, posso ricavare in modo ovvio anche il valore di $\dot{l}_3$.

Accelerazioni

Per ricavare le accelerazioni, derivo ancora una volta le due equazioni precedenti:

$$-l_1\ddot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1 - l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1 = \ddot{l}_3\cos\vartheta_3 - 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3$$
$$l_1\ddot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 - l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\vartheta_1 = \ddot{l}_3 sen\vartheta_3 + 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 + l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\vartheta_3$$

individuiamo i termini noti (dato un certo istante t_0) e poniamo:

$$A = -l_1\ddot{\vartheta}_1 sen\vartheta_1 - l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1 + 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 + l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3$$
$$B = l_1\ddot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 - l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\vartheta_1 - 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 + l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\vartheta_3$$

il sistema di equazioni precedenti diviene:

$$A = \ddot{l}_3\cos\vartheta_3 - l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3$$
$$B = \ddot{l}_3 sen\vartheta_3 + l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3$$

dalla prima equazione ricaviamo:

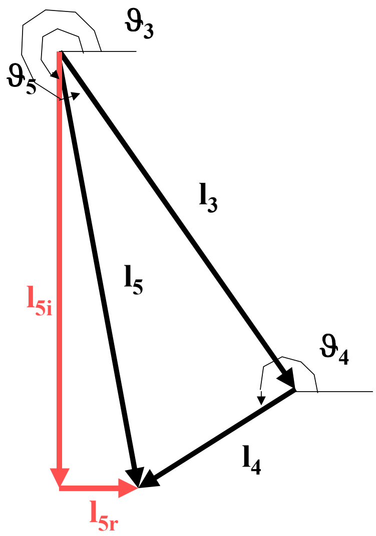
$$\ddot{l}_3 = \frac{A + l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3}{\cos\vartheta_3}$$

che, sostituito nella seconda espressione permette di ricavare l'accelerazione angolare del glifo:

$$\ddot{\vartheta}_3 = \frac{B\cos\vartheta_3 - A sen\vartheta_3}{l_3}$$

e poi, utilizzando quest'ultimo valore, otteniamo il valore di $\ddot{l}_3$.

Consideriamo ora il nuovo sottosistema costituito da glifo BC, asta CD e slitta D e il suo equivalente vettoriale (qui sotto riportato) che ci permettera' di determinare posizione, velocita' e accelerazione della slitta stessa.



Consideriamo la figura sopra riportata ed analizziamo i singoli vettori per verificare di non avere più di due incognite nel sistema.
A tal fine, considerando il solo problema della posizione è possibile scrivere la seguente tabella:

	l_3	l_4	l_{5r}	l_{5i}
modulo	Noto (BC)	Noto (costante)	?	Noto
fase	Nota (θ_3)	?	0°	270°

Posizione della slitta D

L'equazione vettoriale corrispondente al sottosistema considerato e':

$$\vec{l}_3 + \vec{l}_4 = \vec{l}_5$$

in questo caso il vettore $\vec{l}_3$ ha modulo fisso in quanto rappresenta il glifo BC, mentre il vettore $\vec{l}_5$ e' scomponibile in una componente lungo l'asse immaginario l_{5i} costante e in una componente lungo l'asse reale l_{5r} variabile solo in modulo (la fase è ovviamente sempre nulla).
L'equazione nelle sue due componenti diviene:

$$l_3 \cos\vartheta_3 + l_4 \cos\vartheta_4 = l_{5r}$$
$$l_3 sen\vartheta_3 + l_4 sen\vartheta_4 = l_{5i}$$

dalla seconda equazione ricavo:

$$sen\vartheta_4 = \frac{l_{5i} - l_3 sen\vartheta_3}{l_4}$$

da cui :

$$\vartheta_4 = arcsen(\frac{l_{5i} - l_3 sen\vartheta_3}{l_4})$$

sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene facilmente il valore:

$$l_{5r} = l_3 \cos\vartheta_3 + l_4 \cos\vartheta_4$$

ossia la posizione della slitta D.

Velocita' della slitta D

Derivando le due equazioni precedenti otteniamo:

$$-l_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_4\dot{\vartheta}_4 sen\vartheta_4 = \dot{l}_{5r}$$
$$l_3\dot{\vartheta}_3 \cos\vartheta_3 + l_4\dot{\vartheta}_4 \cos\vartheta_4 = 0$$

dalla seconda espressione ricavo:

$$\dot{\vartheta}_4 = -\frac{l_3\dot{\vartheta}_3 \cos\vartheta_3}{l_4 \cos\vartheta_4}$$

e sostituendolo nella prima espressione ottengo:

$$\dot{l}_{5r} = \frac{l_3\dot{\vartheta}_3 sen(\vartheta_4 - \vartheta_3)}{\cos\vartheta_4}$$

che e' la velocita' della slitta D.

Accelerazione della slitta D

Derivando ulteriormente il sistema di equazioni precedente otteniamo:

$$-l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3 - l_4\ddot{\vartheta}_4 sen\vartheta_4 - l_4\dot{\vartheta}_4^2\cos\vartheta_4 = \ddot{l}_{5r}$$
$$l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\vartheta_3 + l_4\ddot{\vartheta}_4\cos\vartheta_4 - l_4\dot{\vartheta}_4^2 sen\vartheta_4 = 0$$

individuiamo i termini costanti e poniamo:

$$A = -l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3 - l_4\dot{\vartheta}_4^2\cos\vartheta_4$$
$$B = l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\vartheta_3 - l_4\dot{\vartheta}_4^2 sen\vartheta_4$$

il sistema precedente diviene:

$$A - l_4\ddot{\vartheta}_4 sen\vartheta_4 = \ddot{l}_{5r}$$
$$B + l_4\ddot{\vartheta}_4\cos\vartheta_4 = 0$$

dalla seconda espressione ricavo:

$$\ddot{\vartheta}_4 = -\frac{B}{l_4\cos\vartheta_4}$$

conseguentemente otteniamo:

$$\ddot{l}_{5r} = A + B\tan\vartheta_4$$

che e' l'accelerazione della slitta D.

La coppia motrice applicata alla manovella OA

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dt} = W_m - W_r$$

oppure completato dalla loro presenza:

$$\frac{dE_C}{dt} = W_m - W_r - W_p$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella della slitta e del glifo:

$$\frac{dE_C}{dt} = M\vec{v}_D \times \vec{a}_D + m_G\vec{v}_G \times \vec{a}_G + J\vec{\omega}_G x\dot{\vec{\omega}}_G$$

dove la J del glifo è quella riferita al baricentro G. Si immagina di conoscerne il valore in quanto sono note tutte le caratteristiche geometriche del sistema.

Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$W_m = \vec{C} \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

Potenza resistente

E' dovuta alla massa del glifo m_G il cui baricentro varia di quota ed alla forza applicata alla slitta:

$$W_r = -m_G \vec{g} \times \vec{v}_G - \vec{F} \times \vec{v}_D$$

dove G è il baricentro del glifo. La velocità del baricentro è nota in quanto sono note la sua posizione e la velocità angolare del glifo.

Potenza persa

Questo termine è presente solo nell'ipotesi di presenza di attrito tra il piano di scorrimento e la slitta.
Detta T la reazione orizzontale presente a causa dell'attrito la potenza persa sarà data da:

$$W_p = -\vec{T} \times \vec{V}_D$$

dove G è il baricentro del glifo. La velocità del baricentro è nota in quanto sono note la sua posizione e la velocità angolare del glifo.

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

- Ipotesi di assenza di attrito:

$$m\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{\omega}_G x \dot{\vec{\omega}}_G = \vec{C} \times \vec{\omega} + m_G \vec{g} \times \vec{v}_G + \vec{F} \times \vec{v}_D$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C.

- Ipotesi di presenza di attrito:

$$m\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{\omega}_G x \dot{\vec{\omega}}_G = \vec{C} \times \vec{\omega} + m_G \vec{g} \times \vec{v}_G + \vec{F} \times \vec{v}_D + \vec{T} \times \vec{v}_D$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C e della reazione T che verrà calcolata nel punto successivo dell'esercizio.

Le reazioni vincolari nella cerniera B

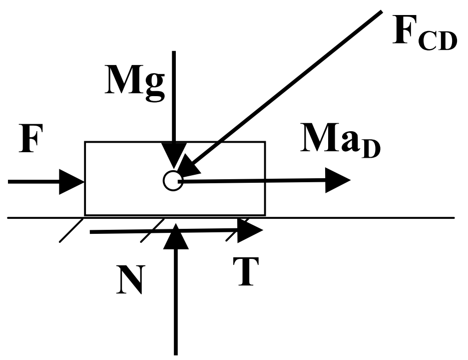
Le considerazioni principali da tenere presente sono:
- tutte le aste tranne il glifo sono scariche e prive di massa;
- l'unico attrito presente è quello tra slitta e piano

La conseguenza è che l'asta CD può essere considerata una biella e quindi la direzione della reazione incognita è da ritenersi nota e parallela a CD.

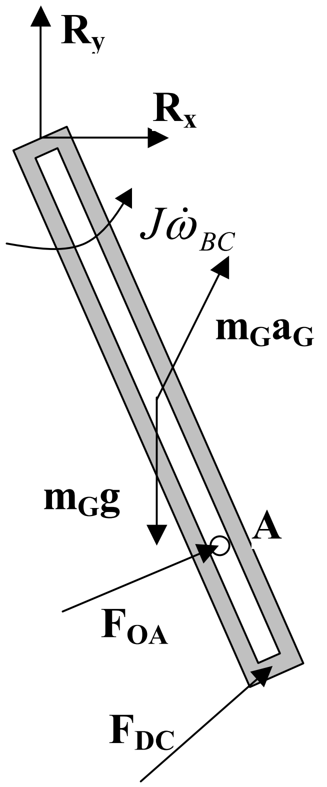
Il percorso risolutivo può essere il seguente:

- studio della slitta isolata per determinare la reazione normale N (e quindi la T) nonché la forza trasmessa dalla biella CD;
- studio del glifo isolato per la determinazione delle due reazioni incognite (e come sottoprodotto la reazione trasmessa dalla biella OA).

Cominciamo dal primo punto:



Per proseguire con il secondo:



Studiando la slitta, detto α l'angolo che l'asta DC forma con l'orizzontale si ha:

- Equilibrio alla traslazione verticale della slitta:

$$N - Mg - F_{CD} \operatorname{sen}\alpha = 0$$

- Equilibrio alla traslazione orizzontale della slitta (dove $T=f_d N$):

$$F + Ma_d + T - F_{CD} \cos\alpha = 0$$

Dal sistema di queste due relazioni ricavo il valore di N e di F_{CD};

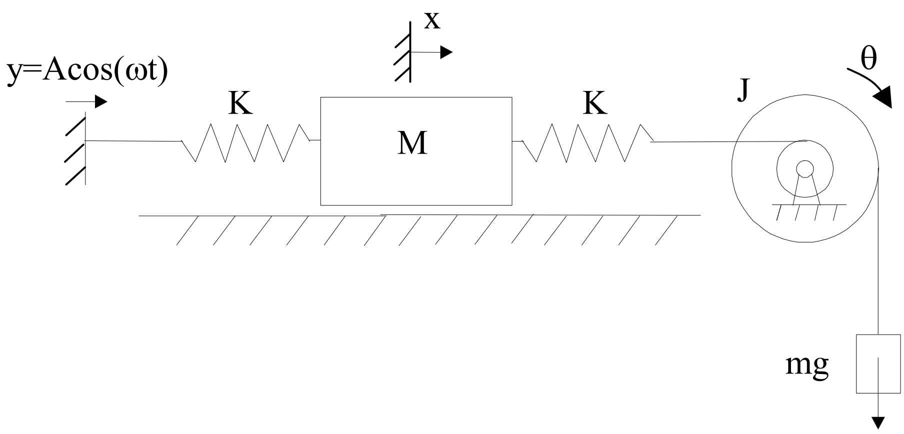
Con un equilibrio alla rotazione attorno al punto B possiamo determinare la F_{OA}:

$$-J\vec{\dot{\omega}} - \overrightarrow{BG} \Lambda m_G \vec{a}_G + \overrightarrow{BG} \Lambda m_G \vec{g} + \overrightarrow{BA} \Lambda \vec{F}_{OA} + \overrightarrow{BC} \Lambda \vec{F}_{DC} = 0$$

Con un equilibrio alla traslazione ricavo la reazione richiesta (eventualmente scomponibile in orizzontale e verticale):

$$\vec{R} - m_G \vec{a}_G + m_G \vec{g} + \vec{F}_{OA} + \vec{F}_{DC} = 0$$

Es. 2: **Analisi del sistema**



Il sistema si presenta a tre gradi di libertà anche se la posizione del vincolo è data da una legge imposta:

x posizione assoluta del carrello (positivo verso destra);
θ rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
y spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra);

si ipotizza che tutte le coordinate sopra riportate hanno valore nullo nella configurazione in cui tutte le molle del sistema non presentino deformazione.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del carrello (solo traslatoria) e di quella del disco (solo rotatoria) e di quella della massa sospesa (solo traslatoria):

Energia cinetica carrello:

$$T_{car} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Energia cinetica disco:

$$T_{disco} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Energia cinetica massa sospesa:

$$T_{ms} = \frac{1}{2} m V_{ms}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

Dove V_{ms} rappresenta la velocità assoluta del baricentro della massa sospesa.

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro della massa sospesa conseguente alla rotazione del disco) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle due molle presenti nel sistema):

Energia potenziale elastica:

$$V_E = \frac{1}{2}K(x-y)^2 + \frac{1}{2}K(r\theta - x)^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$V_G = -mgR\theta$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$V = \frac{1}{2}K(x-y)^2 + \frac{1}{2}K(r\theta - x)^2 - mgR\theta$$

Equazioni di equilibrio

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = K(x-y) + K(x - r\theta)$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$M\ddot{x} + 2Kx - Kr\theta = Ky$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = J\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K(\theta r - x)r - mgR$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$J\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta} + K(r\theta - x)r - mgR = 0$$

In termini matriciali l'equazione può essere espressa come:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J+mR^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -rK \\ -rK & r^2K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Ky \\ mgR \end{Bmatrix}$$

Si noti che si perviene solo a due equazioni differenziali in quanto lo spostamento del vincolo è fornito in termini finiti dai dati del problema.

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M] + [K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\} = \{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]=0$$

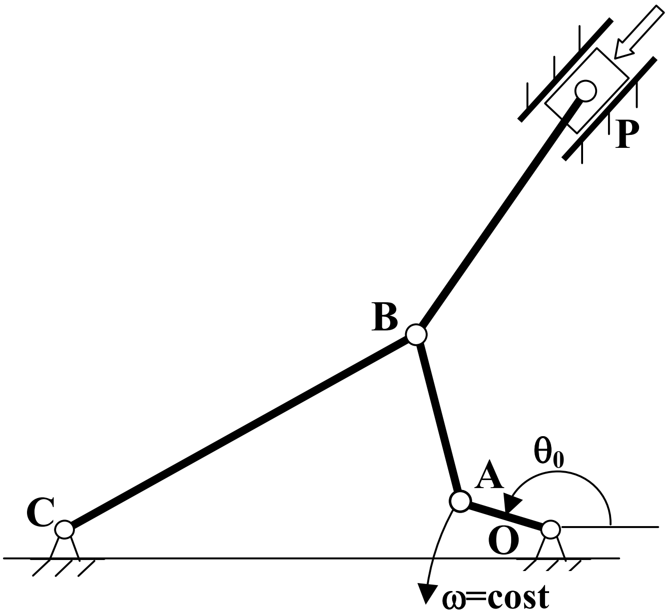
ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2 M & -rK \\ -rK & r^2K-\omega_0^2\left(J+mR^2\right) \end{bmatrix}=0$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 20 febbraio 2002

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato di cui si conosce:

- il piano di lavoro che è verticale;
- la geometria del sistema: il vettore OC nonché le lunghezze OA, AB, BC e BP e la retta alla quale è vincolato il moto del punto P;
- le inerzie dei componenti: le masse di tutte le aste siano trascurabili mentre il pistone, considerato puntiforme, abbia massa m concentrata in P;
- gli attriti che sono trascurabili;
- la forza F costante agente sul pistone in P con il verso indicato e retta di azione parallela alla guida;
- l'anomalia θ_1 della manovella OA nella configurazione rappresentata e la sua velocità angolare ω=costante diretta in verso antiorario.



Si risponda ai seguenti quesiti:

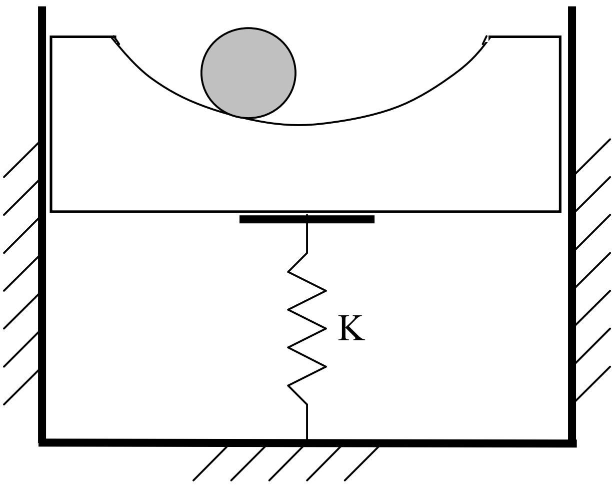
Quesito 1 – utilizzando il metodo dei numeri complessi, ovvero delle equazioni di chiusura, si determini dapprima la posizione, la velocità e l'accelerazione del B e quindi la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto P coincidente con il pistone;

Quesito 2 – utilizzando le informazioni ricavate al quesito precedente si determini la coppia motrice applicata alla manovella OA;

Quesito 3 – si scrivano le equazioni atte a determinare le reazioni nella cerniera C nella configurazione considerata.

Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

a) Scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
b) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) Determinare le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare.



Il sistema è costituito da una slitta di massa M vincolata a muoversi verticalmente da due guide laterali prive di attrito e da un disco circolare di raggio r e massa m che rotola senza strisciare sulla parte superiore concava della slitta (geometricamente descrivibile come un arco di circonferenza di raggio R). La slitta appoggia poi su un supporto elastico schematizzabile come una molla con costante elastica K.

Es. 3 – Discutere il fenomeno delle velocità critiche flessionali di un albero ricorrendo agli opportuni sviluppi analitici.

Analisi del sistema

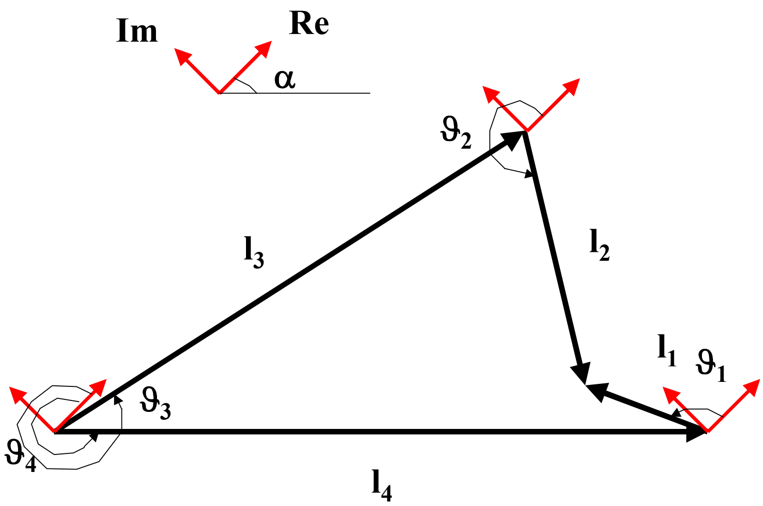
Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	punto a terra	nulla	nulla
Punto A	circonferenza centrata in O	ωOA	ω^2OA
Punto B	circonferenza centrata in C	?	?
Punto C	punto a terra	nulla	nulla
Punto P	// guida lineare	?	?

Determiniamo i gradi di liberta' del sistema; esso e' formato da cinque corpi rigidi (aste OA, AB, BC e CP e dal pistone) per un totale di quindici gradi di libertà e da cinque cerniere rotoidali (di cui quella in B va contata due volte in quanto vi convergono tre aste) ed una prismatica che eliminano quattordici gradi di liberta'. Il sistema è pertanto ad un solo grado di libertà.

Sistema vettoriale equivalente

Dato il sistema di partenza ne consideriamo dapprima il sottosistema CBAO costituito dalle aste OA, AB e CB come mostrato nella figura sottostante.
Le convenzioni adottate per il verso e la fase dei vettori sono quelle proposte ad esercitazione ed ivi descritte (verso antiorario e zero a partire da una semiretta orizzontale orientata verso destra uscente dall'origine).



Poichè il pistone scorre lungo una guida inclinata, che ne determina la traiettoria, operiamo un cambio di riferimento portando l'asse reale ad assumerne la stessa direzione.

$e^{i\alpha} = \vec{i}_1$

$ie^{i\alpha} = \vec{j}_1$

dove α e' l'angolo che la guida in cui scorre il pistone forma con l'orizzontale.

Consideriamo la figura sopra riportata ed analizziamo i singoli vettori per verificare di non avere piu' di due incognite, in quanto non sarebbe possibile risolvere il sistema utilizzando la sola equazione di chiusura.
A tal fine consideriamo la seguente tabella:

	l_1	**l_2**	**l_3**	**l_4**
modulo	Noto (costante)	Noto (costante)	Noto (costante)	Noto (costante)
anomalia	Nota θ_1	?	?	Nota θ_4

Da cui si evince che le incognite sono due.
L'equazione vettoriale equivalente al sottosistema è dunque:

$$\vec{l}_3 + \vec{l}_2 = \vec{l}_4 + \vec{l}_1$$

Scomponendo l'equazione nelle due componenti secondo l'asse reale e l'asse immaginario otteniamo:

$$l_3 \cos\vartheta_3 + l_2 \cos\vartheta_2 = l_4 \cos\vartheta_4 + l_1 \cos\vartheta_1$$
$$l_3 sen\vartheta_3 + l_2 sen\vartheta_2 = l_4 sen\vartheta_4 + l_1 sen\vartheta_1$$

Le nostre due incognite, come abbiamo visto, sono ϑ_2 e ϑ_3.
Raggruppiamo al primo membro i termini contenenti ϑ_3 in modo da far scomparire le funzioni trigonometriche che lo contengono:

$$l_3 \cos\vartheta_3 = -l_2 \cos\vartheta_2 + l_4 \cos\vartheta_4 + l_1 \cos\vartheta_1$$
$$l_3 sen\vartheta_3 = -l_2 sen\vartheta_2 + l_4 sen\vartheta_4 + l_1 sen\vartheta_1$$

Quadrando e sommando membro a membro le due equazioni otteniamo:

$$l_3^2 = l_4^2 + l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_4 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_4 - 2l_1 l_2 \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2 - 2l_2 l_4 \cos\vartheta_2 \cos\vartheta_4$$
$$+ 2l_1 l_4 sen\vartheta_1 sen\vartheta_4 - 2l_1 l_2 sen\vartheta_1 sen\vartheta_2 - 2l_2 l_4 sen\vartheta_2 sen\vartheta_4$$

ponendo uguale a delle costanti i termini numerici:

$$A_1 = 2l_1 l_2 sen\vartheta_1 + 2l_2 l_4 sen\vartheta_4$$
$$B_1 = 2l_1 l_2 \cos\vartheta_1 + 2l_2 l_4 \cos\vartheta_4$$
$$C_1 = l_3^2 - l_4^2 - l_1^2 - l_2^2 - 2l_1 l_4 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_4)$$

il sistema precedente si riduce a :

$$A_1 sen\vartheta_2 + B_1 \cos\vartheta_2 + C_1 = 0 .$$

Ponendo poi:

$$sen\vartheta_2 = \frac{2\tan\frac{\vartheta_2}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta_2}{2}}$$

$$\cos\vartheta_2 = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta_2}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta_2}{2}}$$

$$\tan\frac{\vartheta_2}{2} = x$$

si ottiene:

$$x^2(C_1 - B_1) + 2A_1x + B_1 + C_1 = 0$$

da cui:

$$x = \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 - (C_1^2 - B_1^2)}}{C_1 - B_1}$$

si risale quindi al valore di ϑ_2.
Procediamo identicamente per trovare il valore di ϑ_3. isoliamo a primo membro i termini contenenti ϑ_2 in modo che scompaiano le funzioni trigonometriche che li contengono, quadriamo e sommiamo membro a membro le equazioni del sistema seguente

$$l_2\cos\vartheta_2 = -l_3\cos\vartheta_3 + l_4\cos\vartheta_4 + l_1\cos\vartheta_1$$
$$l_2 sen\vartheta_2 = -l_3 sen\vartheta_3 + l_4 sen\vartheta_4 + l_1 sen\vartheta_1$$

ponendo:

$$sen\vartheta_3 = \frac{2\tan\frac{\vartheta_3}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta_3}{2}}$$

$$\cos\vartheta_3 = \frac{1-\tan^2\frac{\vartheta_3}{2}}{1+\tan^2\frac{\vartheta_3}{2}}$$

$$\tan\frac{\vartheta_3}{2} = y$$

otterremo un'espressione del tipo:

$$y^2(C_2 - B_2) + 2A_2 y + B_2 + C_2 = 0$$

da cui ricaviamo il valore di ϑ_3.

Velocità

Derivando il sistema di equazioni precedente, considerando che l'angolo ϑ_4 e' costante e di conseguenza la sua derivata pari a zero, otteniamo:

$$-l_3\dot{\vartheta}_3 sen\,\vartheta_3 - l_2\dot{\vartheta}_2 sen\,\vartheta_2 = -l_4\dot{\vartheta}_1 sen\,\vartheta_1$$
$$l_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 + l_2\dot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 = l_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1$$

Dalla seconda equazione si ha:

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{l_1\dot{\vartheta}_1\cos\vartheta_1 - l_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3}{l_2\cos\vartheta_2}$$

che sostituita nella prima equazione permette di ottenere:

$$\dot{\vartheta}_3 = \frac{l_1\dot{\vartheta}_1 sen(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{l_3 sen(\vartheta_2 - \vartheta_3)}$$

tramite quest'ultima espressione si ricava poi il valore di $\dot{\vartheta}_2$.

Accelerazione

Deriviamo ancora una volta il sistema di equazioni precedente sapendo, dai dati del problema,che $\ddot{\vartheta}_1$ e' nullo:

$$-l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\,\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3 - l_2\ddot{\vartheta}_2 sen\,\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2^2\cos\vartheta_2 = -l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1$$
$$l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\,\vartheta_3 + l_2\ddot{\vartheta}_2\cos\vartheta_2 - l_2\dot{\vartheta}_2^2 sen\,\vartheta_2 = -l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\,\vartheta_1$$

raggruppando i termini noti (cioè quelli che non contengono accelerazioni incognite) e ponendo:

$$A = -l_3\dot{\vartheta}_3^2\cos\vartheta_3 - l_2\dot{\vartheta}_2^2\cos\vartheta_2 + l_1\dot{\vartheta}_1^2\cos\vartheta_1$$
$$B = -l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\,\vartheta_3 - l_2\dot{\vartheta}_2^2 sen\,\vartheta_2 + l_1\dot{\vartheta}_1^2 sen\,\vartheta_1$$

il sistema si riduce a:

$$A - l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 = l_2\ddot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2$$
$$B + l_3\ddot{\vartheta}_3 \cos\vartheta_3 = -l_2\ddot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2$$

dalla prima delle due equazioni otteniamo:

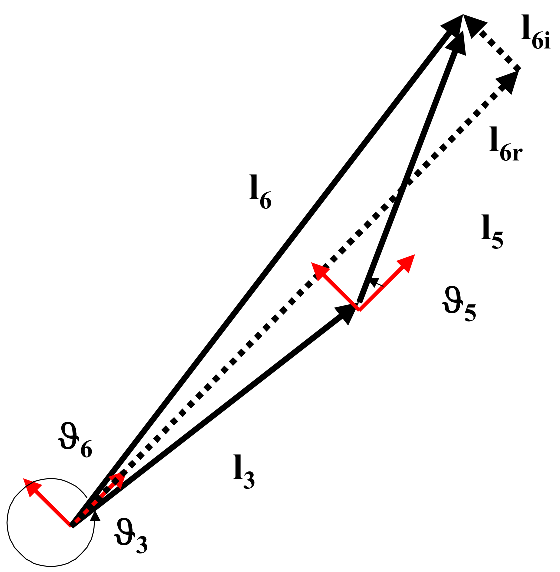
$$\ddot{\vartheta}_2 = \frac{A - l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3}{l_2 sen\vartheta_2}$$

sostituendo questa espressione nella seconda delle due equazioni si ha:

$$\ddot{\vartheta}_3 = -\frac{A\cos\vartheta_2 + Bsen\vartheta_2}{l_3 sen(\vartheta_2 - \vartheta_3)}$$

tramite questo valore si ottiene poi il valore di $\ddot{\vartheta}_2$.

Consideriamo ora il sottosistema composto dalle aste CB e BP rappresentato nella figura sottostante.



Analizziamo i singoli vettori allo scopo di verificare che non vi siano piu' di due incognite, nel qual caso la sola equazione di chiusura non sarebbe piu' sufficiente a risolvere il sistema, e a tale scopo introduciamo la tabella seguente:

	l_3	l_5	l_{6i}	l_{6r}
modulo	Noto (costante)	Noto (costante)	Noto (costante)	?
fase	Nota	?	90°	0°

L'equivalente vettoriale del sistema considerato e':

$$\vec{l}_3 + \vec{l}_5 = \vec{l}_6$$

che scomposta nelle sue due componenti secondo l'asse immaginario e l'asse reale diviene:

$$l_3 \cos \vartheta_3 + l_5 \cos \vartheta_5 = l_{6r}$$
$$l_3 sen \vartheta_3 + l_5 sen \vartheta_5 = l_{6i}$$

dalla seconda equazione otteniamo:

$$sen \vartheta_5 = \frac{l_{6i} - l_3 sen \vartheta_3}{l_5}$$

da cui:

$$\vartheta_5 = arcsen(\frac{l_{6i} - l_3 sen \vartheta_3}{l_5})$$

noto questo valore si ricava facilmente il valore di l_{6r} :

$$l_{6r} = l_3 \cos \vartheta_3 + l_5 \cos \vartheta_5$$

Velocita'

Deriviamo il sistema di equazioni precedente:

$$- l_3 \dot{\vartheta}_3 sen \vartheta_3 - l_5 \dot{\vartheta}_5 sen \vartheta_5 = \dot{l}_{6r}$$
$$l_3 \dot{\vartheta}_3 \cos \vartheta_3 + l_5 \dot{\vartheta}_5 \cos \vartheta_5 = 0$$

dalla seconda equazione otteniamo:

$$\dot{\vartheta}_5 = -\frac{l_3 \dot{\vartheta}_3 \cos \vartheta_3}{l_5 \cos \vartheta_5}$$

che sostituita nella prima equazione permette di ottenere il valore di $\dot{l}_{6r}$:

$$\dot{l}_{6r} = -l_3 \dot{\vartheta}_3 sen \vartheta_3 - l_5 \dot{\vartheta}_5 sen \vartheta_5 .$$

Accelerazione

Deriviamo ancora il sistema di equazioni precedente e abbiamo:

$$- l_3 \ddot{\vartheta}_3 sen \vartheta_3 - l_3 \dot{\vartheta}_3^2 \cos \vartheta_3 - l_5 \ddot{\vartheta}_5 sen \vartheta_5 - l_5 \dot{\vartheta}_5^2 \cos \vartheta_5 = \ddot{l}_{6r}$$
$$l_3 \ddot{\vartheta}_3 \cos \vartheta_3 - l_3 \dot{\vartheta}_3^2 sen \vartheta_3 + l_5 \ddot{\vartheta}_5 \cos \vartheta_5 - l_5 \dot{\vartheta}_5^2 sen \vartheta_5 = 0$$

dalla seconda equazione otteniamo:

$$\ddot{\vartheta}_5 = \frac{l_5\dot{\vartheta}_5^2 sen\vartheta_5 + l_3\dot{\vartheta}_3^2 sen\vartheta_3 - l_3\ddot{\vartheta}_3 \cos\vartheta_3}{l_5 \cos\vartheta_5}$$

che sostituito nella prima equazione consente di avere il valore di $\ddot{l}_{6r}$ ossia l'accelerazione del pistone P.

La coppia motrice applicata alla manovella OA

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella del pistone che è l'unico elemento dotato di massa:

$$\frac{dE_C}{dT} = m\vec{v}_p \times \vec{a}_p$$

Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$W_m = \vec{C} \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

Potenza resistente

E' dovuta alla massa del pistone che varia la sua quota ed alla forza ad essa applicata:

$$W_r = -m\vec{g} \times \vec{v}_P - \vec{F} \times \vec{v}_P$$

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$m\vec{v}_P \times \vec{a}_P = \vec{C} \times \vec{\omega} + m\vec{g} \times \vec{v}_P + \vec{F} \times \vec{v}_P$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C.

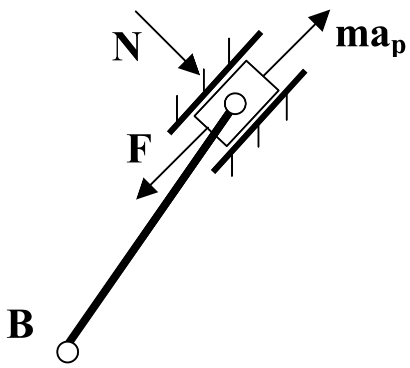
Le reazioni vincolari nella cerniera C

Le considerazione da tenere presenti sono:
- tutte le aste sono scariche e prive di massa;
- la guida lineare del pistone è priva di attrito.

Dalla prima considerazione ne deriva in particolare che l'asta BC può essere considerata una biella e quindi la direzione della reazione incognita è da ritenersi nota e parallela a BC.
Dalla seconda considerazione ne deriva che la reazione che viene scambiata tra guida e pistone è normale alla direzione di scorrimento dello stesso ed è quindi nota in direzione.

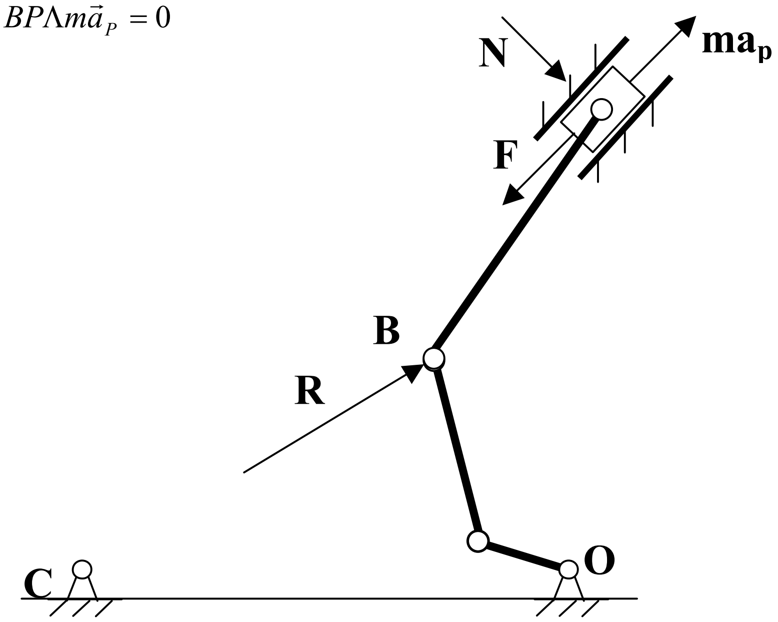
Il percorso risolutivo può prevedere i seguenti due equilibri:
- momento della biella BP attorno al punto B;
- momento del sottosistema PBCA attorno ad A.

Se ne ricavano due equazioni che hanno come sole incognite la reazione in C (oggetto della ricerca) e la reazione vincolare in P (N).



Il momento della biella BP attorno a B è:

$$\overrightarrow{BP}\Lambda\vec{F} + \overrightarrow{BP}\Lambda\vec{N} - \overrightarrow{BP}\Lambda m\vec{a}_P = 0$$



Il momento del sottosistema PBCA attorno ad A:

$$\overrightarrow{AP}\Lambda\vec{F} + \overrightarrow{AP}\Lambda\vec{N} - \overrightarrow{AP}\Lambda m\vec{a}_P + \overrightarrow{AB}\Lambda\vec{R} = 0$$

Es. 2 - Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

x oscillazione verticale della slitta
L'origine coincide con la condizione di equilibrio statico in cui la molla ha lunghezza x_0, positiva verso l'alto.

θ posizione del centro del disco (espressa rispetto al centro di curvatura della guida)
L'origine coincide con il disco al centro della guida, positiva in verso orario.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella della slitta e di quella del disco:

$$T_{slitta} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$T_{disco} = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} J\frac{R^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Dove V rappresenta la velocità del baricentro del disco:

$$V^2 = \dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 - 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}sen\theta$$

L'energia cinetica totale è:

$$T = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 - 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}sen\theta\right) + \frac{1}{2} J\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (disco) e di quella elastica (molla):

$$T_{disco} = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$T_{molla} = \frac{1}{2} Kx^2$$

Si noti come non si sia considerata l'energia potenziale associata alla slitta in quanto si è considerata come origine della coordinata x la condizione di molla in equilibrio statico.
L'energia potenziale totale è:

$$T = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} Kx^2$$

Equazioni differenziali non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial x}=(M+m)\ddot{x}-2(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2-2(R-r)msen\theta\ddot{\theta}+Kx=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}-2(R-r)msen\theta\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right)=(M+m)\ddot{x}-2(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2-2(R-r)msen\theta\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}=0$$
$$\frac{\partial V}{\partial x}=Kx$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta}+\frac{\partial T}{\partial \theta}=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}sen\theta+mg(R-r)sen\theta=0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=m(R-r)^2\dot{\theta}+m(R-r)\dot{x}sen\theta+J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}sen\theta+m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}=$$
$$=\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}sen\theta+m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=m(R-r)\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta}=mg(R-r)sen\theta$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori x = 0, θ = 0 delle variabili.
Tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Kx = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = mg(R-r)sen\theta = 0$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\mathrm{x} = 0$$
$$\theta = 0 \pm \mathrm{n}\pi \rightarrow \mathrm{n} = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad K>0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad mg(R-r)\cos\theta > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad mgK(R-r)\cos\theta > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile, per tutti i valori di n pari. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$V = V(x,\theta) \cong V|_{0,0} + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;

- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} = K$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = mg(R-r)$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$V = \frac{1}{2}Kx^2 + mg(R-r)\frac{\theta^2}{2}$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$T = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$T \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}J\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial x} = Kx$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = mg(R-r)\theta$$

ovvero, ponendo L=R-r:

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{x} \\ \ddot{\theta}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza diagonali e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M] + [K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\} = \{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2[M] + [K]\right] = 0$$

ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} K-\omega_0^2(M+m) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2-\omega_0^2 mgL \end{bmatrix}=$$

$$\frac{3}{2}mL^2K-mgL^2K\omega_0^2-\frac{3}{2}mL^2K\omega_0^2+mg(m+M)L\omega_0^4=0$$

$$mg(m+M)L\omega_0^4-(mgL^2K+\frac{3}{2}mL^2K)\omega_0^2+\frac{3}{2}mL^2K=0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in ω_0^2, del tipo

$$a\omega_0^4+b\omega_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{0I,II}=\pm\sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$\omega_{0III,IV}=\pm\sqrt{\frac{mgL}{\frac{3}{2}mL^2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{L}}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori in quanto, essendo diagonale, l'inversa della matrice M è semplicemente data da:

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/(m+M) & 0 \\ 0 & 1/\left(\frac{3}{2}mL^2\right) \end{bmatrix}$$

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix} K/(m+M) & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}g/L \end{bmatrix}$$

Per cui si ottiene:

$$-\lambda[I]+[A]=\{0\}$$

dove:

$$\lambda=\omega_0^2$$

e quindi si ottiene:

$$\lambda_1 = \omega_{01}^2 = \frac{K}{m + M}$$

$$\lambda_2 = \omega_{02}^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{L}$$

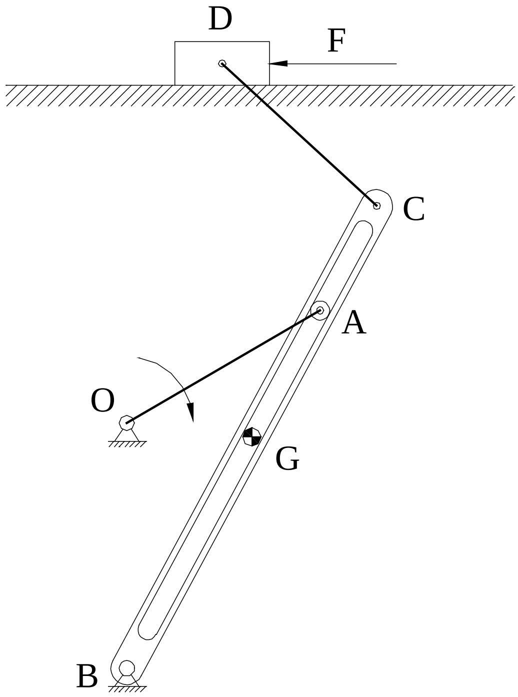
I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente, essendo le equazioni disaccoppiate,

$$\begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix}_1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Preappello del 08 giugno 2002

Es. 1 – Dato lo schema di un bancale per limatrice riportato a lato di cui si conosce:

- il piano di movimento del meccanismo che è verticale;
- il vettore OA: modulo costante noto e anomalia variabile con velocità costante oraria;
- le lunghezze BC, CD;
- l'equazione del piano sul quale si muove la slitta D;
- la massa M del glifo e la sua inerzia baricentrica J;
- la massa m della slitta;
- il coefficiente di attrito radente fra slitta e piano fs;
- le masse degli elementi non citati approssimabili a zero;
- gli attriti nelle cerniere e nella guida trascurabili.



Si risponda ai seguenti quesiti:

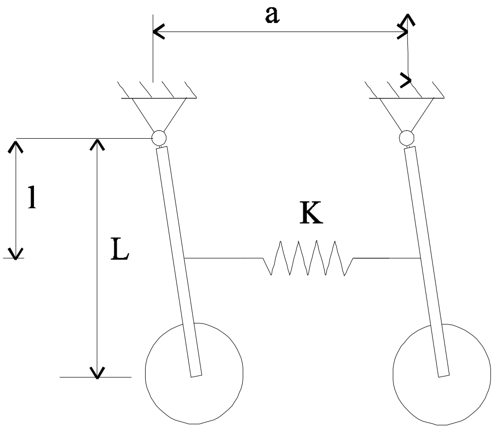
Quesito 1 – utilizzando il metodo dei numeri complessi, ovvero delle equazioni di chiusura, si determini dapprima la posizione, la velocità e l'accelerazione angolare del glifo e quindi la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto D coincidente con il baricentro della slitta;

Quesito 2 – utilizzando le informazioni ricavate al quesito precedente si determini la coppia motrice applicata alla manovella OA;

Quesito 3 – si scrivano le equazioni atte a determinare le reazioni nella cerniera B nella configurazione considerata.

Es. 2 - Per il sistema rappresentato a lato, operante nel piano verticale, si richiede di:

a) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico non lineari;
b) Eseguirne la linearizzazione;
c) Opzionalmente si determinino le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare.



Il sistema è costituito da due aste (entrambe di massa m e momento di inerzia baricentrico j) incernierate come pendoli da un lato e solidali ad un disco di massa M e momento di inerzia baricentrico J dall'altro.

Si lavori nell'ipotesi di assenza di attrito sapendo che la molla presente nel sistema ha una lunghezza di riposo pari all'interasse tra le due cernire (a).

Es. 3 – Si introducano le ipotesi su cui si basa la teoria elementare della lubrificazione e se ne presentino i principali risultati.

Esercizio 1

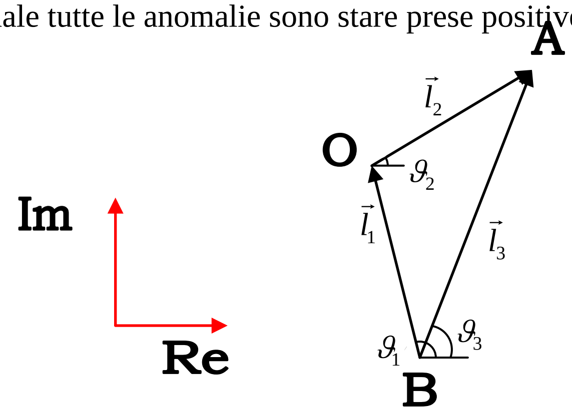
Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
O	Punto a terra	nulla	nulla
A	Circonferenza centrata in O	nota	nota
B	Punto a terra	nulla	nulla
C	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela alla linea di terra	?	?

Sistema vettoriale equivalente

Dato il sistema di partenza ne consideriamo dapprima il sottosistema OAB mostrato nella figura sottostante nella quale tutte le anomalie sono stare prese positive in verso antiorario a partire



Consideriamo la figura sopra riportata ed analizziamo i singoli vettori per verificare di non avere più di due incognite, in quanto non sarebbe possibile risolvere il sistema utilizzando la sola equazione di chiusura. A tal fine consideriamo la seguente tabella:

	l_1	l_2	l_3
modulo	noto (costante)	noto (costante)	?
anomalia	nota (costante)	nota (controllata)	?

Da cui si evince che le incognite sono due, rispettivamente il modulo e l'anomalia del vettore l_3.
L'equazione vettoriale equivalente al sottosistema è dunque:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$$

Utilizzando la notazione complessa la stessa diviene:

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} = l_3 e^{i\theta_3}$$

Scomponendo l’equazione nelle due componenti secondo l’asse reale e l’asse immaginario otteniamo:

$$l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2 = l_3 \cos\vartheta_3$$
$$l_1 sen\vartheta_1 + l_2 sen\vartheta_2 = l_3 sen\vartheta_3$$

Le nostre due incognite, come abbiamo visto, sono l_3 e ϑ_3.
Dalla prima equazione si ottiene:

$$l_3 = \frac{l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2}{\cos\vartheta_3}$$

Sostituendo tale espressione nella seconda equazione si ha:

$$\vartheta_3 = \tan^{-1}\left(\frac{l_1 sen\vartheta_1 + l_2 sen\vartheta_2}{l_1 \cos\vartheta_1 + l_2 \cos\vartheta_2}\right)$$

espressione tramite la quale si ottiene il valore di l_3.

Velocità

Derivando il sistema di equazioni precedente, tenendo conto che ϑ_1 è costante, otteniamo:

in forma complessa:

$$l_1 i\dot{\theta}_1 e^{i\theta_1} + \dot{l}_2 e^{i\theta_2} + l_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} = 0$$

ed in forma cartesiana:

$$-l_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2 = -l_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 + \dot{l}_3 \cos\vartheta_3$$
$$l_2\dot{\vartheta}_2 \cos\vartheta_2 = l_3\dot{\vartheta}_3 \cos\vartheta_3 + \dot{l}_3 sen\vartheta_3$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\dot{\vartheta}_3 = \frac{\dot{l}_3 \cos\vartheta_3 + l_2\dot{\vartheta}_2 sen\vartheta_2}{l_3 sen\vartheta_3}$$

che sostituita nella seconda equazione permette di ottenere:

$$\dot{l}_3 = l_2\dot{\vartheta}_2 sen(\vartheta_3 - \vartheta_2)$$

tramite quest’ultima espressione si ricava poi il valore di $\dot{\vartheta}_3$.

Accelerazione

Deriviamo ancora una volta il sistema di equazioni precedente, tenendo presente che la velocità angolare della manovella è costante(ovvero, $\dot{\vartheta}_2$ = costante), se ne ricava:

in forma complessa:

$$-l_1\dot{\theta}_1^2 e^{i\theta_1} + \ddot{l}_2 e^{i\theta_2} + \dot{l}_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + \dot{l}_2 i\dot{\theta}_2 e^{i\theta_2} + l_2 i\ddot{\theta}_2 e^{i\theta_2} - l_2\dot{\theta}^2 e^{i\theta_2} = 0$$

mentre proiettando sugli assi cartesiani si ha:

$$-l_2\dot{\vartheta}_2^{\,2}\cos\vartheta_2 + l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 + l_3\dot{\vartheta}_3^{\,2}\cos\vartheta_3 - \ddot{l}_3\cos\vartheta_3 + 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 = 0$$
$$-l_2\dot{\vartheta}_2^{\,2} sen\vartheta_2 + l_3\dot{\vartheta}_3^{\,2} sen\vartheta_3 - l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - \ddot{l}_3 sen\vartheta_3 - 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 = 0$$

raggruppando i termini noti (cioè quelli che non contengono accelerazioni incognite) e ponendo:

$$A = -l_2\dot{\vartheta}_2^{\,2}\cos\vartheta_2 + l_3\dot{\vartheta}_3^{\,2}\cos\vartheta_3 + 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3$$
$$B = -l_2\dot{\vartheta}_2^{\,2} sen\vartheta_2 + l_3\dot{\vartheta}_3^{\,2} sen\vartheta_3 - 2\dot{l}_3\dot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3$$

il sistema si riduce a:

$$A + l_3\ddot{\vartheta}_3 sen\vartheta_3 - \ddot{l}_3\cos\vartheta_3 = 0$$
$$B - l_3\ddot{\vartheta}_3\cos\vartheta_3 - \ddot{l}_3 sen\vartheta_3 = 0$$

dalla prima delle due equazioni otteniamo:

$$\ddot{\vartheta}_3 = \frac{A - \ddot{l}_3\cos\vartheta_3}{l_3 sen\vartheta_3}$$

sostituendo questa espressione nella seconda delle due equazioni si ha:

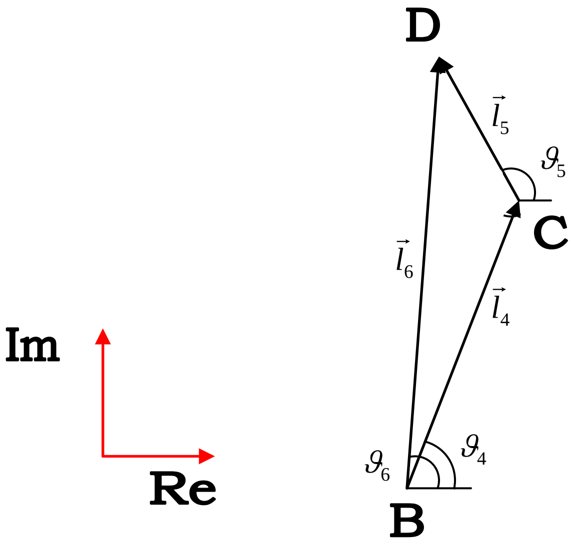
$$\ddot{l}_3 = \frac{Bsen\vartheta_3 - A\cos\vartheta_3}{sen^2\vartheta_3 - \cos^2\vartheta_3}$$

tramite questo valore si ottiene poi il valore di $\ddot{\vartheta}_3$.

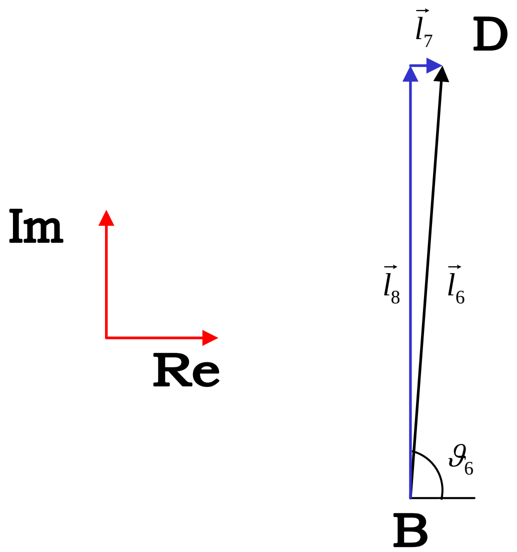
Consideriamo ora il sottosistema BCD rappresentato nella figura sottostante:

Si osservi che il valore dell'anomalia del vettore $\mathbf{l_4}$ è la stessa del vettore $\mathbf{l_3}$, ovvero del glifo AB. Analizziamo i singoli vettori allo scopo di verificare che non vi siano più di due incognite, nel qual caso la sola equazione di chiusura non sarebbe più sufficiente a risolvere il sistema, e a tale scopo introduciamo la tabella seguente:

	$\mathbf{l_4}$	$\mathbf{l_5}$	$\mathbf{l_6}$
modulo	Noto (costante)	Noto (costante)	?
fase	Nota	?	?



Come si evince dalla tabella siamo in presenza di tre incognite. Per ovviare a tale problema, si osservi la seguente scomposizione di $\mathbf{l_6}$ e la seguente analisi:



Si noti che i vettori $\mathbf{l_7}$ e $\mathbf{l_8}$ non sono altro che le proiezioni del vettore $\mathbf{l_6}$ lungo asse reale ed asse immaginario.

Segue che:

	l_6	**l_7**	**l_8**
modulo	?	?	Noto(costante)
fase	?	Nota	Nota

L'equivalente vettoriale del sistema considerato (avendo sostituito ad $\mathbf{l_6}$ i suoi componenti $\mathbf{l_7}$ e $\mathbf{l_8}$) e':

$$\vec{l}_4 + \vec{l}_5 = \vec{l}_7 + \vec{l}_8$$

che scomposta nelle sue due componenti secondo l'asse reale e l'asse immaginario diviene:

$$l_4 \cos\vartheta_4 + l_5 \cos\vartheta_5 = l_7$$
$$l_4 \operatorname{sen}\vartheta_4 + l_5 \operatorname{sen}\vartheta_5 = l_8$$

Dalla seconda equazione si ottiene:

$$\vartheta_5 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{l_8 - l_4 \operatorname{sen}\vartheta_4}{l_5}\right)$$

Sostituendo tale espressione nella prima equazione del sistema si perviene al valore di l_5.

Velocità

Derivando il sistema di equazioni precedente otteniamo:

$$-l_4\dot{\vartheta}_4 \operatorname{sen}\vartheta_4 - l_5\dot{\vartheta}_5 \operatorname{sen}\vartheta_5 = \dot{l}_7$$
$$l_4\dot{\vartheta}_4 \cos\vartheta_4 + l_5\dot{\vartheta}_5 \cos\vartheta_5 = 0$$

Risolvendo tale sistema si perviene a:

$$\dot{\vartheta}_5 = -\frac{l_4\dot{\vartheta}_4 \cos_4}{l_5 \cos\vartheta_5}$$

Tramite tale espressione si giunge, per sostituzione, al valore di $\dot{l}_7$.
Grazie alle velocità sopra riportate si ottiene il valore della velocità della slitta.

Accelerazione

Deriviamo ancora una volta il sistema di equazioni precedenti:

$$-l_4\dot{\vartheta}_4^{\,2} \cos\vartheta_4 - l_4\ddot{\vartheta}_4 \operatorname{sen}\vartheta_4 - l_5\ddot{\vartheta}_5 \operatorname{sen}\vartheta_5 - l_5\dot{\vartheta}_5^{\,2} \cos\vartheta_5 = \ddot{l}_7$$
$$l_4\ddot{\vartheta}_4 \cos\vartheta_4 - l_4\dot{\vartheta}_4^{\,2} \operatorname{sen}\vartheta_4 - l_5\dot{\vartheta}_5^{\,2} \operatorname{sen}\vartheta_5 + l_5\ddot{\vartheta}_5 \cos\vartheta_5 = 0$$

Raggruppando tutti i termini noti e ponendo:

$$C = -l_4\ddot{\vartheta}_4 \text{ sen }\vartheta_4 - l_4\dot{\vartheta}_4^{\,2} \cos\vartheta_4 - l_5\dot{\vartheta}_5^{\,2} \text{ sen }\vartheta_5$$
$$D = l_4\ddot{\vartheta}_4 \cos\vartheta_4 - l_4\dot{\vartheta}_4^{\,2} \text{ sen }\vartheta_4 - l_5\dot{\vartheta}_5^{\,2} \cos\vartheta_5$$

risolvendo il sistema si ottiene:

$$\ddot{l}_7 = \frac{C\cos\vartheta_5 - D\text{ sen }\vartheta_5}{\cos\vartheta_5}$$
$$\ddot{\vartheta}_5 = \frac{D}{l_5\cos\vartheta_5}$$

Da ciò si ricava la accelerazione della slitta D.

2° quesito

Per il calcolo della coppia richiesta, si può ricorrere ad un bilancio di potenze, espresso nella forma:

$$\frac{\mathrm{dE_C}}{\mathrm{dT}} = \mathrm{W_m} - \mathrm{W_r} - \mathrm{W_p}$$

- Contribuiscono all'energia cinetica del sistema il glifo BC e la slitta puntiforme D:
  $$\frac{dE_C}{dT} = m\vec{V}_D \times \vec{A}_D + M\vec{V}_G \times \vec{A}_G + J\vec{\omega}_{BC} \times \vec{\omega}_{BC}$$

- La potenza motrice è data da:
  $$W_m = \vec{C}_m \times \vec{\omega}_m$$
  dove ω è uno dei dati del problema

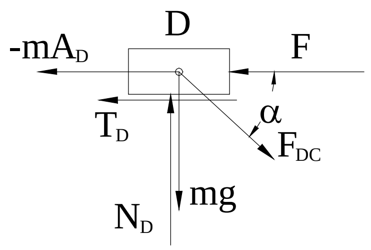
- La potenza resistente è legata alla forza resistente F e alla forza peso del glifo:
  $$W_r = -\left[\vec{F} \times \vec{V}_G + M\vec{g} \times \vec{V}_G\right]$$

- La potenza perduta è dovuta all'attrito radente fra slitta e piano
  $$W_m = -\left[\vec{T}_D \times \vec{V}_D\right]$$

Si ha quindi:

$$m\vec{V}_D \times \vec{A}_D + M\vec{V}_G \times \vec{A}_G + J\vec{\omega}_{BC} \times \vec{\omega}_{BC} = \vec{C}_m \times \vec{\omega}_m + \vec{F} \times \vec{V}_G + M\vec{g} \times \vec{V}_G + \vec{T}_D \times \vec{V}_D$$

che è un'equazione lineare nelle incognite C e T_D; quest'ultima può tuttavia essere ricavata considerando l'equilibrio dinamico della slitta alle traslazioni e conoscendo il coefficiente di attrito dinamico:



$\vec{F} + \vec{F}_{DC} + m\vec{g} + \vec{T}_D + \vec{N}_D - m\vec{A}_D = 0$

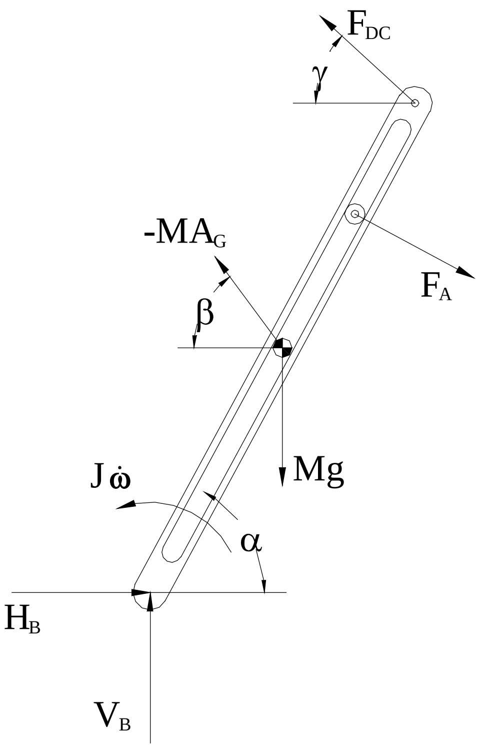
Proiettando l'equazione vettoriale il direzione orizzontale e verticale si ottengono le due relazioni necessarie per determinare l'azione F della biella BC e la reazione normale del suolo.
A queste equazioni, va aggiunta la relazione che lega la componente tangenziale a quella normale:

$T_D = f_S \, N_D$

Si tratta di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite C, T_D, N_D, F_{DC}, per cui il problema è determinato.

3° quesito

Per calcolare le reazioni vincolari in B, si può considerare il glifo separatamente, evidenziando le azioni esercitate dagli altri elementi del sistema; si osserva in particolare che, nell'ipotesi di assenza di attrito (ipotesi di vincoli lisci), l'azione esercitata dalla manovella OA è normale all'asse del glifo:



Si ha:

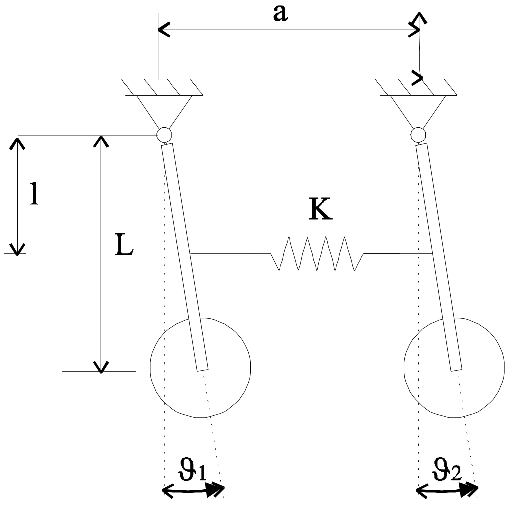
$\Sigma F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B - MA_G \cos\beta + F_A \sin\alpha - F_{DC} \cos\gamma = 0$

$\Sigma F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - Mg + MA_G \sin\beta - F_A \cos\alpha + F_{DC} \sin\gamma = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad J\,\dot{\omega}_{BC} - Mg\, BG \cos\alpha + MA_G\, BG \sin(\alpha+\beta) - F_A\, BA + F_{DC}\, BC \cos(\alpha+\gamma) = 0$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite H_B, V_B, F_A, che possono quindi essere calcolate.

Esercizio 2



Il sistema è a due gradi di libertà ed utilizziamo per la descrizione della sua configurazione i due angoli che identificano l'oscillazione dei due pendoli.

Assumiamo come coordinate libere:

$\theta_1 \rightarrow$ oscillazione asta 1, positiva in verso antiorario, a partire dal pendolo verticale (origine)
$\theta_2 \rightarrow$ oscillazione asta 2, positiva in verso antiorario, a partire dal pendolo verticale (origine)

Utilizzo il metodo di Lagrange e quindi determino l'energia cinetica e potenziale del sistema.

<u>Determinazione dell'energia cinetica</u>

$$T = T_{asta\ 1} + T_{disco\ 1} + T_{asta\ 2} + T_{disco\ 2}$$

$$T_{asta1} = \frac{1}{2} m v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}\left(ml^2 + j\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$T_{asta2} = \frac{1}{2}\left(ml^2 + j\right)\dot{\theta}_2^2$$

Al fine di rendere più compatte le equazioni operiamo la seguente sostituzione del valore di j per cui d'ora in avanti:

$$j = ml^2 + j$$

si ha:

$$T_{asta1} = \frac{1}{2} j \dot{\theta}_1^2$$

$$T_{asta2} = \frac{1}{2} j \dot{\theta}_2^2$$

$$T_{disco1} = \frac{1}{2} M \left(2l\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 = 2Ml^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 = \left(2Ml^2 + \frac{1}{2} J\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$T_{disco2} = \frac{1}{2}M\left(2l\dot{\theta}_2\right)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 = 2Ml^2\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 = \left(2Ml^2 + \frac{1}{2}J\right)\dot{\theta}_2^2$$

Come già fatto per le aste anche in questo caso modifichiamo il valore di J per avere equazioni più compatte (in pratica esprimiamo J rispetto alla cerniera di rotazione):

$$J = 4ml^2 + J$$

si ha:

$$T_{disco1} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2$$
$$T_{disco2} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2$$

L'energia cinetica totale del sistema sarà:

$$T = \frac{1}{2}j\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}j\dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2}j^*\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J^*\dot{\theta}_2^2$$

dove:

$$J^* = j + J = ml^2 + j + 4ml^2 + J$$

Determinazione dell'energia potenziale:

$$\mathbf{V = V_{asta\ 1} + V_{disco\ 1} + V_{asta\ 2} + V_{disco\ 2} + V_{molla}}$$

$$V_{asta\ 1} = mgl\left(1-\cos\theta_1\right)$$
$$V_{disco\ 1} = 2mgl\left(1-\cos\theta_1\right)$$
$$V_{asta\ 2} = mgl\left(1-\cos\theta_2\right)$$
$$V_{disco\ 2} = 2mgl\left(1-\cos\theta_2\right)$$
$$V_{molla} = \frac{1}{2}K\Delta l_{molla} = \frac{1}{2}Kl^2\left(\sin\theta_1 - \sin\theta_2\right)^2$$

La relazione sopra introdotta vale nell'ipotesi di trascurare le deformazioni della molla dovute alla componente di spostamento normale al suo asse.

Scrittura delle equazioni differenziali di equilibrio non lineari

Le equazioni differenziali che descrivono il moto del sistema saranno:

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1} = J^*\dot{\theta}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1} = J^*\ddot{\theta}_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_2} = J^*\dot{\theta}_2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_1} = J^*\ddot{\theta}_2$$
$$\frac{\partial V}{\partial\theta_1} = \phi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = \phi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = mg\,l\sin\theta_1 + 2Mg\,l\sin\theta_1 + Kl^2\cos\theta_1(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)\varphi$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = mg\,l\sin\theta_2 + 2Mg\,l\sin\theta_2 + Kl^2\cos\theta_2(\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

Le equazioni differenziali risultanti saranno:

$$\begin{cases} J^*\ddot{\theta}_1 + mg\,l\sin\theta_1 + 2Mg\,l\sin\theta_1 + Kl^2\cos\theta_1(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = \phi \\ J^*\ddot{\theta}_2 + mg\,l\sin\theta_2 + 2Mg\,l\sin\theta_2 + Kl^2\cos\theta_1(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = \phi \end{cases}$$

Determinazione posizione di equilibrio

Determino la posizione di equilibrio statico attorno alla quale eseguirò la linearizzazione:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \theta_1} = \phi \\ \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta_2} = \phi \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \theta_{1_e} = \phi,\ 2\pi, 4\pi \ldots \\ \\ \theta_{2_e} = \phi,\ 2\pi, 4\pi \ldots \end{matrix}$$

Si noti che le coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} \theta_1 = n\pi \\ \qquad\qquad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \theta_2 = n\pi \end{cases}$$

sono state scartate in quanto corrispondenti a posizioni di equilibrio instabile. La stabilità delle soluzioni indicate è verificata in quanto:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2} > \phi \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} > \phi \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_2^2} - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\right) > 0$$

Linearizzazione della energia potenziale

Consideriamo i singoli termini:

$$\mathbf{V}_{\textbf{asta 1}} = mg\,l(1 - \cos\theta_1) = \frac{1}{2} mg\,l\,\theta_1^2$$

$$\mathbf{V}_{\textbf{asta 2}} = \frac{1}{2} mg\,l\,\theta_2^2$$

$$\mathbf{V}_{\textbf{disco 1}} = 2Mg\,l(1 - \cos\theta_1) = Mg\,l\,\theta_1^2$$

$$\mathbf{V}_{\textbf{disco 2}} = Mg\,l\,\theta_2^2$$

$$\mathbf{V}_{\mathbf{molla}} = \frac{1}{2} m\, l^2 \left(\sin\theta_1 \text{ - } \sin\theta_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Kl}^2 \left[\left(-\, 2\cos\theta_1 (\sin\theta_1 \,-\, \sin\theta_2) \,+\, 2\cos\theta_1 \,\cos\theta_1\right)\Big|_{\substack{\theta_1 = \phi \\ \theta_2 = \phi}} \frac{\theta_1^2}{2} \,+ \right.$$

$$+ \left(2\sin\theta_2 (\sin\theta_1 \,-\, \sin\theta_2) \,-\, 2\cos\theta_2 \,\cos\theta_2\right)\Big|_{\substack{\theta_1 = \phi \\ \theta_2 = \phi}} \frac{\theta_2^2}{2} \,+$$

$$\left. + \left(-\, \cos\theta_1 \,\cos\theta_2 \,-\, \cos\theta_1 \,\cos\theta_2\right)\Big|_{\substack{\theta_1 = \phi \\ \theta_2 = \phi}} \theta \cdot \theta_2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Kl}^2 \theta_1^2 \,-\, \frac{1}{2} \mathrm{Kl}^2 \theta_2^2 \,-\, \mathrm{Kl}^2 \theta_1 \theta_2 \,=$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{Kl}^2 \left(\theta_1^2 \,-\, \theta_2^2 \,-\, 2\theta_1\theta_2\right)$$

Quindi l’energia potenziale linearizzata sarà:

$$V = \frac{1}{2} mgl\theta_1^2 + \frac{1}{2} mgl\theta_2^2 + Mgl\theta_1^2 + Mgl\theta_2^2 + \frac{1}{2} Kl^2 \left(\theta_1^2 - \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\right)$$

e, di conseguenza:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_1} = mgl\theta_1 + 2Mgl\theta_1 + Kl^2\theta_1 - Kl^2\theta_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_2} = mgl\theta_2 + 2Mgl\theta_2 + Kl^2\theta_2 - Kl^2\theta_1$$

per cui le equazioni linearizzate saranno:

$$\begin{cases} J^*\ddot{\theta}_1 + \left(m\mathrm{g}\,\mathrm{l} + 2M\mathrm{g}\,\mathrm{l} + \mathrm{Kl}^2\right)\theta_1 - Kl^2\theta_2 = \phi \\ J^*\ddot{\theta}_2 + \left(m\mathrm{g}\,\mathrm{l} + 2M\mathrm{g}\,\mathrm{l} + \mathrm{Kl}^2\right)\theta_2 - Kl^2\theta_1 = \phi \end{cases}$$

In forma matriciale si avrà, ponendo la sostituzione sotto indicata:

$$K^* = m\mathrm{g}\,\mathrm{l} + 2M\mathrm{g}\,\mathrm{l} + \mathrm{Kl}^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{J}^* & \phi \\ \phi & \mathrm{J}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{K}^* & -\,\mathrm{Kl}^2 \\ -\,\mathrm{Kl}^2 & \mathrm{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \phi$$

in cui le matrici di inerzia e di elasticità sono entrambe definite positive.

Posso quindi determinare le frequenze proprie del sistema annullando il determinante della matrice:

$$\left[\mathrm{M}\omega^2 \,-\, \mathrm{K}\right]$$

e risolvendo la biquadratica che ne risulta.