

# Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

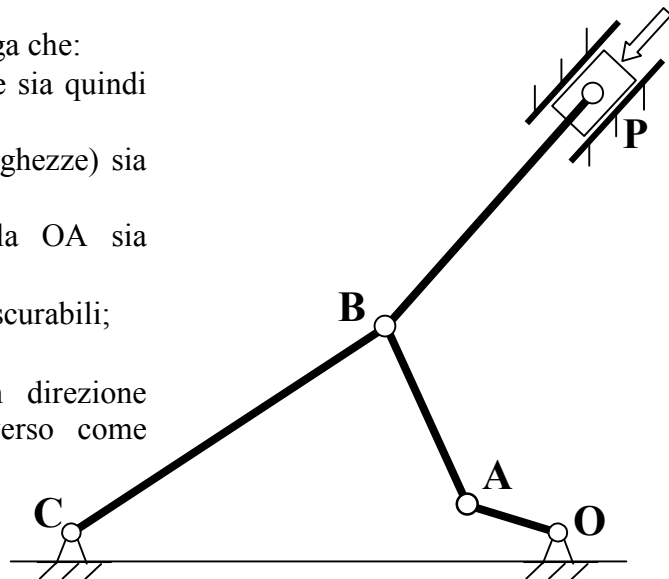
## prof. A. Curami – Appello del 24 gennaio 2001

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione assoluta del punto P coincidente con il pistone;
- la coppia motrice applicata alla manovella OA;
- le reazioni nella cerniera C.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare della manovella OA sia  $\omega = \text{costante}$  e diretta in verso orario;
- le masse delle aste e gli attriti siano trascurabili;
- il pistone sia puntiforme con massa m;
- sul pistone agisca la forza F con direzione parallela al moto del cilindro e verso come indicato.

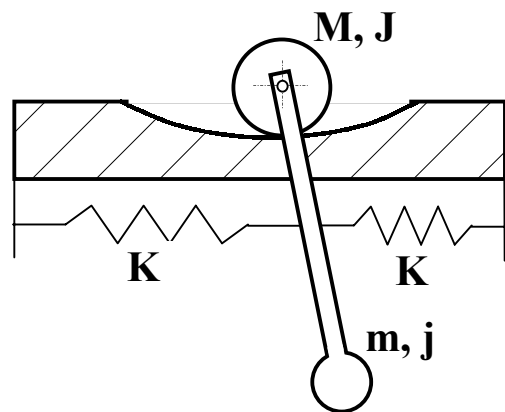


Es. 2 - Dato il sistema riportato a lato si richiede di:

- scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
- linearizzare le stesse attorno alla posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema;

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- gli attriti siano trascurabili;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- le molle si deformino solo in direzione orizzontale e sia quindi trascurabile il loro spostamento verticale;
- le masse ed i momenti di inerzia dei dischi siano quelli indicati nel disegno mentre sia nulla la massa dell'asta che li collega;
- le molle abbiano entrambe rigidezza K e siano collegate all'asta in posizione mediana.



Es. 3 – Descrivere il principio di funzionamento dei rotismi epicicloidali e presentare i vantaggi e gli svantaggi del loro utilizzo come riduttori di velocità.

## Es. 1: Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
<b>Punto O</b>	punto a terra	nulla	nulla
<b>Punto A</b>	circonferenza centrata in O	$\omega_{OA}$	$\omega^2_{OA}$
<b>Punto B</b>	circonferenza centrata in C	?	?
<b>Punto C</b>	punto a terra	nulla	nulla
<b>Punto P</b>	// guida lineare	?	?

### La velocità assoluta del punto P

Tale velocità può essere determinata con il seguente procedimento:

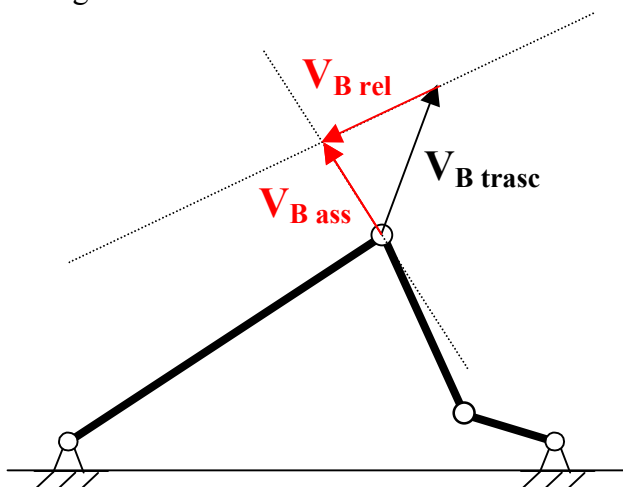
- si posiziona nel punto A l'origine di una terna traslante di moto circolare attorno ad O e si determina la velocità assoluta del punto B (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (nota solo in direzione);
- si posiziona nel punto B l'origine di una terna traslante di moto circolare attorno a C e si ricava la velocità assoluta del punto P (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione);

### Velocità assoluta di B

In riferimento alla terna mobile rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{B \text{ ass}}$	=	$V_{B \text{ trasc}}$	$V_{B \text{ rel}}$
<b>modulo</b>	?		$\omega_{OA}$	?
<b>direzione</b>	$\perp CB$		$\perp OA$	$\perp AB$

Da cui graficamente si ha:



Le velocità angolari delle aste AB e BC risultano:

➤ asta AB (verso antiorario)

$$\omega_{AB} = \frac{V_{Brel}}{AB}$$

➤ asta CB (verso antiorario)

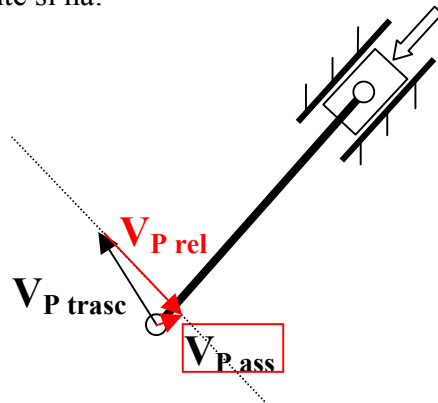
$$\omega_{CB} = \frac{V_{Bass}}{CB}$$

### Velocità assoluta di P

In riferimento alla terna traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{P\ ass}$	=	$V_{P\ trasc}$	$V_{P\ rel}$
<b>modulo</b>	?		$V_B$	?
<b>direzione</b>	// guida		$\perp CB$	$\perp BP$

Da cui graficamente si ha:



E' ora nota la velocità angolare di BP:

➤ asta BP (verso orario)

$$\omega_{BP} = \frac{V_{Prel}}{BP}$$

### La accelerazione assoluta del punto P

Tale accelerazione può essere determinata con il seguente procedimento:

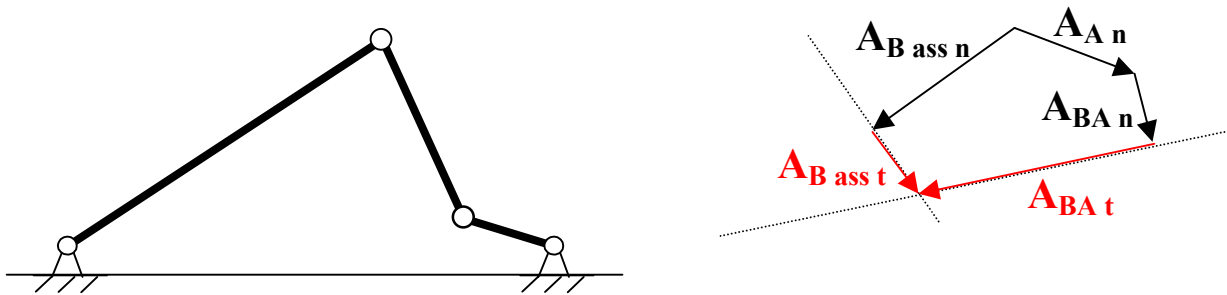
- sfruttando la terna traslante con origine in A si determina la accelerazione assoluta del punto B (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione);
- sfruttando la terna traslante con origine in B si determina la accelerazione assoluta del punto P (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (determinata al punto precedente) e di quella relativa (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione);

## Accelerazione assoluta di B

In riferimento alla terna mobile traslante sopra definita si ha:

	$A_{Bass\ n}$	$A_{Bass\ t}$	=	$A_{A\ n}$	$A_{A\ t}$	$A_{BA\ n}$	$A_{BA\ t}$
<b>modulo</b>	$\omega_{CB}^2 CB$	?		$\omega^2 OA$	0	$\omega_{AB}^2 AB$	?
<b>direzione</b>	// CB	$\perp CB$		// OA	$\perp OA$	// AB	$\perp AB$

Da cui graficamente si ha:



Sono ora note le accelerazioni angolari delle aste AB e CB:

➤ asta AB (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{AB} = \frac{A_{BA\ t}}{AB}$$

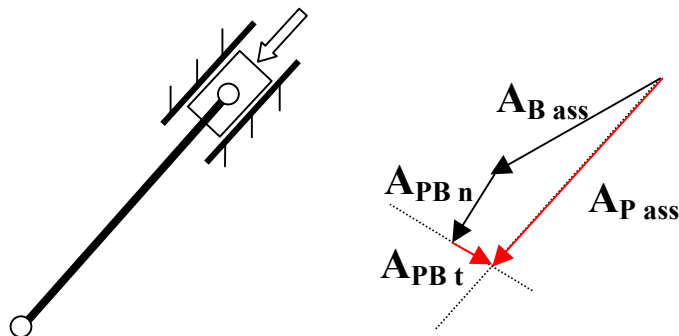
➤ asta CB (verso orario)

$$\dot{\omega}_{CB} = \frac{A_{Bass\ t}}{CB}$$

## Accelerazione assoluta di P

In riferimento alla terna traslante sopra definita si ha:

	$A_{Pass}$	=	$A_{B\ n}$	$A_{B\ t}$	$A_{PB\ n}$	$A_{PB\ t}$
<b>modulo</b>			$\omega_{CB}^2 CB$	$\dot{\omega}_{CB} CB$	$\omega_{BP}^2 BP$	?
<b>direzione</b>	// guida		// CB	$\perp CB$	// BP	$\perp BP$



E' ora nota la accelerazione angolare dell'asta BP:

➤ asta BP (verso orario)

$$\dot{\omega}_{BP} = \frac{A_{PBrel}}{PB}$$

## La coppia motrice applicata alla manovella OA

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

### Variazione di energia cinetica

Coincide con quella del pistone che è l'unico elemento dotato di massa:

$$\frac{dE_C}{dT} = m\vec{v}_p \times \vec{a}_p$$

### Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$W_m = \vec{C} \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

### Potenza resistente

E' dovuta alla massa del pistone che varia la sua quota ed alla forza ad essa applicata:

$$W_r = -m\vec{g} \times \vec{v}_p - \vec{F} \times \vec{v}_p$$

### Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$m\vec{v}_p \times \vec{a}_p = \vec{C} \times \vec{\omega} + m\vec{g} \times \vec{v}_p + \vec{F} \times \vec{v}_p$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C.

## **Le reazioni vincolari nella cerniera C**

Le considerazioni da tenere presenti sono:

- tutte le aste sono scariche e prive di massa;
- la guida lineare del pistone è priva di attrito.

Dalla prima considerazione ne deriva in particolare che l'asta BC può essere considerata una biella e quindi la direzione della reazione incognita è da ritenersi nota e parallela a BC.

Dalla seconda considerazione ne deriva che la reazione che viene scambiata tra guida e pistone è normale alla direzione di scorrimento dello stesso ed è quindi nota in direzione.

Il percorso risolutivo può prevedere i seguenti due equilibri:

- momento della biella BP attorno al punto B;
- momento del sottosistema PBCA attorno ad A.

Se ne ricavano due equazioni che hanno come sole incognite la reazione in C (oggetto della ricerca) e la reazione vincolare in P.

## Es. 2: Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

- $\alpha$  rotazione assoluta del disco intorno al suo centro (positiva se oraria);
- $\beta$  rotazione assoluta del pendolo attorno al suo fulcro (positiva se oraria);

### Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del disco e di quella del pendolo, nelle loro componenti dovute alla rotazione ed alla traslazione.

#### Energia cinetica disco:

$$E_{c-disco} = \frac{1}{2} M V_d^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$$

Dove  $V_d$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del disco che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_d = r \dot{\alpha}$$

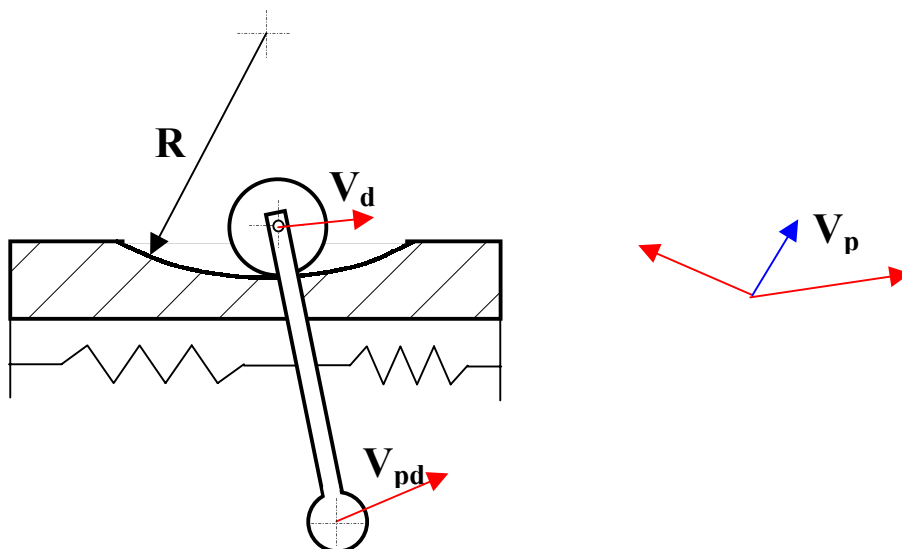
#### Energia cinetica pendolo:

$$E_{c-pendolo} = \frac{1}{2} m V_p^2 + \frac{1}{2} j \dot{\beta}^2$$

Dove  $V_p$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del disco posizionato all'estremità dell'asta del pendolo che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$\vec{V}_p = \vec{V}_d + \vec{V}_{pd}$$

dove  $V_{pd}$  rappresenta la velocità relativa del baricentro del pendolo rispetto al baricentro del disco. Graficamente la situazione è, qualitativamente, quella sotto rappresentata:



Detto  $r$  il raggio del disco e  $R$  la curvatura della guida, ponendo  $A = r / (R-r)$ , si ottiene:

$$E_{c-pendolo} = \frac{1}{2} m [(r\dot{\alpha})^2 + (L\dot{\beta})^2 - 2Lr\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(180 - \beta - A\alpha)] + \frac{1}{2} J\dot{\beta}^2$$

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$E_c = \frac{1}{2} M(r\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m [(r\dot{\alpha})^2 + (L\dot{\beta})^2 + 2Lr\dot{\alpha}\dot{\beta} \cos(\beta + A\alpha)] + \frac{1}{2} J\dot{\beta}^2$$

### **Energia potenziale del sistema**

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del disco e del pendolo) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle molle che, come suggerisce il testo, supporremo avvenga in orizzontale):

Energia potenziale elastica:

$$E_{p-E} = 2 \left\{ \frac{1}{2} K \left[ (R-r) \text{sen} A\alpha + \frac{L}{2} \text{sen} \beta \right]^2 \right\}$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$E_{p-G} = Mg(R-r)(1 - \cos A\alpha) + mg[(R-r)(1 - \cos A\alpha) + L(1 - \cos \beta)]$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$E_p = K \left[ (R-r) \text{sen} A\alpha + \frac{L}{2} \text{sen} \beta \right]^2 + Mg(R-r)(1 - \cos A\alpha) + mg[(R-r)(1 - \cos A\alpha) + L(1 - \cos \beta)]$$

### **Equazioni di equilibrio non lineari**

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J\dot{\alpha} + Mr^2\dot{\alpha} + m[r^2\dot{\alpha} + rL\dot{\beta} \cos(\beta + A\alpha)]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) = J\ddot{\alpha} + Mr^2\ddot{\alpha} + m[r^2\ddot{\alpha} + rL\ddot{\beta} \cos(\beta + A\alpha) + rL\dot{\beta} \text{sen}(\beta + A\alpha)(\dot{\beta} + A\dot{\alpha})]$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = mrLA\dot{\alpha}\dot{\beta} \text{sen}(\beta - A\alpha)$$



$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 2K[(R-r)\text{sen}A\alpha + \frac{L}{2}\text{sen}\beta](R-r)A\cos(A\alpha) + (M+m)g(R-r)A\text{sen}A\alpha$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

dove:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = ML^2\dot{\beta} + 2rL\dot{\alpha}\cos(\beta + A\alpha) + j\dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}}\right) = ML^2\ddot{\beta} + 2rL\ddot{\alpha}\cos(\beta + A\alpha) + 2rL\dot{\alpha}\text{sen}(\beta + A\alpha)(\dot{\beta} + A\dot{\alpha}) + j\ddot{\beta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = -mrLA\dot{\alpha}\dot{\beta}\text{sen}(\beta - A\alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = 2K[(R-r)\text{sen}A\alpha + \frac{L}{2}\text{sen}\beta]\frac{L}{2}\cos\beta + MgL\text{sen}\beta$$

### Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 2K[(R-r)\text{sen}A\alpha + \frac{L}{2}\text{sen}\beta](R-r)A\cos(A\alpha) + (M+m)g(R-r)A\text{sen}A\alpha$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = 2K[(R-r)\text{sen}A\alpha + \frac{L}{2}\text{sen}\beta]\frac{L}{2}\cos\beta + MgL\text{sen}\beta$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\alpha = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3,\dots$$

$$\beta = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3,\dots$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \right)^2 > 0 \Rightarrow$$

Le derivate necessarie sono:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} &= 2KA(R-r) \cos A\alpha (R-r)A \cos A\alpha - 2K[(R-r) \operatorname{sen} A\alpha + \frac{L}{2} \operatorname{sen} \beta](R-r)A^2 \operatorname{sen} A\alpha + \\ &+ (M+m)g(R-r)A^2 \cos A\alpha \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} = K \frac{L^2}{2} \cos^2 \beta - 2K[(R-r) \operatorname{sen} A\alpha + \frac{L}{2} \operatorname{sen} \beta] \frac{L}{2} \operatorname{sen} \beta + MgL \cos \beta$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} = 2K[(R-r)A \cos A\alpha] \frac{L}{2} \cos \beta$$

da cui:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} = 2KA^2(R-r)^2 + (M+m)g(R-r)A^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} = K \frac{L^2}{2} + MgL$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} = 2K[(R-r)A] \frac{L}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \right)^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

### **Linearizzazione dell'energia potenziale**

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(\alpha, \beta) \cong E_p|_{0,0} + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right|_{0,0} \alpha + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \beta} \right|_{0,0} \beta + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \frac{\alpha^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} \frac{\beta^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \alpha \beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} = 2KA^2(R-r)^2 + (M+m)g(R-r)A^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} = K \frac{L^2}{2} + MgL$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} = 2K[(R-r)A] \frac{L}{2}$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2} [2KA^2(R-r)^2 + (M+m)g(R-r)A^2] \alpha^2 + \frac{1}{2} \left[ K \frac{L^2}{2} + MgL \right] \beta^2 + 2K[(R-r)A] \frac{L}{2} \alpha \beta$$

### **Linearizzazione dell'energia cinetica**

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^2 \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^2 \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20}) \dot{q}_j \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2} M(r\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m[(r\dot{\alpha})^2 + (L\dot{\beta})^2 + 2Lr\dot{\alpha}\dot{\beta}] + \frac{1}{2} j\dot{\beta}^2$$

### **Equazioni linearizzate**

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzati si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J\dot{\alpha} + Mr^2\dot{\alpha} + m[r^2\dot{\alpha} + rL\dot{\beta}]$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) = J\ddot{\alpha} + Mr^2\ddot{\alpha} + m[r^2\ddot{\alpha} + rL\ddot{\beta}]$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = [2KA^2(R-r)^2 + (M+m)g(R-r)A^2]\alpha + 2K[(R-r)A]\frac{L}{2}\beta$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

dove:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = mL^2\dot{\beta} + 2mrL\dot{\alpha} + j\dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) = mL^2\ddot{\beta} + 2mrL\ddot{\alpha} + j\ddot{\beta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = \left[ K\frac{L^2}{2} + MgL \right] \beta + 2K[(R-r)A]\frac{L}{2}\alpha$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$[-\omega_0^2 [M] + [K]] \{X_0\} e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale  $\{X_0\} = \{0\}$ , occorre che le  $\omega_0$  siano le radici di:

$$\det[-\omega_0^2 [M] + [K]] = 0$$

dove:

$$M = \begin{bmatrix} J + r^2(M + m) & mrL \\ mrL & j + mL^2 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2KA^2(R-r)^2 & K(R-r)AL \\ K(R-r)AL & \frac{L^2}{2} \end{bmatrix}$$



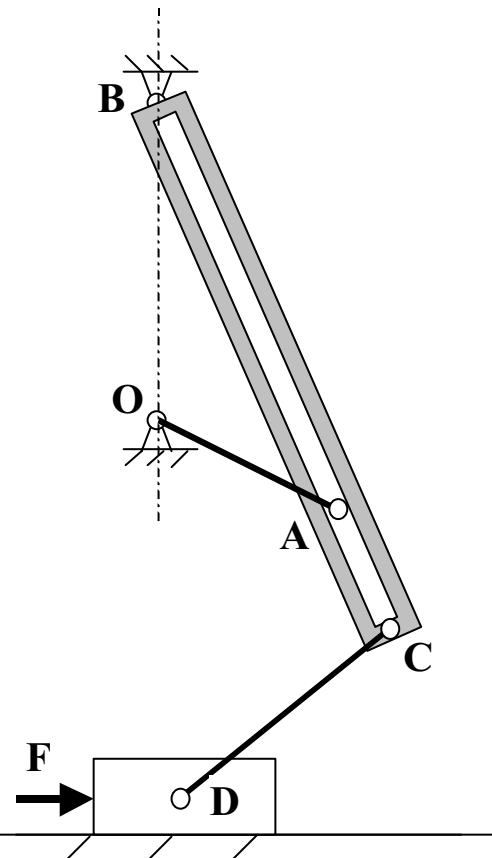
## Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali prof. A. Curami – Appello del 07 febbraio 2001

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione assoluta della slitta;
- la coppia motrice applicata alla manovella OA nelle ipotesi di presenza e di assenza di attrito;
- le reazioni nella cerniera B.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la manovella OA abbia accelerazione e velocità angolari entrambe dirette in verso orario;
- le masse delle aste OA e CD siano trascurabili così come gli attriti nelle cerniere;
- la slitta abbia massa  $M$ ;
- sulla slitta agisca la forza  $F$  orizzontale nel verso indicato.

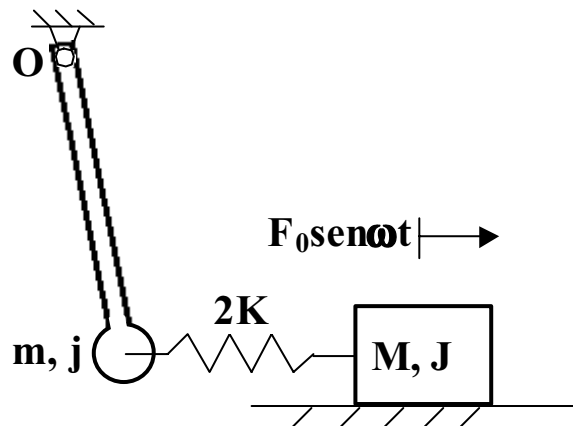


Es. 2 - Dato il sistema riportato a lato si richiede di:

- scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
- linearizzare le stesse attorno alla posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema;

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- gli attriti siano trascurabili;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota; in particolare si consideri che il pendolo abbia lunghezza  $L$ ;
- la molla si deformi solo in direzione orizzontale e sia quindi trascurabile lo spostamento verticale dei suoi estremi;
- le masse ed i momenti di inerzia della slitta e del pendolo siano quelli indicati nel disegno; in particolare si supponga che la massa del pendolo sia concentrata nel disco alla sua estremità.



Es. 3 – Descrivere la modalità con cui le trasformazioni omogenee permettono di descrivere le trasformazioni tra sistemi di riferimento cartesiani ed ipotizzarne un utilizzo nella meccanica.

**Es. 1: Analisi del sistema**

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
<b>Punto O</b>	punto a terra	nulla	nulla
<b>Punto A</b>	circonferenza centrata in O	$\omega OA$	nota
<b>Punto B</b>	Punto a terra	Nulla	nulla
<b>Punto C</b>	circonferenza centrata in B	?	?
<b>Punto P</b>	// piano di scorrimento	?	?

**La velocità assoluta del punto D**

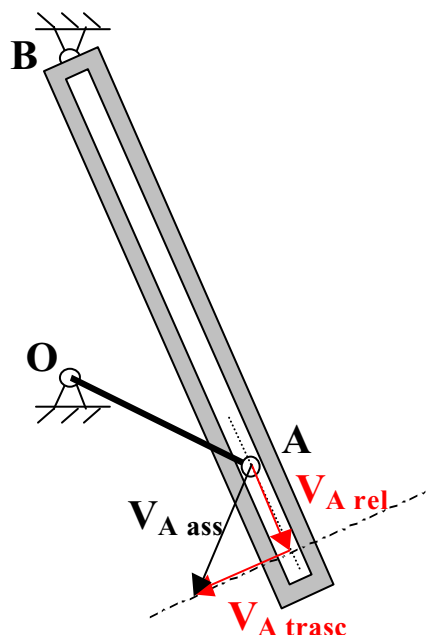
Tale velocità può essere determinata con il seguente procedimento:

- si posiziona nel punto B l'origine di una terna rotante e si scrive una equazione vettoriale che eguaglia la velocità assoluta di A (completamente nota) alla somma vettoriale della velocità di trascinamento (nota solo in direzione) e di quella relativa (pure nota solo in direzione). Da tale equazione si ricava in particolare la velocità angolare del glifo BC che permette di determinare la velocità assoluta del punto C.
- si posiziona nel punto C l'origine di una terna traslante di moto circolare attorno a B e si ricava la velocità assoluta del punto D (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione);

**Velocità assoluta di C**

In riferimento alla terna mobile rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_A \text{ ass}$	=	$V_A \text{ trasc}$	$V_A \text{ rel}$
<b>modulo</b>	$\omega OA$		?	?
<b>direzione</b>	$\perp OA$		$\perp BC$	// BC





La velocità angolare del glifo AB risulta essere:

➤ glifo AB (verso orario)

$$\dot{\omega}_{AB} = \frac{V_{Atrasc}}{AB}$$

Da cui si risale alla velocità di C, estremo del glifo:

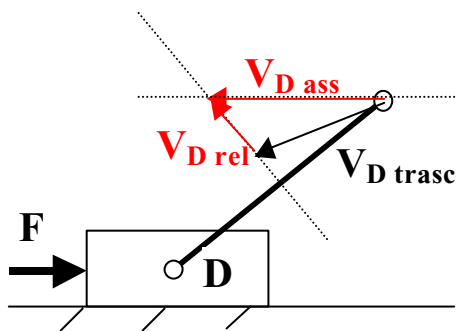
$$V_{Cass} = \dot{\omega}_{BA} BC = \dot{\omega}_{BC} BC$$

### Velocità assoluta di D

In riferimento alla terna traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{D\ ass}$	=	$V_{D\ trasc}$	$V_{D\ rel}$
<b>modulo</b>	?		$V_C$	?
<b>direzione</b>	// guida		$\perp BC$	$\perp CD$

Da cui graficamente si ha:



E' ora nota la velocità angolare dell'asta CD:

➤ asta CD (verso orario)

$$\omega_{CD} = \frac{V_{Drel}}{CD}$$

### La accelerazione assoluta del punto D

Tale accelerazione può essere determinata con il seguente procedimento:

- sfruttando la terna rotante con origine in B si scrive una equazione vettoriale uguagliando l'accelerazione assoluta del punto A, scomposta nelle sue due componenti normale e tangenziale (entrambe completamente note) alla somma vettoriale di quella di trascinamento (di cui è nota completamente la componente normale e solo la direzione di quella tangenziale), di quella relativa (di cui è nota la sola direzione) e di quella complementare (completamente nota); da tale equazione si ricava in particolare la accelerazione angolare del glifo BC che, unitamente alla sua velocità angolare precedentemente calcolata, permette di determinare la accelerazione assoluta del punto C;
- sfruttando la terna traslante con origine in C si determina la accelerazione assoluta del punto D (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (coincidente con





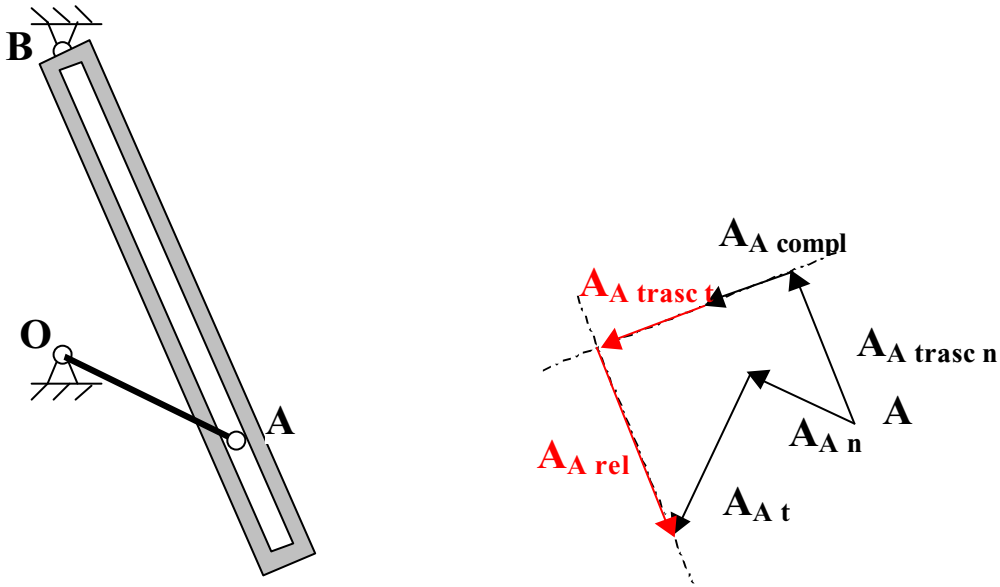
quella di C e quindi determinata al punto precedente) e di quella relativa (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione);

### Accelerazione assoluta di C

In riferimento alla terna mobile rotante sopra definita si ha:

	$\mathbf{A}_{Aass\ n}$	$\mathbf{A}_{Aass\ t}$	=	$\mathbf{A}_{Atrasc\ n}$	$\mathbf{A}_{Atrasc\ t}$	$\mathbf{A}_{A\ rel}$	$\mathbf{A}_{A\ compl}$
<b>modulo</b>	$\omega_{OA}^2 OA$	$\dot{\omega}_{OA} OA$		$\omega_{BA}^2 BA$	?	?	$2\omega_{BA} V_{Brel}$
<b>direzione</b>	// OA verso O	$\perp CB$		// BA verso B	$\perp BA$	// BA	$\perp BA$

Da cui graficamente si ha:



L'accelerazione angolare del glifo AB risulta essere

➤ glifo BA (verso orario)

$$\dot{\omega}_{BA} = \frac{A_{Attrasc\ t}}{BA}$$

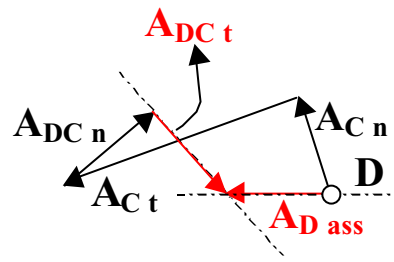
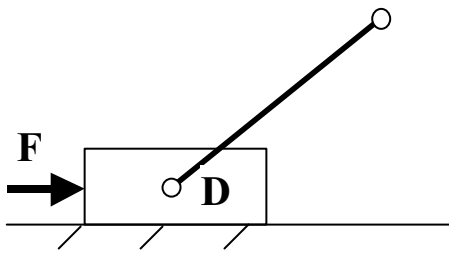
Da cui si risale alla accelerazione di C, estremo del glifo:

$$A_{Cass} = \omega^2 BC \vec{n} + \dot{\omega}_{BA} BC \vec{t}$$

### Accelerazione assoluta di D

In riferimento alla terna traslante prima definita si ha:

	$\mathbf{A}_{Dass}$	=	$\mathbf{A}_{Cn}$	$\mathbf{A}_{Ct}$	$\mathbf{A}_{DCn}$	$\mathbf{A}_{DCt}$
<b>modulo</b>	?		$\omega_{BC}^2 BC$	$\dot{\omega}_{BC} BC$	$\omega_{DC}^2 DC$	?
<b>direzione</b>	// guida		// BC verso B	$\perp BC$	// DC verso C	$\perp DC$



E' ora nota la accelerazione angolare dell'asta CD:

➤ asta CD (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{CD} = \frac{A_{Drel}}{CD}$$

### La coppia motrice applicata alla manovella OA

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_c}{dt} = W_m - W_r$$

oppure completato dalla loro presenza:

$$\frac{dE_c}{dt} = W_m - W_r - W_p$$

### Variazione di energia cinetica

Coincide con quella della slitta e del glifo:

$$\frac{dE_c}{dt} = m\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{\omega}_G \times \vec{\dot{\omega}}_G$$

dove la J del glifo è quella riferita al punto B. Si immagina di conoscerne il valore in quanto sono note tutte le caratteristiche geometriche del sistema.

### Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$W_m = \vec{C} \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

### Potenza resistente



E' dovuta alla massa del glifo il cui baricentro varia di quota ed alla forza applicata alla slitta:

$$W_r = -m_G \vec{g} \times \vec{v}_G - \vec{F} \times \vec{v}_D$$

dove G è il baricentro del glifo. La velocità del baricentro è nota in quanto sono note la sua posizione e la velocità angolare del glifo.

### Potenza persa

Questo termine è presente solo nell'ipotesi di presenza di attrito tra il piano di scorrimento e la slitta.

Detta T la reazione orizzontale presente a causa dell'attrito la potenza persa sarà data da:

$$W_p = -\vec{T} \times \vec{V}_D$$

dove G è il baricentro del glifo. La velocità del baricentro è nota in quanto sono note la sua posizione e la velocità angolare del glifo.

### Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

- Ipotesi di assenza di attrito:

$$m\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{\omega}_G \times \vec{\omega}_G = \vec{C} \times \vec{\omega} + m_G \vec{g} \times \vec{v}_G + \vec{F} \times \vec{v}_D$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C.

- Ipotesi di presenza di attrito:

$$m\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{\omega}_G \times \vec{\omega}_G = \vec{C} \times \vec{\omega} + m_G \vec{g} \times \vec{v}_G + \vec{F} \times \vec{v}_D + \vec{T} \times \vec{v}_D$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C e della reazione T che verrà calcolata nel punto successivo dell'esercizio.

### Le reazioni vincolari nella cerniera B

Le considerazioni principali da tenere presente sono:

- tutte le aste tranne il glifo sono scariche e prive di massa;
- l'unico attrito presente è quello tra slitta e piano

La conseguenza è che l'asta CD può essere considerata una biella e quindi la direzione della reazione incognita è da ritenersi nota e parallela a CD.

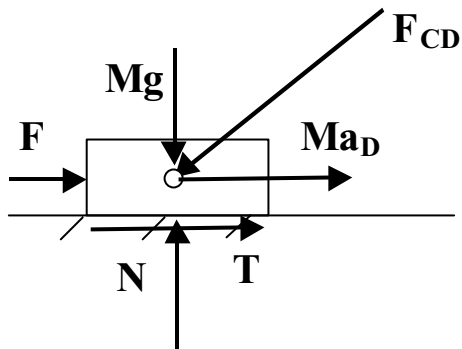
Il percorso risolutivo può essere il seguente:

- studio della slitta isolata per determinare la reazione normale N (e quindi la T) nonché la forza trasmessa dalla biella CD;

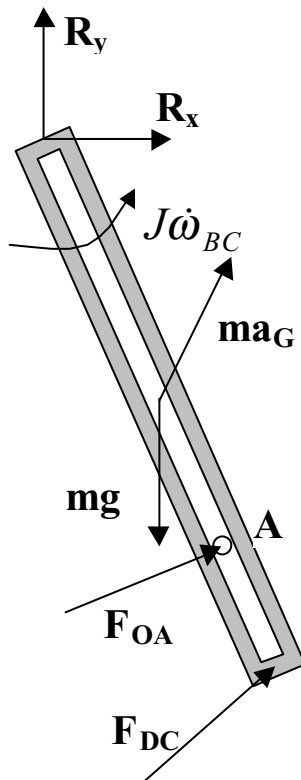


- studio del glifo isolato per la determinazione delle due reazioni incognite (e come sottoprodotto la reazione trasmessa dalla biella OA).

Cominciamo dal primo punto:



Per proseguire con il secondo:



Studiando la slitta, detto  $\alpha$  l'angolo che l'asta DC forma con l'orizzontale si ha:

- Equilibrio alla traslazione verticale della slitta:

$$N - Mg - F_{CD} \sin \alpha = 0$$

- Equilibrio alla traslazione orizzontale della slitta (dove  $T = f_d N$ ):

$$F + Ma_d + T - F_{CD} \cos \alpha = 0$$

Dal sistema di queste due relazioni ricavo il valore di N e di  $F_{CD}$ ;



Con un equilibrio alla rotazione attorno al punto B possiamo determinare la  $F_{OA}$ :

$$-J\vec{\omega} - m\vec{a}_G \wedge \vec{BG} + m\vec{g} \wedge \vec{BG} + \vec{F}_{OA} \wedge \vec{BA} + \vec{F}_{DC} \wedge \vec{BC} = 0$$

Con un equilibrio alla traslazione ricavo la reazione richiesta (eventualmente scomponibile in orizzontale e verticale):

$$\vec{R} - m\vec{a}_G + m\vec{g} + \vec{F}_{OA} + \vec{F}_{DC} = 0$$

**Es. 2: Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

- $\theta$  rotazione assoluta del pendolo attorno al suo centro (positiva se oraria);  
 $x$  traslazione assoluta della slitta (positiva verso destra );

**Energia cinetica del sistema**

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del pendolo e della slitta.

Energia cinetica pendolo:

$$E_{c-\text{pendolo}} = \frac{1}{2} m V_d^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}^2$$

Dove  $V_d$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_d = l \dot{\theta}$$

Energia cinetica slitta:

$$E_{c-\text{slitta}} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$E_c = \frac{1}{2} m (l \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

**Energia potenziale del sistema**

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del pendolo) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza della molla che, come suggerisce il testo, supporremo avvenga in orizzontale):

Energia potenziale elastica:

$$V_E = \frac{1}{2} 2K[\Delta l]^2 = K[x - l \sin \theta]^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$V_G = mgl(1 - \cos \theta)$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$E_p = K[x - l \sin \theta]^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

**Equazioni di equilibrio non lineari**

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = (ml^2 + j)\ddot{\theta} - 2Kl(x - l \sin \theta) \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta} + j \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta} + j \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -2K(x - l \sin \theta)l \cos \theta + mgl \sin \theta$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{(F_0 \sin \alpha)x}{\partial \theta} = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = M\ddot{x} + 2K(x - l \sin \theta) = F_0 \sin \alpha$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$



$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2K(x - l \sin \theta)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{(F_0 \sin \alpha)x}{\partial x} = F_0 \sin \alpha$$

### Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -2Kl(x - l \sin \theta) \cos \theta + mgl \sin \theta = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x - l \sin \theta) = 0$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\theta = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0, 2, 4, \dots$$

$$x = 0$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x} \right|_{0,0} \right)^2 > 0 \Rightarrow$$

Le singole derivate sono:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = 2Kl(l - x \sin \theta) + mgl \cos \theta$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = 2K$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x} = -2Kl \cos \theta$$





da cui:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} = 2Kl^2 + mgl$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{0,0} = 2K$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta x} \right|_{0,0} = -2Kl$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta x} \right|_{0,0} \right)^2 = 2K(2Kl^2 + mgl) + 4K^2l^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

### Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(\alpha, \beta) \cong E_p|_{0,0} + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right|_{0,0} \alpha + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \beta} \right|_{0,0} \beta + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \frac{\alpha^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} \frac{\beta^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \alpha \beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} = 2Kl^2 + mgl$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{0,0} = 2K$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta x} \right|_{0,0} = -2Kl$$



da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2}[2Kl^2 + mgl]\theta^2 + \frac{1}{2}[2K]x^2 - 2Klx$$

### Linearizzazione dell'energia cinetica

Per ciò che riguarda l'energia cinetica la sua espressione si presenta già lineare.

### Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{\partial W}{\partial \theta} = (ml^2 + j)\ddot{\theta} + 2Kl^2\theta + mgl\theta - 2Klx = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + j\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + j\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2Kl^2\theta + mgl\theta - 2Klx$$

$$\frac{\partial W}{\partial \theta} = \frac{(F_0 \sin \alpha)x}{\partial \theta} = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial W}{\partial x} = M\ddot{x} + 2Kx - 2Klx = F_0 \sin \alpha$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} \right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Kx - 2Klx$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{(F_0 \sin \omega t)x}{\partial x} = F_0 \sin \omega t$$

Le matrici di massa e di rigidezza del sistema risultano quindi essere:

$$M = \begin{bmatrix} ml^2 + j & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 2Kl^2 + mgl & -2Kl \\ -2Kl & 2K \end{bmatrix}$$

### Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$[-\omega_0^2 [M] + [K]] \{X_0\} e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale  $\{X_0\} = \{0\}$ , occorre che le  $\omega_0$  siano le radici di:

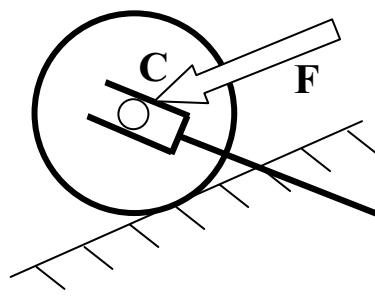
$$\det[-\omega_0^2 [M] + [K]] = 0$$



## Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali prof. A. Curami – Appello del 21 febbraio 2001

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

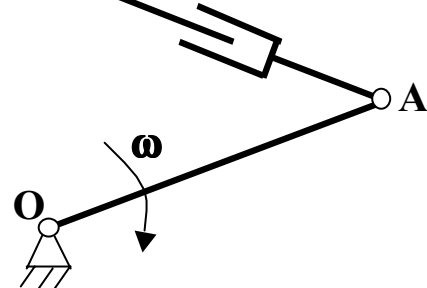
- la velocità e l'accelerazione assoluta del punto C, centro del disco;
- la forza sviluppata all'interno dell'attuatore lineare;
- le reazioni nella cerniera B.



Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;

- la velocità angolare della manovella OA sia  $\omega = \text{costante}$  e diretta in verso orario;
- le masse delle aste e gli attriti siano trascurabili;
- il disco abbia massa M e momento di inerzia baricentrico J;
- sul centro del disco agisca la forza F con direzione parallela al suolo e verso come indicato.

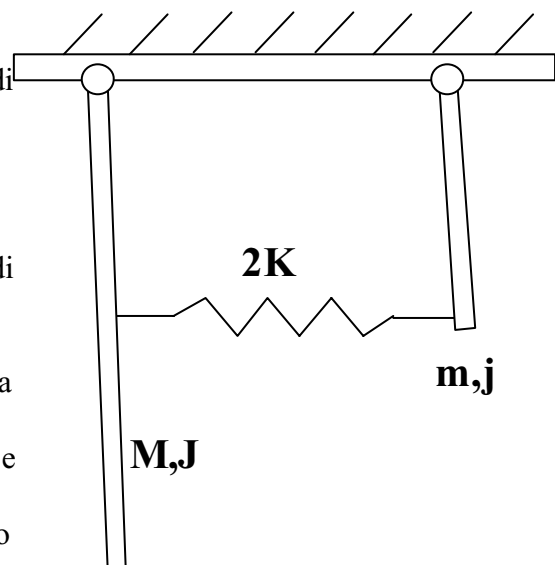


Es. 2 - Dato il sistema riportato a lato si richiede di:

- scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
- linearizzare le stesse attorno alla posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema;

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- gli attriti siano trascurabili;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la molla si deformi solo in direzione orizzontale e sia quindi trascurabile lo spostamento verticale;
- le masse ed i momenti di inerzia delle aste siano quelli indicati.



Es. 3 – Descrivere il principio di funzionamento degli ingranaggi ad assi paralleli elencando i vantaggi derivanti dall'adozione di un profilo ad evolvente per i fianchi dei denti..

**Es. 1: Analisi del sistema**

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
<b>Punto O</b>	punto a terra	nulla	nulla
<b>Punto A</b>	circonferenza centrata in O	$\omega OA$	$\omega^2 OA$
<b>Punto B</b>	Punto a terra	Nulla	nulla
<b>Punto C</b>	// piano di scorrimento	?	?

**La velocità assoluta del punto C**

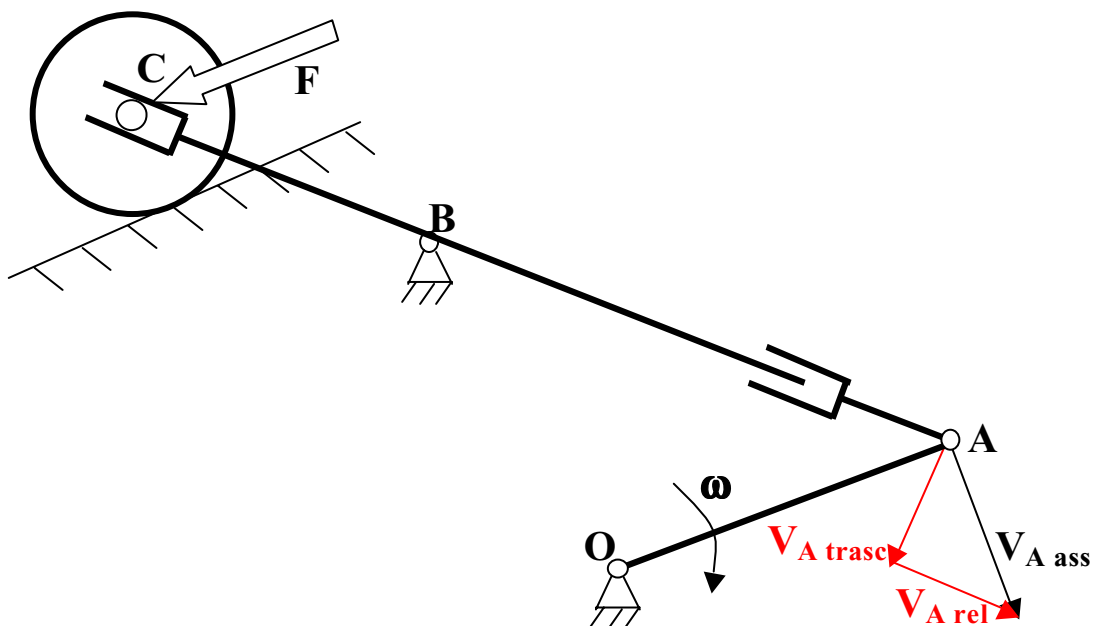
Tale velocità può essere determinata con il seguente procedimento:

- si posiziona nel punto B l'origine di una terna rotante solidale all'asta BA e si scrive una equazione vettoriale che eguaglia la velocità assoluta di A (completamente nota) alla somma vettoriale della velocità di trascinamento (nota solo in direzione) e di quella relativa (pure nota solo in direzione). Da tale equazione si ricava in particolare la velocità angolare dell'asta AC (e BA).
- utilizzando la stessa terna sopra definita si ricava la velocità assoluta del punto C (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione);

**Velocità assoluta di C**

In riferimento al primo passo sopra descritto si ha:

	$V_{A \text{ ass}}$	=	$V_{A \text{ trasc}}$	$V_{A \text{ rel}}$
<b>modulo</b>	$\omega OA$		?	?
<b>direzione</b>	$\perp OA$		$\perp BA$	// BA





La velocità angolare dell'asta BA risulta essere:

➤ asta BA (verso orario)

$$\omega_{BA} = \frac{V_{Atrasc}}{BA}$$

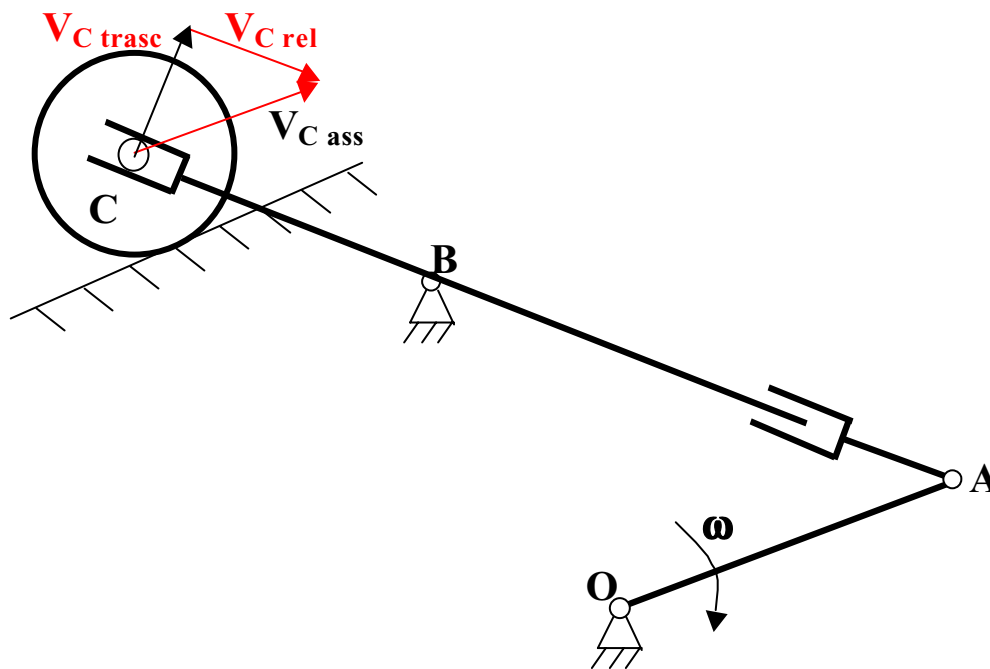
Da cui determino la velocità di C pensato solidale all'asta AC:

$$V_{Ctrasc} = \omega_{BA} BC$$

Siamo ora in grado di risalire alla velocità di C pensato solidale al centro del disco, in quanto, utilizzando la stessa terna rotante prima introdotta, possiamo scrivere la seguente tabella:

	$V_{C\ ass}$	=	$V_{C\ trasc}$	$V_{C\ rel}$
<b>modulo</b>	?		$V_{Ctrasc}$	?
<b>direzione</b>	// suolo		$\perp BC$	// BC

Da cui graficamente si ha:



### La accelerazione assoluta del punto C

Tale accelerazione può essere determinata con il seguente procedimento:

- sfruttando la terna rotante con origine in B si scrive una equazione vettoriale uguagliando l'accelerazione assoluta del punto A, presente solo nella sua componente normale (nota) alla somma vettoriale di quella di trascinamento (di cui è nota la componente normale e solo la direzione di quella tangenziale), di quella relativa (di cui è nota la sola direzione) e di quella complementare (completamente nota); da tale equazione si ricava in particolare la accelerazione angolare dell'asta BA che, unitamente alla sua velocità angolare precedentemente calcolata, permette di determinare la accelerazione assoluta del punto C pensato solidale alla stessa;



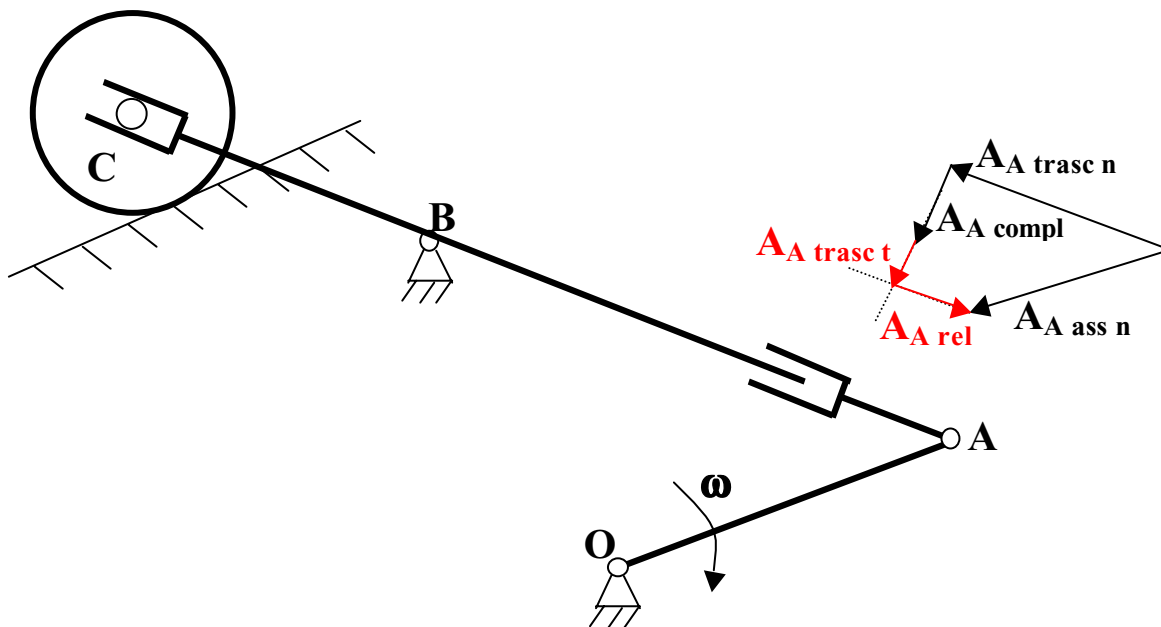
- sfruttando la medesima terna rotante si determina la accelerazione assoluta del punto C solidale al disco (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (coincidente con quella di C pensato solidale all'asta CB e quindi determinata al punto precedente) e di quella relativa (nota solo in direzione);

### Accelerazione assoluta di C

In riferimento alla terna mobile rotante sopra definita si ha:

	$A_{Aass\ n}$	$A_{Aass\ t}$	=	$A_{Atrasc\ n}$	$A_{Atrasc\ t}$	$A_{A\ rel}$	$A_{A\ compl}$
<b>modulo</b>	$\omega_{OA}^2 OA$	-		$\omega_{BA}^2 BA$	?	?	$2\omega_{BA} V_{Arel}$
<b>direzione</b>	// OA verso O	$\perp OA$		// BA verso B	$\perp BA$	// BA	$\perp BA$

Da cui graficamente si ha:



L'accelerazione angolare dell'asta BA risulta essere

➤ asta BA (verso orario)

$$\dot{\omega}_{BA} = \frac{A_{Atrasc\ t}}{BA}$$

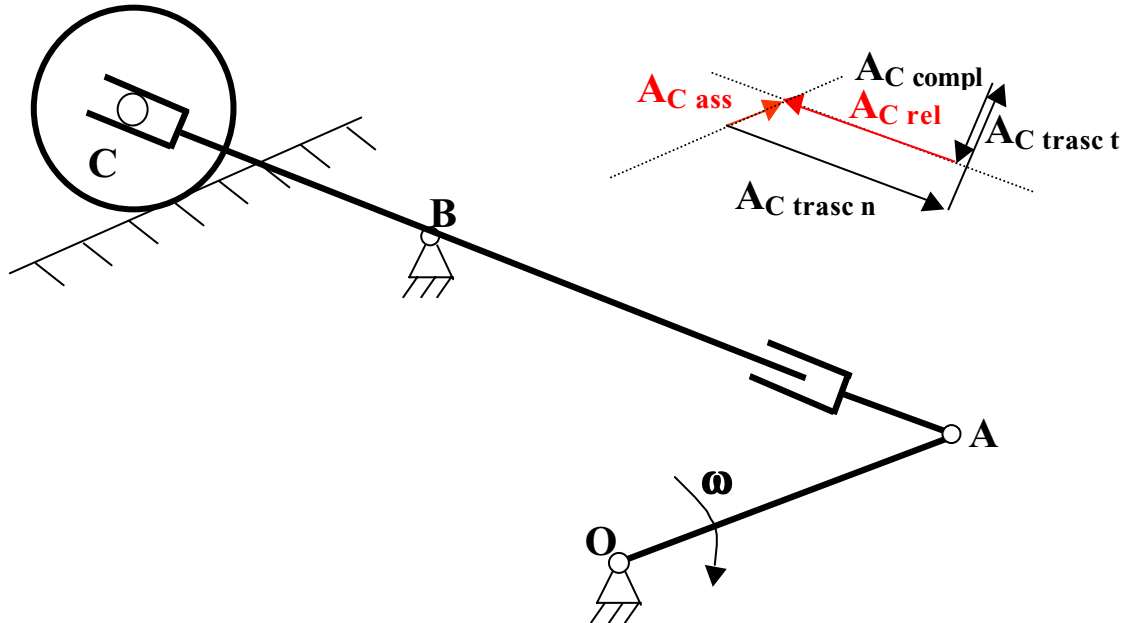
Da cui si risale alla accelerazione di C, pensato solidale all'asta BC:

$$A_{Ctrasc} = \omega^2 BC \vec{n} + \dot{\omega}_{BA} BC \vec{t}$$

Siamo ora in grado di risalire alla accelerazione assoluta di C pensato solidale al centro del disco, in quanto, utilizzando la stessa terna rotante prima introdotta, possiamo scrivere la seguente tabella:



	$A_{Cass}$	=	$A_{C\ trasc\ n}$	$A_{C\ trasc\ t}$	$A_{C\ rel}$	$A_{compl}$
<b>modulo</b>	?		$\omega_{BC}^2 BC$	$\dot{\omega}_{BC} BC$	?	$2\omega_{BA} V_{Crel}$
<b>direzione</b>	// suolo		// BC verso B	$\perp BC$	// BC	$\perp BC$



La velocità e l'accelerazione angolare del disco possono essere determinati facilmente, nell'ipotesi di puro rotolamento, che supponiamo verificata:

- velocità angolare disco

$$\omega_d = \frac{V_{Cass}}{R} \text{ (verso orario)}$$

- accelerazione angolare disco

$$\dot{\omega}_d = \frac{A_{Cass}}{R} \text{ (verso orario)}$$

### La forza motrice sviluppata dall'attuatore lineare AB

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato, nel problema specifico, dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_c}{dt} = W_m - W_r$$

### Variatione di energia cinetica

Coincide con quella del disco:





$$\frac{dE_C}{dt} = m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \vec{\dot{\omega}}_d$$

### Potenza motrice

E' fornita dall'attuatore lineare:

$$W_m = \vec{F}_a \times \vec{v}$$

dove la velocità è quella relativa tra B ed A.

### Potenza resistente

E' dovuta alla massa del disco il cui baricentro varia di quota ed alla forza applicata nel suo centro:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_C - \vec{F}_r \times \vec{v}_C$$

dove C è il baricentro ed il punto centrale del disco. Nell'ipotesi di presenza di attrito volvente la relazione si modifica nel seguente modo:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_C - \vec{F}_r \times \vec{v}_C + f_v N v_C$$

### Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

- Ipotesi di assenza di attrito volvente:

$$m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \vec{\dot{\omega}}_d = \vec{F}_a \times \vec{v} + M\vec{g} \times \vec{v}_C + \vec{F}_r \times \vec{v}_C$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F.

- Ipotesi di presenza di attrito volvente:

$$m\vec{v}_C \times \vec{a}_C + J\vec{\omega}_d \times \vec{\dot{\omega}}_d = \vec{F}_a \times \vec{v} + M\vec{g} \times \vec{v}_C + \vec{F}_r \times \vec{v}_C - f_v N v_C$$

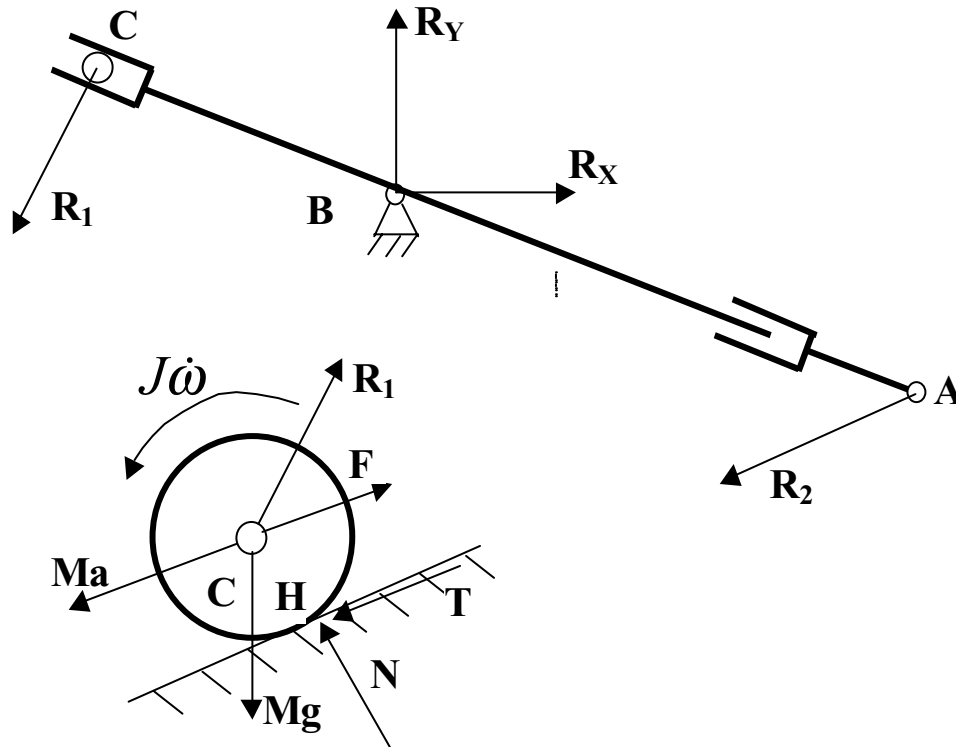
in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F e della reazione N che può tuttavia essere calcolata con gli equilibri dinamici.

### Le reazioni vincolari nella cerniera B

Non è possibile determinare a priori la direzione della reazione presente in B per cui bisognerà utilizzare due relazioni per determinarne modulo e direzione. Per semplicità andremo a scomporre la reazione nelle sue componenti orizzontale ( $R_X$ ) e verticale ( $R_Y$ ).



Separiamo l'asta AC dal resto del sistema ed applichiamo nei punti di taglio le reazioni corrispondenti. In particolare la reazione che applicheremo in A sarà diretta come la manovella OA essendo quest'ultima scarica mentre quella in C sarà perpendicolare all'asta stessa essendo il vincolo con il disco liscio (il che garantisce l'assenza di componenti di reazione tangenziali, cioè dirette come il vincolo).



Si tratta di scrivere quattro relazioni indipendenti in modo da determinare le quattro incognite presenti:

➤ Equilibrio alla rotazione attorno a C dell'asta:

$$M_C = \vec{R}_x \wedge \vec{CB} + \vec{R}_y \wedge \vec{CB} + \vec{R}_2 \wedge \vec{CA} = 0$$

➤ Equilibrio alla rotazione attorno ad A dell'asta:

$$M_A = \vec{R}_x \wedge \vec{AB} + \vec{R}_y \wedge \vec{AB} + \vec{R}_1 \wedge \vec{AC} = 0$$

➤ Equilibrio alla rotazione del disco attorno al centro di istantanea rotazione H :

$$M_H = \vec{T} \wedge \vec{HC} + \vec{N} \wedge \vec{u} - \vec{Ma} \wedge \vec{HC} + \vec{Mg} \wedge \vec{HC} + \vec{R}_2 \wedge \vec{HC} - J_d \vec{\omega} = 0$$

➤ Equilibrio alla traslazione verticale del disco:

$$Y = T \sin \alpha - N \cos \alpha + mg \cos \alpha + F \cos \alpha + Ma \cos \alpha - R_2 \cos \beta = 0$$

dove l'angolo  $\alpha$  esprime l'inclinazione del piano rispetto all'orizzontale e l'angolo  $\beta$  l'inclinazione dell'asta rispetto all'orizzontale.

# Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

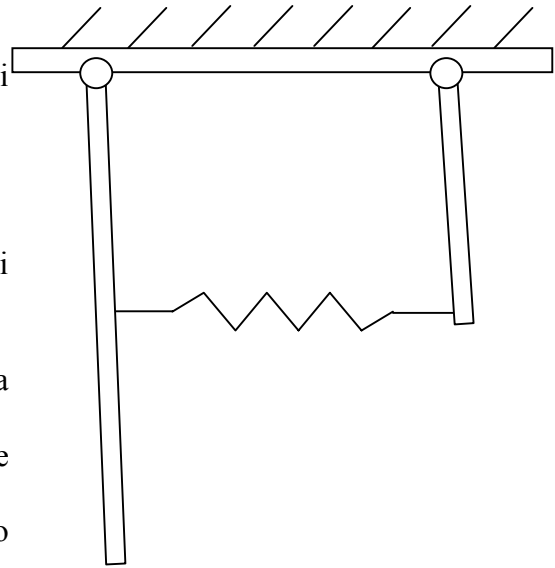
## prof. A. Curami – Appello del 21 febbraio 2001

Es. 2 - Dato il sistema riportato a lato si richiede di:

- scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
- linearizzare le stesse attorno alla posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema;

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- gli attriti siano trascurabili;
- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la molla si deformi solo in direzione orizzontale e sia quindi trascurabile lo spostamento verticale;
- le masse ed i momenti di inerzia delle aste siano quelli indicati.



---

Es. 3 – Descrivere il principio di funzionamento degli ingranaggi ad assi paralleli elencando i vantaggi derivanti dall'adozione di un profilo ad evolvente per i fianchi dei denti..

## Es. 2: Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

- $\alpha$  rotazione assoluta del pendolo lungo intorno al suo fulcro (positiva se oraria);  
 $\beta$  rotazione assoluta del pendolo corto attorno al suo fulcro (positiva se oraria);

### Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella dei due pendoli, nelle componenti dovute alla rotazione ed alla traslazione. Si indichi con  $L$  la lunghezza del pendolo lungo e con  $l$  la lunghezza del pendolo corto.

#### Energia cinetica pendolo lungo:

$$E_{c-pl} = \frac{1}{2} M V_{pl}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2$$

Dove  $V_{pl}$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo lungo che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_{pl} = \frac{L}{2} \dot{\alpha}$$

#### Energia cinetica pendolo corto:

$$E_{c-pc} = \frac{1}{2} m V_{pc}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}^2$$

Dove  $V_{pc}$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo corto che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$\vec{V}_{pc} = \frac{l}{2} \dot{\beta}$$

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} M V_{pl}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m V_{pc}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\beta}^2 = \\ &= \left( M \frac{L^2}{8} + \frac{J}{2} \right) \dot{\alpha}^2 + \left( m \frac{l^2}{8} + \frac{J}{2} \right) \dot{\beta}^2 = \\ &= 2J_l \dot{\alpha}^2 + 2J_c \dot{\beta}^2 \end{aligned}$$

### Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro dei due pendoli conseguente alla loro oscillazione) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza della molla che li collega):

Energia potenziale elastica:

$$E_{pE} = \frac{1}{2} 2K \frac{RL}{\pi^2} \left( \text{sen} \theta - l \text{sen} \theta \right)^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$E_{pG} = Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha) + mg \frac{l}{2} (1 - \cos \beta)$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$E_p = K \frac{RL}{\pi^2} \left( \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \right)^2 + Mg \frac{L}{2} (1 - \cos \alpha) + mg \frac{l}{2} (1 - \cos \beta)$$

### **Equazioni di equilibrio non lineari**

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J_1 \dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) = J_1 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 2K \frac{RL}{\pi^2} \left( \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \right) \frac{L}{2} \cos \alpha + Mg \frac{L}{2} \text{sen} \alpha$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$J_1 \ddot{\alpha} + 2K \frac{RL}{\pi^2} \left( \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \right) \frac{L}{2} \cos \alpha + Mg \frac{L}{2} \text{sen} \alpha = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = J_c \dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) = J_c \ddot{\beta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = -2K \frac{RL}{\pi^2} \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \left[ l \cos \beta + mg \frac{l}{2} \text{sen} \beta \right]$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$J_c \ddot{\beta} - 2K \frac{RL}{\pi^2} \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \left[ l \cos \beta + mg \frac{l}{2} \text{sen} \beta \right] = 0$$

### Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 2K \frac{RL}{\pi^2} \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \left[ \frac{l}{2} \cos \alpha + Mg \frac{l}{2} \text{sen} \alpha \right]$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = -2K \frac{RL}{\pi^2} \text{sen} \alpha - l \text{sen} \beta \left[ l \cos \beta + mg \frac{l}{2} \text{sen} \beta \right]$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\alpha = 0 \pm n\pi \quad \heartsuit \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

$$\beta = 0 \pm n\pi \quad \heartsuit \quad n = 0,1,2,3,\dots$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} - \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0}^2 > 0 \quad \heartsuit$$

Le derivate necessarie sono:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} = 2K \frac{RL}{\pi^2} \cos \alpha \left[ \frac{L}{2} \cos \alpha - 2K \frac{RL}{\pi^2} \sin \alpha - l \sin \beta \right] \frac{L}{2} \sin \alpha + Mg \frac{L}{2} \cos \alpha$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} = 2K(l \cos \beta)l \cos \beta + 2K \frac{RL}{\pi^2} \sin \alpha - l \sin \beta \left[ l \sin \beta + mg \frac{l}{2} \cos \beta \right]$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} = -2Kl \cos \beta \frac{L}{2} \cos \alpha$$

da cui:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} = 2K \frac{L^2}{4} + Mg \frac{L}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} = 2Kl^2 + mg \frac{l}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} = -2Kl \frac{L}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} - \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0}^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

### Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(\alpha, \beta) \cong E_p|_{0,0} + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right|_{0,0} \alpha + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \beta} \right|_{0,0} \beta + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \frac{\alpha^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} \frac{\beta^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \alpha \beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} = 2K \frac{L^2}{4} + Mg \frac{L}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} = 2Kl^2 + mg \frac{l}{2}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} = -2Kl \frac{L}{2}$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2} \left( 2K \frac{L^2}{4} + Mg \frac{L}{2} \right) \alpha^2 + \frac{1}{2} \left( 2Kl^2 + mg \frac{l}{2} \right) \beta^2 + 2Kl \frac{L}{2} \alpha \beta = \\ &= \left( K \frac{L^2}{4} + Mg \frac{L}{4} \right) \alpha^2 + \left( Kl^2 + mg \frac{l}{4} \right) \beta^2 + KIL \alpha \beta \end{aligned}$$

### **Linearizzazione dell'energia cinetica**

Nell'esercizio proposto l'energia cinetica non necessita di linearizzazione. Ci limitiamo ad indicare il processo che sarebbe stato applicato in presenza di non linearità nella stessa.

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 a_{jk}(q_1, q_2) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^2 a_{jk}(q_{10}, q_{20}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nell'esercizio l'espressione dell'energia cinetica risulta quindi essere invariata:

$$E_c = J_l \dot{\alpha} + J_c \dot{\beta}$$

### **Equazioni linearizzate**

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzati si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 0$$



$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J_i \dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} \right) = J \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = \left( K \frac{L^2}{2} + Mg \frac{L}{2} \right) \alpha + KIL \beta$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = J_c \dot{\beta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} \right) = J_c \ddot{\beta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = 2 \left( Kl^2 + Mg \frac{l}{4} \right) \beta + KIL \alpha$$

### Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left( -\omega_0^2 [M] + [K] \right) \{X_0\} e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale  $\{X_0\} = \{0\}$ , occorre che le  $\omega_0$  siano le radici di:

$$\det(-\omega_0^2[M] + [K]) = 0$$



## Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali Prof. A. Curami – Appello del 20 giugno 2001

Si consideri il carrello anteriore del Lancaster sotto raffigurato (Fig. 1) e, in base allo schema cinematico equivalente (Fig. 2), si determini:

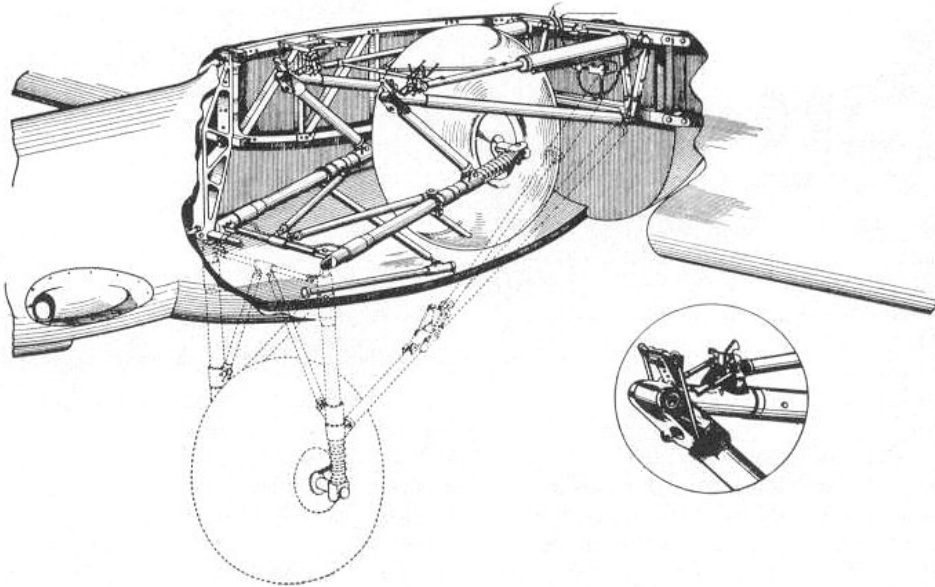


Fig. 1

**Quesito 1** -la cinematica del punto E e dell'asta DE utilizzando le equazioni di chiusura supponendo che:

- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- l'attuatore lineare BC si stia allungando con una velocità  $V$  costante;

Per cinematica di E si intende la velocità e l'accelerazione del punto E rispetto al telaio considerato fisso, nonché la velocità e l'accelerazione angolare della gamba del carrello (asta DF).

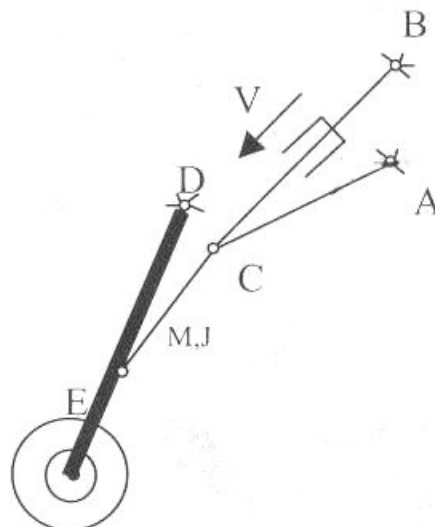


Fig. 2



**Quesito 2-** La forza generata dall'attuatore supponendo che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- le masse delle aste AC, CE e BC (attuatore) siano trascurabili;
- gli attriti nelle cerniere siano nulli;
- la gamba del carrello (comprensiva della ruota) abbia massa  $M$  e momento di inerzia baricentrico  $J$ ; il baricentro coincida con il punto E;

**Quesito 3** -L' equazione del moto del velivolo determinando analiticamente la velocità  $V$  alla quale avviene il distacco della ruota. Si supponga che:

- i punti A, B e D siano solidali con la gondola del velivolo;
- le forze aerodinamiche siano trascurabili;
- il profilo della pista di atterraggio possa essere schematizzato con una funzione armonica di ampiezza  $A$  e lunghezza d'onda pari a  $L$ ;
- la velocità di rullaggio sia  $V$  costante;
- la ruota possa essere schematizzata come una coppia molla smorzatore descritta dalle costanti  $k$  e  $r$ ; il carico gravante sul centro della ruota sia noto e pari a  $M_{ant}$

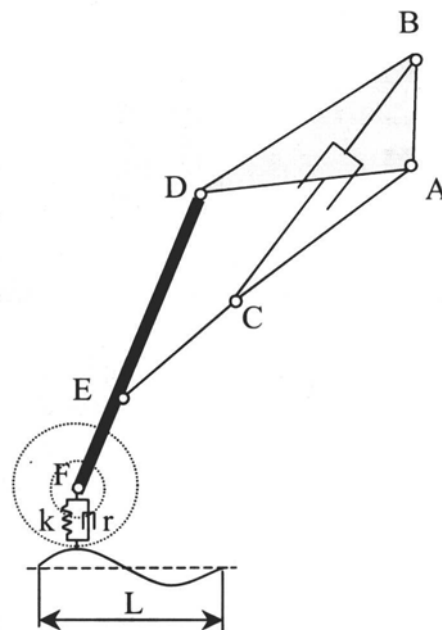


Fig. 3

**Domanda** -Descrivere il funzionamento delle frizioni, sviluppando analiticamente il transitorio di un sistema composto da motore ed utilizzatore fra i quali sia interposta una frizione.



## Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali prof. A. Curami – Appello del 20 giugno 2001

### Quesito 1: Analisi del sistema

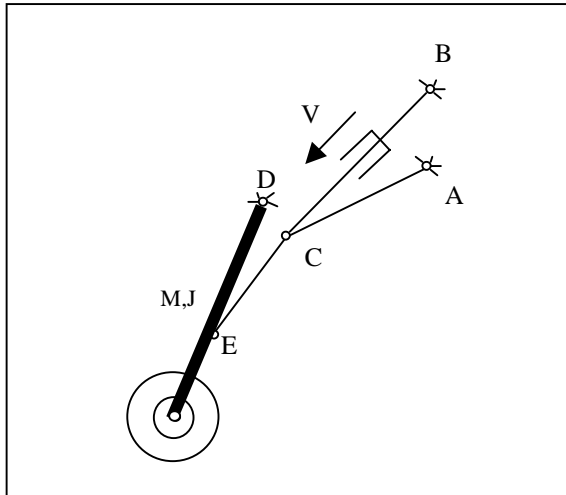


Fig. 2

Eseguiamo una verifica dei gradi di libertà del sistema sopra riportato:

esso è formato da 4 elementi mobili (aste AC, CE, ED ed attuatore BC) per un totale di 12 gradi di libertà e da 3 cerniere a terra (A, B, D) che eliminano 6 gradi di libertà. Altri 5 gradi di libertà vengono eliminati dalle cerniere C (-3 gdl) ed E (-2 gdl). Si conclude quindi che il sistema è a singolo grado di libertà e quindi che la sua cinematica può essere completamente studiata nota quella dell'attuatore BC (velocità V costante).

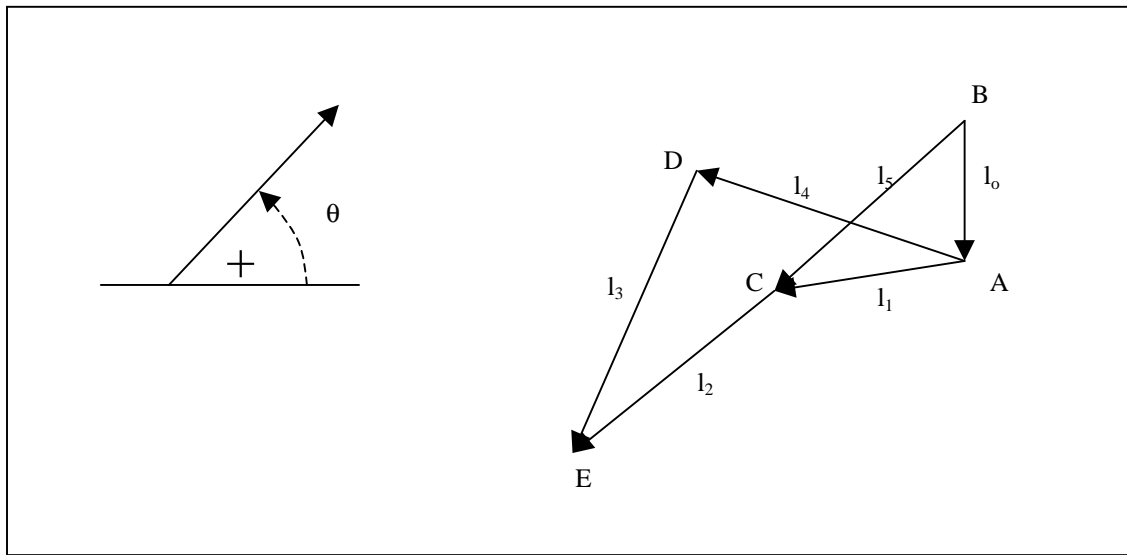
### Cinematica del punto E

La cinematica di E deve essere determinata in funzione dei valori di posizione (velocità e accelerazione) dell'unico grado di libertà del sistema rappresentato dall'orientamento (velocità angolare, accelerazione angolare) della manovella AC.

La soluzione analitica si ottiene in questo modo:

- determinazione della cinematica di C in funzione della velocità V dell'attuatore BC;
- determinazione della cinematica di E in funzione di quella della manovella AC.

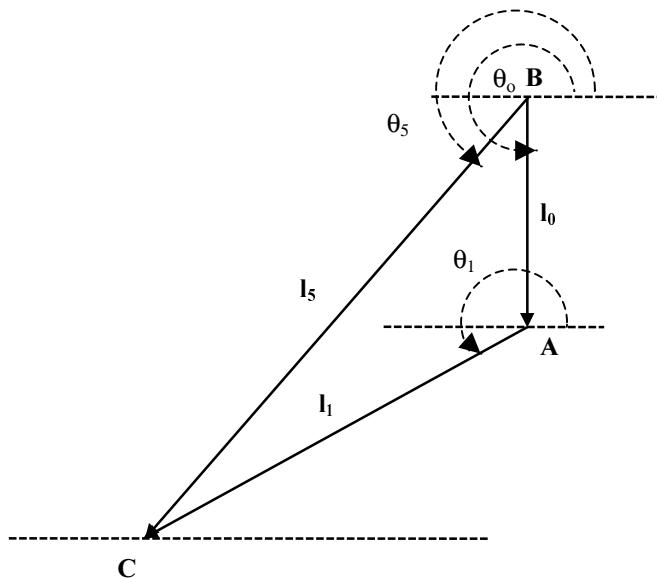




## Posizione di C

La cinematica di C va ricavata in funzione della posizione, della velocità .  
dell'attuatore CB.

Consideriamo l'equivalente vettoriale del nostro meccanismo:



$$AB = l_6 e^{270^\circ}$$

$$BC = l_5 e^{\theta_5}$$

$$AC = l_1 e^{\theta_1}$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_6 = \vec{l}_5$$





che, passando ai numeri complessi, sarà espressa da:

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_o e^{i\vartheta_o} = l_5 e^{i\vartheta_5}$$

Scomponiamo l'equazione complessa in due equazioni scalari corrispondenti alle due proiezioni sull'asse reale e su quello immaginario:

$$l_1 \cos \vartheta_1 + l_o \cos \vartheta_o = l_5 \cos \vartheta_5$$

$$l_1 \sin \vartheta_1 + l_o \sin \vartheta_o = l_5 \sin \vartheta_5$$

con  $\vartheta_o = 270^\circ$ .

Si tratta di un sistema non lineare di due equazioni nelle due incognite  $\theta_1$  e  $\theta_5$ . Si noti che una volta noto il valore di  $l_5$  sarà semplice risalire a quello di  $\theta_1$  e di  $\theta_5$ .

Questo significa che dovremo individuare le relazioni sotto riportate:

$$\vartheta_1 = f(l_5)$$

$$\vartheta_5 = f(l_5)$$

Si ottiene:

$$\vartheta_1 = \arctg \left( \frac{l_o^2 - l_5^2 + l_1^2}{\sqrt{2l_o^2 l_1^2 + 2l_5^2 l_1^2 + 2l_5^2 l_o^2 - l_5^4 - l_o^4 - l_1^4}} \right)$$

$$\vartheta_5 = \arctg \left( \frac{-l_o^2 - l_5^2 + l_1^2}{\sqrt{2l_o^2 l_1^2 + 2l_5^2 l_1^2 + 2l_5^2 l_o^2 - l_5^4 - l_o^4 - l_1^4}} \right)$$

Si sottolinea fin d'ora che tale corrispondenza potrebbe non essere univoca; infatti si pensi alla duplicità di soluzioni associate alla possibilità di avere una doppia configurazione del sistema dove il punto C si trova una volta alla destra e una volta alla sinistra della retta passante per A e per B. In pratica si avranno due coppie di valori di  $\theta_1$  e  $\theta_5$  a fronte di un unico valore di  $\theta_o$ .

## Velocità di C

La determinazione della velocità di C passa attraverso la derivazione dell'equazione di chiusura vettoriale. Ricordando che  $i$  è pari a  $e^{i\frac{\pi}{2}}$  e derivando rispetto al tempo, l'espressione si ottiene:

$$l_1 i \dot{\vartheta}_1 e^{i\vartheta_1} + 0 = \dot{l}_5 e^{i\vartheta_5} + l_5 i \dot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5}$$

ove  $\dot{l}_5 = V$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:





$$l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + 90) + 0 = V \cos \vartheta_5 + l_5 \dot{\vartheta}_5 \cos(\vartheta_5 + 90)$$

$$l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 + 90) + 0 = V \sin \vartheta_5 + l_5 \dot{\vartheta}_5 \sin(\vartheta_5 + 90)$$

da cui è possibile ricavare il legame fra le velocità angolari di AC e BC in funzione della velocità  $V$  dell'attuatore e delle posizioni angolari  $\theta_1$  e di  $\theta_5$  funzioni di  $l_5$ .

$$\dot{\vartheta}_1 = f(V, l_5)$$

$$\dot{\vartheta}_5 = f(V, l_5)$$

Si ottiene:

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{2V}{l_1 l_5 l_o \sqrt{(-l_o + l_1 - l_5) \cdot (l_o + l_1 + l_5) \cdot (l_5 + l_1 - l_o) \cdot (-l_o + l_1 - l_5)}}$$

$$\dot{\vartheta}_4 = \frac{V(l_5^2 + l_1^2 - l_o^2)}{l_5 \sqrt{(-l_o + l_1 - l_5) \cdot (l_o + l_1 + l_5) \cdot (-l_o + l_1 + l_5) \cdot (-l_o + l_1 - l_5)}}$$

## Accelerazione di C

La determinazione della accelerazione di C si ottiene derivando rispetto al tempo l'equazione di chiusura delle velocità. Derivando si ottiene:

$$l_1 i \ddot{\vartheta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_1 i i \dot{\vartheta}_1^2 e^{i\vartheta_1} = \ddot{l}_5 e^{i\vartheta_5} + \dot{l}_5 i \dot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5} + \dot{l}_5 i \dot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5} + l_5 i i \dot{\vartheta}_5^2 e^{i\vartheta_5} + l_5 i \ddot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5}$$

cioè

$$l_1 i \ddot{\vartheta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_1 i i \dot{\vartheta}_1^2 e^{i\vartheta_1} = 0 + 2 \dot{l}_5 i \dot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5} + l_5 i i \dot{\vartheta}_5^2 e^{i\vartheta_5} + l_5 i \ddot{\vartheta}_5 e^{i\vartheta_5}$$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:

$$l_1 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + 90) - l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \cos \vartheta_1 = 2V \dot{\vartheta}_5 \cos(\vartheta_5 + 90) - l_5 \dot{\vartheta}_5^2 \cos(\vartheta_5) + l_5 \ddot{\vartheta}_5 \cos(\vartheta_5 + 90)$$

$$l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 + 90) - l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin \vartheta_1 = 2V \dot{\vartheta}_5 \sin(\vartheta_5 + 90) - l_5 \dot{\vartheta}_5^2 \sin(\vartheta_5) + l_5 \ddot{\vartheta}_5 \sin(\vartheta_5 + 90)$$

da cui è possibile ricavare il legame fra le accelerazioni angolari di AC e BC:

$$\ddot{\vartheta}_1 = f(V, l_5)$$

$$\ddot{\vartheta}_5 = f(V, l_5)$$

Si ottiene:







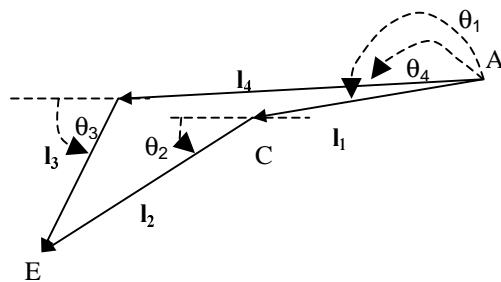
$$\ddot{\vartheta}_1 = \frac{-l_1 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_5) + l_5 \dot{\theta}_5^2}{l_1 \sin(\theta_1 - \theta_5)}$$

$$\ddot{\vartheta}_5 = \frac{l_1 \dot{\theta}_1^2 - 2l_5 \dot{\theta}_5 \sin(\theta_1 - \theta_5) + l_5 \dot{\theta}_5^2 \cos(\theta_1 - \theta_5)}{l_5 \sin(\theta_1 - \theta_5)}$$

## Posizione di E

La cinematica di E va ricavata in funzione della posizione, della velocità e dell'accelerazione della manovella AC.

Consideriamo l'equivalente vettoriale del nostro meccanismo a quadrilatero articolato:



$$CE = l_2 e^{i\vartheta_2}$$

$$DE = l_3 e^{i\vartheta_3}$$

$$AC = l_1 e^{i\vartheta_1}$$

$$DA = l_4 e^{i\vartheta_4}$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3 + \vec{l}_4$$

che, passando ai numeri complessi, è espressa da:

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 e^{i\vartheta_2} = l_3 e^{i\vartheta_3} + l_4 e^{i\vartheta_4}$$

Si consideri che gli angoli sono presi positivi in verso antiorario a partire dall'asse reale ed esprimono l'orientazione delle aste del quadrilatero come raffigurato nel disegno.

Analizzando l'equazione complessa si può vedere come il quarto vettore sia in realtà rappresentato da un vettore costante nel tempo in quanto le cerniere A e D sono entrambe connesse a terra; per questo nel seguito evidenzieremo questo termine come un numero complesso costante evitando di riportare la sua dipendenza da un  $\theta_4$  costante.

Il sottosistema considerato è composto da tre aste e da quattro cerniere per un totale complessivo di 1 solo grado di libertà (9 gdl delle aste a cui vanno sottratti gli 8 gdl introdotti dalle cerniere) che nel seguito sarà indicato con  $\theta_1$ . Scopo del nostro procedere sarà quindi di esprimere in funzione di





$\theta_1$  i valori degli angoli  $\theta_2$  e  $\theta_3$ ; per completare l'operazione abbiamo a disposizione una equazione complessa nel piano, equivalente a due equazioni scalari.

Scomponiamo l'equazione complessa in due equazioni scalari corrispondenti alle due proiezioni sull'asse reale e su quello immaginario:

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = l_3 \cos \theta_3 + l_{4r}$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_3 \sin \theta_3 + l_{4i}$$

Note le caratteristiche geometriche del sistema, essendo quest'ultimo ad un grado di libertà, la sua configurazione sarà completamente individuata dal valore di uno dei tre angoli utilizzato per descriverlo. Nel seguito supporremo di utilizzare come variabile indipendente l'angolo di fase  $\theta_1$  della manovella. Questo significa che dovremo individuare le due relazioni sotto riportate:

$$\theta_2 = f(\theta_1)$$

$$\theta_3 = f(\theta_2)$$

Si sottolinea ancora che tale corrispondenza potrebbe non essere univoca; infatti si pensi alla duplicità di soluzioni associate alla possibilità di avere una doppia configurazione del sistema dove il punto E si trova una volta sopra e una volta sotto alla retta passante per D e per A. In pratica si avranno due coppie di valori di  $\theta_2$  e  $\theta_3$  a fronte di un unico valore di  $\theta_1$ .

Tornando alle nostre due equazioni scalari, cominciamo con il ricercare il legame tra  $\theta_3$  e  $\theta_1$ . Allo scopo procediamo raggruppando al secondo membro i termini funzione di  $\theta_2$  con l'intento di fare scomparire le funzioni trigonometriche che lo contengono:

$$l_1 \cos \theta_1 - l_3 \cos \theta_3 - l_{4r} = -l_2 \cos \theta_2$$

$$l_1 \sin \theta_1 - l_3 \sin \theta_3 - l_{4i} = -l_2 \sin \theta_2$$

Quadrando le due equazioni si ottiene:

$$l_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_3^2 \cos^2 \theta_3 + l_{4r}^2 - 2l_1 l_3 \cos \theta_1 \cos \theta_3 - 2l_1 l_{4r} \cos \theta_1 + 2l_3 l_{4r} \cos \theta_3 = l_2^2 \cos^2 \theta_2$$

$$l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_3^2 \sin^2 \theta_3 + l_{4i}^2 - 2l_1 l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_3 - 2l_1 l_{4i} \sin \theta_1 + 2l_3 l_{4i} \sin \theta_3 = l_2^2 \sin^2 \theta_2$$

la cui somma dà come risultato:

$$l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1 l_3 (\cos \theta_1 \cos \theta_3 + \sin \theta_1 \sin \theta_3) - 2l_1 l_{4r} \cos \theta_1 - 2l_1 l_{4i} \sin \theta_1 + 2l_3 l_{4r} \cos \theta_3 + 2l_3 l_{4i} \sin \theta_3 = 0$$

Questa relazione, dato un certo valore di  $\theta_1$ , può essere pensata come una equazione trigonometrica lineare del tipo:

$$A_1 \sin \theta_3 + B_1 \cos \theta_3 + C_1 = 0$$

Dove le tre costanti valgono rispettivamente:





$$A = -2l_1l_3\sin\theta_1 + 2l_3l_{4i}$$

$$B = -2l_1l_3\cos\theta_1 + 2l_3l_{4r}$$

$$C = l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 - 2l_1l_{4r}\cos\theta_1 - 2l_1l_{4i}\sin\theta_1$$

La soluzione dell'equazione trigonometrica lineare in seno e coseno passa attraverso la sostituzione del seno e del coseno con la tangente della metà dell'angolo:

$$\sin\theta_3 = \frac{2 \tan \frac{\theta_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_3}{2}}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_3}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_3}{2}}$$

date queste relazioni, ponendo la sostituzione:

$$x = \tan \frac{\theta_3}{2}$$

si ottiene:

$$\sin\theta_3 = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos\theta_3 = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Sostituendo le equazioni trovate nell'equazione trigonometrica lineare si ha:

$$2A_1x + B_1 - B_1x^2 + C_1 + C_1x^2 = 0$$

da cui raccogliendo si ha:

$$(-B_1 + C_1)x^2 + 2A_1x + B_1 + C_1 = 0$$

da cui si ricava finalmente il valore di x:

$$x = \tan \frac{\theta_3}{2} = f_1(\theta) = \frac{A_1 \pm \sqrt{A_1^2 + (-B_1 + C_1)^2}}{B_1 + C_1}$$

Riassumendo il procedimento, noto il valore di  $\theta_1$  si determinano quelli delle costanti  $A_1$ ,  $B_1$  e  $C_1$ , e da queste si risale al valore di  $\theta_3$ , in genere rappresentato da una coppia di valori.

Il procedimento seguito per eliminare  $\theta_2$  ha un senso fisico che può essere reso evidente mostrando come gli stessi risultati potevano essere raggiunti scrivendo l'equazione come:





$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = l_2^2$$

dove:

$$x_A = l_1 \cos \theta_1$$

$$y_A = l_1 \sin \theta_1$$

$$x_B = l_{4r} + l_3 \cos \theta_3$$

$$y_B = l_{4i} + l_3 \sin \theta_3$$

Tornando alle nostre due equazioni scalari di partenza, con un procedimento sostanzialmente analogo, andiamo alla ricerca del legame tra  $\theta_2$  e  $\theta_1$ . Allo scopo procediamo raggruppando al secondo membro i termini funzione di  $\theta_3$  con l'intento di fare scomparire le funzioni trigonometriche che lo contengono:

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 - l_{4r} = l_3 \cos \theta_3$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 - l_{4i} = l_3 \sin \theta_3$$

Quadrando le due equazioni si ottiene:

$$l_1^2 \cos^2 \theta_1 + l_2^2 \cos^2 \theta_2 + l_{4r}^2 + 2l_1 l_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - 2l_1 l_{4r} \cos \theta_1 - 2l_2 l_{4r} \cos \theta_2 = l_3^2 \cos^2 \theta_3$$

$$l_1^2 \sin^2 \theta_1 + l_2^2 \sin^2 \theta_2 + l_{4i}^2 + 2l_1 l_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 - 2l_1 l_{4i} \sin \theta_1 - 2l_2 l_{4i} \sin \theta_2 = l_3^2 \sin^2 \theta_3$$

la cui somma dà come risultato:

$$l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 + 2l_1 l_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) - 2l_1 l_{4r} \cos \theta_1 - 2l_2 l_{4r} \cos \theta_2 + \\ - 2l_1 l_{4i} \sin \theta_1 - 2l_2 l_{4i} \sin \theta_2 = 0$$

Questa relazione, dato un certo valore di  $\theta_1$ , può essere pensata come una equazione trigonometrica lineare del tipo:

$$A_2 \sin \theta_2 + B_2 \cos \theta_2 + C_2 = 0$$

Dove le tre costanti valgono rispettivamente:

$$A_2 = 2l_1 l_2 \sin \theta_1 - 2l_2 l_{4i}$$

$$B_2 = 2l_1 l_2 \cos \theta_1 - 2l_2 l_{4r}$$

$$C_2 = l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 + l_4^2 - 2l_1 l_{4r} \cos \theta_1 - 2l_1 l_{4i} \sin \theta_1$$

La soluzione dell'equazione trigonometrica lineare in seno e coseno passa attraverso la sostituzione del seno e del coseno con la tangente della metà dell'angolo:





$$\sin \theta_2 = \frac{2 \tan \frac{\theta_2}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_2}{2}}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta_2}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta_2}{2}}$$

date queste relazioni, ponendo la sostituzione:

$$y = \tan \frac{\theta_2}{2}$$

si ottiene:

$$\sin \theta_2 = \frac{2y}{1 + y^2}$$

$$\cos \theta_2 = \frac{1 - y^2}{1 + y^2}$$

Sostituendo le equazioni trovate nell'equazione trigonometrica lineare si ha:

$$2A_2y + B_2 - B_2y^2 + C_2 + C_2y^2 = 0$$

da cui raccogliendo si ha:

$$(-B_2 + C_2)y^2 + 2A_2y + B_2 + C_2 = 0$$

da cui si ricava finalmente il valore di y:

$$y = \tan \frac{\theta_2}{2} = f_2(\theta_1) = \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 + (-B_2 + C_2)^2}}{B_2 + C_2}$$

Riassumendo il procedimento, noto il valore di  $\theta_1$  si determinano quelli delle costanti  $A_2$ ,  $B_2$  e  $C_2$ , e da queste si risale al valore di  $\theta_2$ , in genere rappresentato da una coppia di valori.

Il procedimento seguito per eliminare  $\theta_3$  ha lo stesso senso fisico di quello utilizzato per eliminare  $\theta_2$  al passaggio precedente.

La posizione di B può quindi essere determinata, nelle sue componenti reale ed immaginaria, utilizzando le relazioni seguenti relazioni:

$$B_r = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = l_3 \cos \theta_3 + l_{4r}$$

$$B_i = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_3 \sin \theta_3 + l_{4i}$$

## Velocità di E





Possiamo ora ritenere nota la posizione di E al variare del valore dell'angolo  $\theta_1$  e possiamo affrontare lo studio della velocità per lo stesso; allo scopo ripartiamo dalla:

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} = l_3 e^{i\theta_3} + l_4 e^{i\theta_4}$$

e deriviamola rispetto al tempo:

$$i\dot{\theta}_1 l_1 e^{i\theta_1} + i\dot{\theta}_2 l_2 e^{i\theta_2} = i\dot{\theta}_3 l_3 e^{i\theta_3}$$

scomponendo l'equazione complessa nelle sue due componenti lungo l'asse reale e lungo quello immaginario e isolando a secondo membro i termini relativi alla velocità di A si ottiene:

$$\begin{aligned} -\dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2 + \dot{\theta}_3 l_3 \sin\theta_3 &= \dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 \\ -\dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 + \dot{\theta}_3 l_3 \cos\theta_3 &= \dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 \end{aligned}$$

Risolviendo le due relazione rispetto alle due velocità angolari che si intendono determinare in funzione di quella della manovella si ottiene:

$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_3 - \theta_1)}{l_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}$$

$$\dot{\theta}_3 = \frac{\dot{\theta}_1 l_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{l_3 \sin(\theta_2 - \theta_3)}$$

dalle quali siamo in grado di ricavare la velocità di ogni membro del quadrilatero attualmente considerato; si noti infatti che gli angoli sono tutti noti in quanto forniti dai dati ( $\theta_1$ ) o calcolati al passo precedente ( $\theta_2$  e  $\theta_3$ ). La velocità angolare della manovella è nota in quanto fornita dai dati del problema.

La velocità di E, nelle sue componenti lungo l'asse reale ed immaginario, può quindi essere calcolata utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Br} &= \dot{\theta}_1 l_1 \sin\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \sin\theta_2 = \dot{\theta}_3 l_3 \sin\theta_3 \\ \vec{v}_{Bi} &= \dot{\theta}_1 l_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_2 l_2 \cos\theta_2 = \dot{\theta}_3 l_3 \cos\theta_3 \end{aligned}$$

## Accelerazione di E

Possiamo ora ritenere nota la posizione e la velocità di E al variare del valore dell'angolo  $\theta_1$  e possiamo affrontare lo studio dell'accelerazione per lo stesso; allo scopo ripartiamo dalla relazione che esprime la velocità:

$$i\dot{\theta}_1 l_1 e^{i\theta_1} + i\dot{\theta}_2 l_2 e^{i\theta_2} = i\dot{\theta}_3 l_3 e^{i\theta_3}$$

e deriviamola rispetto al tempo, che è l'equivalente, termine a termine, della relazione vettoriale:

$$\vec{a}_{At} + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{BA_t} + \vec{a}_{BA_n} = \vec{a}_{Bt} + \vec{a}_{Bn}$$





scomponendo l'equazione complessa nelle sue due componenti reale ed immaginaria:

$$-\ddot{\theta}_1 l_1 \sin \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_1 - \ddot{\theta}_2 l_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 l_2 \sin \theta_2 = -\ddot{\theta}_3 l_3 \sin \theta_3 + \dot{\theta}_3^2 l_3 \sin \theta_3$$

$$\ddot{\theta}_1 l_1 \cos \theta_1 - \dot{\theta}_1^2 l_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_2 l_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l_2 \cos \theta_2 = \ddot{\theta}_3 l_3 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_3^2 l_3 \cos \theta_3$$

posso risolvere la relazione rispetto a  $\ddot{\theta}_2$  e a  $\ddot{\theta}_3$  in modo da ricavare l'accelerazione angolare delle due aste in funzione di quantità note:

Determinando le due accelerazioni si può determinare le due componenti dell'accelerazione di E utilizzando le due relazioni precedentemente ricavate.

## Quesito 2

Note le grandezze cinematiche per ottenere l'equazione del moto si utilizza il bilancio di potenza:

$$W_m - W_r = \frac{dE_c}{dt}$$

L'energia cinetica vale:

$$E_c = \frac{1}{2} M v_E^2 + \frac{1}{2} J \omega_E^2$$

$$v_E = l_3 \dot{\theta}_3$$

$$\omega_E = \dot{\theta}_3$$

Sostituendo,

$$\frac{dE_c}{dt} = M l_3^2 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 + J \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3$$

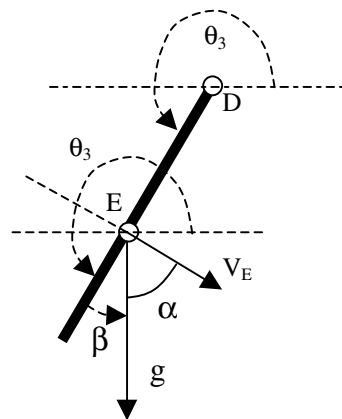
$$W_m = \vec{F} \cdot \vec{V} = F \cdot V$$

$$W_r = -M \vec{g} \cdot \vec{v}_E = +M g l_3 \dot{\theta}_3 \cos \alpha$$

$$\beta = 3 \frac{\pi}{2} - \vartheta_3$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta = \vartheta_3 - \pi$$

$$\cos(\vartheta_3 - \pi) = -\cos \vartheta_3$$



Si ottiene

$$F \cdot V + M g l_3 \dot{\theta}_3 \cos \theta_3 = M l_3^2 \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3 + J \dot{\theta}_3 \ddot{\theta}_3$$

La forza F esercitata dall'attuatore vale dunque

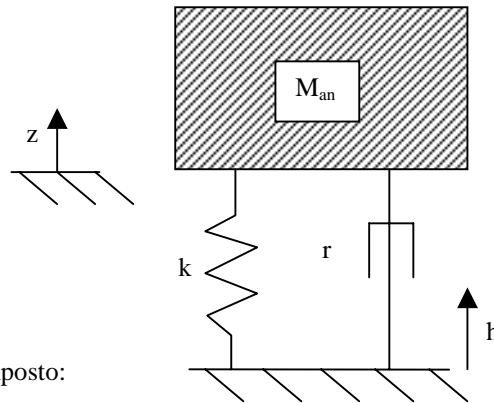




$$F = \frac{(Ml_3 + J)\dot{\theta}_3\ddot{\theta}_3 + Ml_3^2\dot{\theta}_3g \cos \theta_3}{V}$$

### Quesito 3

Il sistema può essere schematizzato come una massa con molla e smorzatore e spostamento di vincolo imposto.



Spostamento di vincolo imposto:

$$h(t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{L} Vt\right) = \text{Re}\left(A e^{i\frac{2\pi}{L} Vt}\right)$$

$$\dot{h}(t) = -A\left(\frac{2\pi}{L} V\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} Vt\right) = \text{Re}\left(A\left(\frac{2\pi}{L} V\right) i e^{i\frac{2\pi}{L} Vt}\right)$$

Per l'equilibrio dinamico si ha:

$$m\ddot{z} + r(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h) + mg = 0$$

$$m\ddot{z} + r\dot{z} + kz = r\dot{h} + kh - mg$$

La posizione di equilibrio statico è:

$$z_o = -\frac{mg}{k}$$

Indichiamo con  $\bar{z}$  lo spostamento rispetto alla posizione diequilibrio statico:

$$\bar{z} = z - z_o$$

$$z = \bar{z} + z_o$$

$$\dot{z} = \dot{\bar{z}}$$

$$\ddot{z} = \ddot{\bar{z}}$$







per cui l'equazione di equilibrio dinamico diventa:

$$m\ddot{\bar{z}} + r\dot{\bar{z}} + k\bar{z} + kz_o = r\dot{h} + kh$$

$$m\ddot{\bar{z}} + r\dot{\bar{z}} + k\bar{z} = r\dot{h} + kh = F_o e^{i\Omega t}$$

$$F_o = (k + r\Omega i) Y_o$$

$$|F_o| = Y_o \sqrt{k^2 + r^2 \Omega^2}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{r\Omega}{k}$$

$$\text{con } \Omega = \left( \frac{2\pi}{L} V \right)$$

Calcoliamo la soluzione a regime del sistema:

$$\bar{z}(t) = Z e^{i(\Omega t + \psi)}$$

$$\dot{\bar{z}}(t) = Zi\Omega e^{i(\Omega t + \psi)}$$

$$\ddot{\bar{z}}(t) = -Z\Omega^2 e^{i(\Omega t + \psi)}$$

Si ottiene:

$$|Z| = \frac{|F_o|}{\sqrt{(k - m\Omega(V)^2)^2 + r^2 \Omega(V)^2}}$$

$$\operatorname{tg}\Phi = -\frac{r\Omega(V)}{k - m\Omega(V)^2}$$

$$\bar{z} = |Z| e^{i(\Omega t + \psi + \Phi)}$$

La forza che si scarica a terra è data dall'espressione:

$$F_i = r(\dot{z} - \dot{h}) + k(z - h)$$

$$\text{con } z = \bar{z} + z_o$$

$$F_i = r(\dot{\bar{z}} - \dot{h}) + r(\bar{z} + z_o - h) = r(\dot{\bar{z}} - \dot{h}) + r(\bar{z} - h) + mg$$

La condizione limite di distacco si ha quando la forza trasmessa a terra si annulla:

$$F_i = r(\dot{\bar{z}} - \dot{h}) + k(\bar{z} - h) + mg = 0$$

Svolgiamo i calcoli nel caso di smorzamento nullo.





$$|Z| = \frac{kY_0}{(k - m\Omega^2)}$$

$$\operatorname{tg}\Phi = 0$$

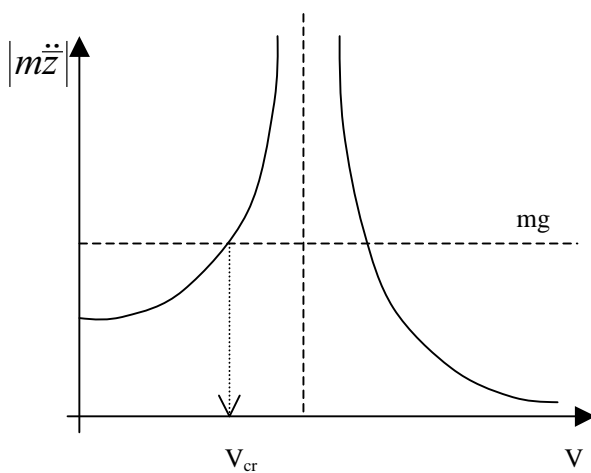
$$\bar{z} = |Z|e^{i\Omega t}$$

$$F_i = k(\bar{z} - h) + mg = 0$$

Da cui si ottiene:

$$\Omega = \sqrt{\frac{k(kY_0 + mg - 1)}{mkY_0 + m^2g}} = \frac{2\pi}{L}V$$

$$V = \frac{L}{2\pi} \sqrt{\frac{k(kY_0 + mg - 1)}{mkY_0 + m^2g}}$$



## Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali prof. A. Curami – Appello del 4 luglio 2001

Si consideri il carrello anteriore del velivolo ME-262 sotto raffigurato (Fig. 1) e, in base allo schema cinematico equivalente (Fig. 2), si determini:

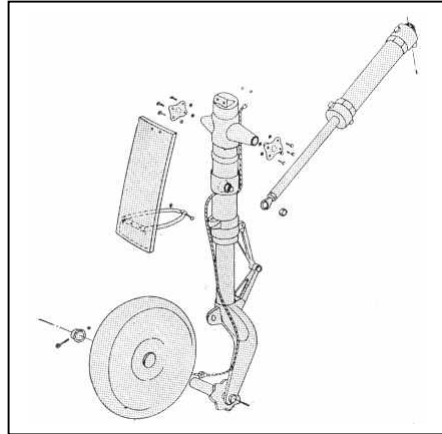


Fig. 1

**Quesito 1:** -la posizione, la velocità e l'accelerazione del mozzo della ruota anteriore (D in Fig. 2), rispetto al telaio considerato fisso, nella posizione di fig.2.. Si determini inoltre la velocità e l'accelerazione angolare della gamba del carrello AD. Si ipotizzi che:

- la geometria del sistema sia completamente nota;
- l'attuatore lineare BC si stia allungando con una velocità  $V_a$  costante;
- l'asta AD sia rigida.

Per la risoluzione si utilizzi **obbligatoriamente** il metodo dei numeri complessi (equazioni di chiusura).

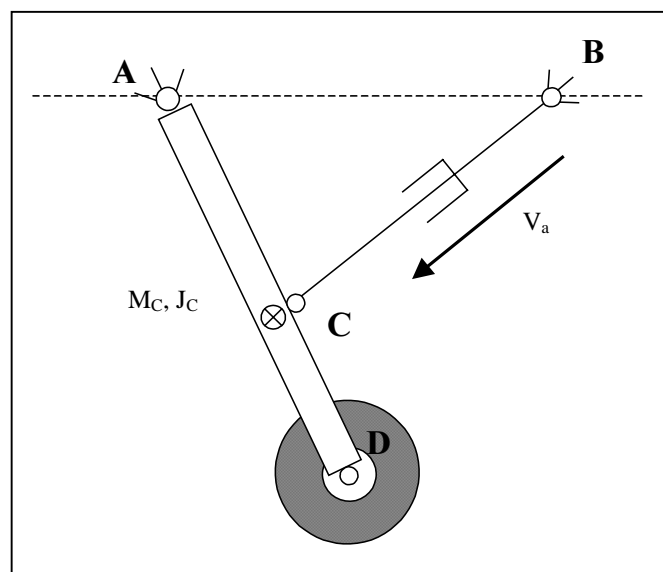


Fig. 2

**Quesito 2:** -la forza che l'attuatore deve imporre affinché il sistema rispetti i parametri sopra specificati, nella stessa configurazione del quesito precedente. A tal fine si ipotizzi che:

- le forze e le coppie aerodinamiche siano trascurabili;
- il carrello completo di ruota (AD in Fig. 2) abbia massa  $M$  e momento di inerzia  $J$  rispetto al baricentro  $C$ .
- l'attuatore lineare (BC in Fig. 2) abbia massa trascurabile;
- l'attrito nelle cerniere e nell'attuatore lineare siano nulli.

**Quesito 3:** dopo l'atterraggio il carrello si trovi nella configurazione illustrata in fig.3. Si studi il moto vibratorio del carrello a regime, a partire dalla configurazione di equilibrio statico in figura nota, ipotizzando che:

- si trascuri la rotazione della ruota attorno a D;
- l'attuatore abbia elasticità  $k$ , smorzamento  $r$  e massa trascurabile;
- al perno della ruota sia applicata una forzante armonica orizzontale  $F_H = F e^{i\Omega t}$ ;
- l'attrito nelle cerniere e nell'attuatore lineare siano nulli.

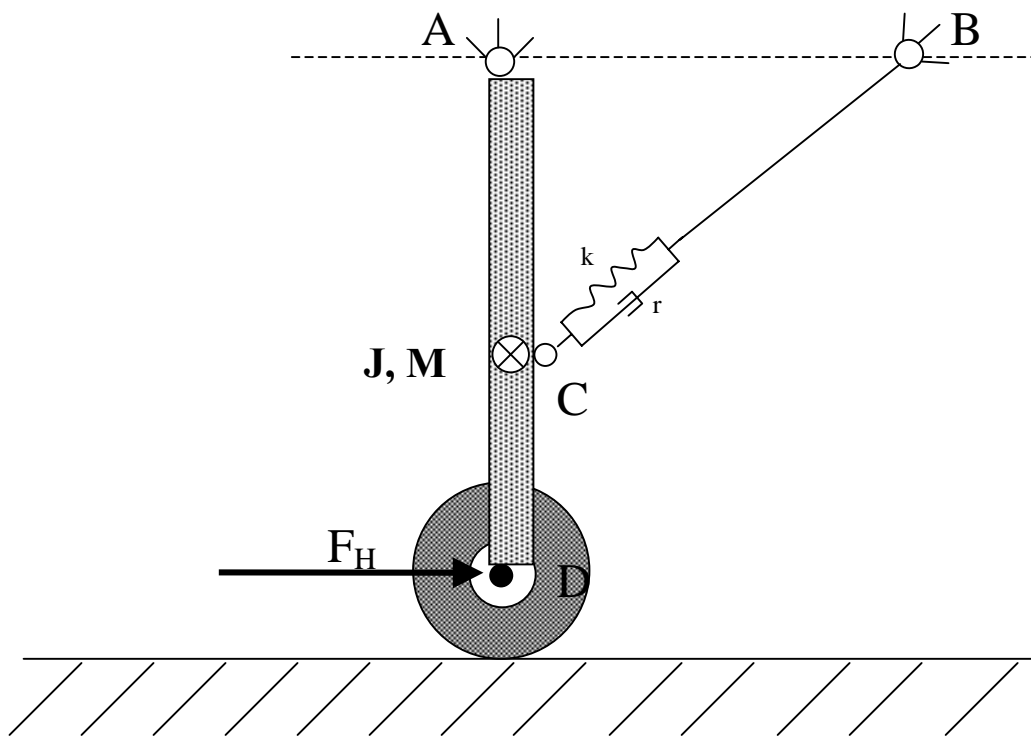


Fig. 3

**Domanda:**- Si descrivano i principi della lubrificazione idrodinamica naturale.



# Soluzioni con i numeri complessi

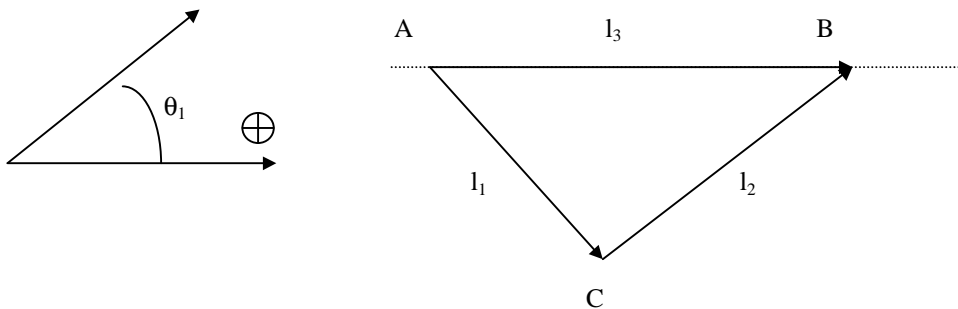
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali  
prof. A. Curami – Appello del 4 luglio 2001

## Quesito 1: Analisi del sistema

### Posizione di C

La cinematica di C va ricavata in funzione della posizione, della velocità e dell'accelerazione (angolari) dell'attuatore CB.

Consideriamo l'equivalente vettoriale del nostro meccanismo:



$$AC = l_1 e^{i\theta_1}$$

$$BC = l_2 e^{i\theta_2}$$

$$AB = l_3 e^{i\theta_3}$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$l_1 + l_2 = l_3$$

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 e^{i\vartheta_2} = l_3 e^{i\vartheta_3}$$

Scomponiamo l'equazione complessa in due equazioni scalari corrispondenti alle due proiezioni sull'asse reale e su quello immaginario:

$$l_1 \cos \vartheta_1 + l_2 \cos \vartheta_2 = l_3 \cos \vartheta_3$$

$$l_1 \sin \vartheta_1 + l_2 \sin \vartheta_2 = 0$$





Si tratta di un sistema non lineare di due equazioni nelle due incognite  $\theta_1$  e  $\theta_2$ . Si noti che una volta noto il valore di  $l_2$  sarà semplice risalire a quello di  $\theta_1$  e di  $\theta_2$ .

Questo significa che dovremo individuare le relazioni sotto riportate:

$$\vartheta_1 = f(l_2)$$

$$\vartheta_2 = f(l_2)$$

Si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \vartheta_1 = \arccos\left(\frac{l_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_3}\right) \\ \vartheta_2 = \arccos\left(\frac{l_3}{l_2} - \frac{l_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_2l_3}\right) \end{array} \right.$$

## Velocità di C

La determinazione della velocità di C passa attraverso la derivazione dell'equazione di chiusura vettoriale. Derivando l'espressione si ottiene:

$$l_1 i \dot{\vartheta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 i \dot{\vartheta}_2 e^{i\vartheta_2} + l_2 e^{i\vartheta_2} = 0$$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:

$$l_1 \dot{\vartheta}_1 \cos(\vartheta_1 + 90) + l_2 \dot{\vartheta}_2 \cos(\vartheta_2 + 90) + l_2 \cos(\theta_2) = 0$$

$$l_1 \dot{\vartheta}_1 \sin(\vartheta_1 + 90) + l_2 \dot{\vartheta}_2 \sin(\vartheta_2 + 90) + l_2 \sin(\theta_2) = 0$$

con  $l_2 = V$ .

da cui è possibile ricavare il legame non lineare fra le velocità angolari di AC e BC in funzione della velocità V dell'attuatore e delle posizioni angolari  $\theta_1$  e di  $\theta_2$  funzioni di V.

$$\dot{\vartheta}_1 = f(V, l_2)$$

$$\dot{\vartheta}_2 = f(V, l_2)$$

Si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\vartheta}_1 = \left( \frac{l_2 V}{l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \right) \\ \dot{\vartheta}_2 = \left( \frac{-l_1 V \cos(\theta_1 - \theta_2)}{l_1 l_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)} \right) \end{array} \right.$$





## Accelerazione di C

La determinazione della accelerazione di C si ottiene derivando l'equazione di chiusura delle velocità. Derivando si ottiene:

$$-l_1\dot{\vartheta}_1^2 e^{i\vartheta_1} + l_1\ddot{\vartheta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 i \dot{\vartheta}_2 e^{i\vartheta_2} + l_2 i \dot{\vartheta}_2 e^{i\vartheta_4} + l_2 i \ddot{\vartheta}_2 e^{i\vartheta_2} - l_2 \dot{\vartheta}_2^2 e^{i\vartheta_2} = 0$$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:

$$-l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \cos(\theta_1) + l_1 \ddot{\vartheta}_1 \cos(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) + 2V \dot{\vartheta}_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) + l_2 \ddot{\vartheta}_2 \cos(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) - l_2 \dot{\vartheta}_2^2 \cos(\theta_2) = 0$$

$$-l_1 \dot{\vartheta}_1^2 \sin(\theta_1) + l_1 \ddot{\vartheta}_1 \sin(\theta_1 + \frac{\pi}{2}) + 2V \dot{\vartheta}_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) + l_2 \ddot{\vartheta}_2 \sin(\theta_2 + \frac{\pi}{2}) - l_2 \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\theta_2) = 0$$

da cui è possibile ricavare il legame non lineare fra le accelerazioni angolari di AC e BC:

$$\ddot{\vartheta}_1 = f(V)$$

$$\ddot{\vartheta}_4 = f(V)$$

Si ottiene

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{\vartheta}_1 = \left( \frac{l_2^2 \dot{\vartheta}_2^2 + l_2 l \dot{\vartheta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \right) \\ \ddot{\vartheta}_2 = - \left( \frac{l_1^2 \dot{\vartheta}_1^2 + l_2 l_1 \dot{\vartheta}_2^2 \cos(\theta_2 - \theta_1) + 2l_1 V \dot{\vartheta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{l_1 l_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \right) \end{array} \right.$$

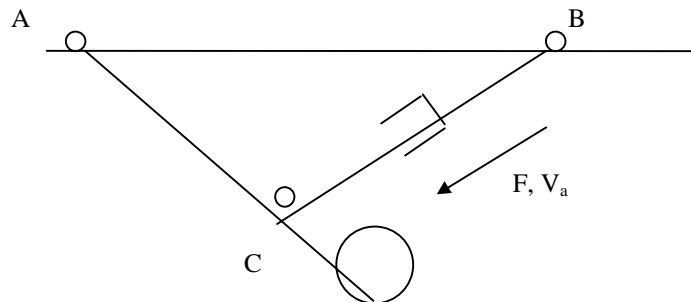




## Quesito 2

Note le grandezze cinematiche per ottenere l'equazione del moto si utilizza il bilancio di potenza:

$$W_m - W_r = \frac{dE_c}{dt}$$



Si ha :

$$W_m - W_r = \frac{dE_c}{dt}$$

$$V_c = l \dot{\theta}_1$$

$$\omega = \dot{\theta}_1$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} M l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2$$

$$\frac{dE_c}{dt} = (M l_1^2 + J) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1$$

$$W_m = \vec{F} \times \vec{V}_a$$

$$W_r = -M \vec{g} \times \vec{V}_c$$

per cui

$$(M l_1^2 + J) \dot{\theta}_1 \ddot{\theta}_1 = \vec{F} \times \vec{V}_a + M \vec{g} \times \vec{V}_c$$

da cui si ricava F.





**Quesito 3**

Il sistema a un grado di libertà si trova nella configurazione di equilibrio indicata in (Fig. 3) con  $\theta_{1,0}=270^\circ$ . Scriviamo l'equazione di Lagrange e le grandezze energetiche a partire dalla configurazione di equilibrio. Prendiamo come coordinata libera l'angolo del carrello  $\theta_1$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$$

$$E_c = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} M l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + Mg \Delta h$$

$$D = \frac{1}{2} r \Delta i^2$$

$$\partial L = Q \partial \theta_1 = F l_1 \cos(\theta_1 - 270) \cdot \partial \theta_1$$

$$Q = \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = F l_1 \cos(\theta_1 - 270)$$

con

$$\Delta l = (l_2 - l_{20}) = \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos \vartheta_1} - l_{20}$$

$$\Delta i = - \frac{2l_1 l_2 \sin(\vartheta_1)}{\sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos \vartheta_1}}$$

$$\Delta h = l_1 (1 + \sin \theta_1)$$

Sostituendo:

$$E_c = \frac{1}{2} M l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} (M l_1^2 + J) \dot{\theta}_1^2$$

$$V = \frac{1}{2} k \left( \sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos \vartheta_1} - l_{20} \right)^2 + M g l_1 (1 - \sin \theta_1)$$

$$D = \frac{1}{2} r \left( - \frac{2l_1 l_2 \sin \vartheta_1}{2\sqrt{l_2^2 + l_3^2 + 2l_1 l_2 \cos \vartheta_1}} \vartheta_1 \right)^2$$

Volendo linearizzare l'equazione del moto attorno alla configurazione di equilibrio, sviluppiamo l'energia potenziale e la funzione dissipativa in serie di Taylor arrendandoci al secondo ordine. Si ricorda che gli unici termini che rimangono





sono quelli del secondo ordine. In tal modo l'energia potenziale è un forma quadratica e da origine a termini lineari nell'intorno della configurazione di equilibrio.

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta_1^2} \right|_{270^\circ} = k \left[ \left( \frac{2l_1 l_3}{2\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2 + \left( \sqrt{l_1^2 + l_3^2} - l_{2o} \right) \frac{4l_1^2 l_3^2}{(l_1^2 + l_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

$$\left. \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\vartheta}_1^2} \right|_{270^\circ} = r \left( \frac{l_1 l_3 \sin \theta_1}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2 + 2l_1 l_3 \cos \theta_1}} \right) \Big|_{270^\circ} = r \left( \frac{l_1 l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2$$

Per cui, applichiamo il cambio di variabili:

$$\theta = \theta_1 - 270^\circ$$

$$\dot{\theta} = \dot{\theta}_1$$

$$\ddot{\theta} = \ddot{\theta}_1$$

si ottiene:

$$E_c = \frac{1}{2} (M l_1^2 + J) \dot{\theta}^2$$

$$V \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta_1^2} (\vartheta_1 - 270^\circ)^2 = 1/2 \left\{ k \left[ \left( \frac{2l_1 l_3}{2\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2 + \left( \sqrt{l_1^2 + l_3^2} - l_{2o} \right) \frac{4l_1^2 l_3^2}{(l_1^2 + l_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + mgl_1 \right\} \theta^2$$

$$D \cong \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\vartheta}_1^2} \dot{\vartheta}^2 = \frac{1}{2} r \left( \frac{l_1 l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2 \dot{\vartheta}^2$$

$$Q = Fl_1 \cos \theta \cong Fl_1$$

Applichiamo le equazioni di Lagrange:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q$$

si ottiene:

$$\left( M l_1^2 + \frac{1}{2} J \right) \ddot{\theta} + r \left( \frac{l_1 l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right) \dot{\theta} + \left\{ k \left[ \left( \frac{2l_1 l_3}{2\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2 + \left( \sqrt{l_1^2 + l_3^2} - l_{2o} \right) \frac{4l_1^2 l_3^2}{(l_1^2 + l_3^2)^{\frac{3}{2}}} \right] + mgl_1 \right\} \theta = l_1 F e^{i\Omega t}$$

Chiamiamo:





$$m_i = (Ml_1^2 + J)$$

$$r_i = r \left( \frac{l_1 l_3}{\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)$$

$$k_i = k \left[ \left( \frac{2l_1 l_3}{2\sqrt{l_1^2 + l_3^2}} \right)^2 + \left( \sqrt{l_1^2 + l_3^2} - l_{2o} \right) \frac{4l_1^2 l_3^2}{(l_1^2 + l_3^2)^{3/2}} \right] + mgl_1$$

$$F_o = l_1 F$$

Lequazione diventa:

$$m_i \ddot{\theta} + r_i \dot{\theta} + k_i \theta = F_o e^{i\Omega t}$$

Calcoliamo la soluzione a regime del sistema:

$$\theta(t) = \Theta e^{i\Omega t}$$

$$\dot{\theta}(t) = \Theta i \Omega e^{i\Omega t}$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\Theta \Omega^2 e^{i\Omega t}$$

sostituendo si ottiene:

$$|\Theta| = \frac{|F_o|}{\sqrt{(k_i - m_i \Omega^2)^2 + r_i^2 \Omega^2}}$$

$$tg \Phi = -\frac{r_i \Omega}{k_i - m_i \Omega^2}$$

$$\theta = |\Theta| e^{i(\Omega t + \Phi)}$$



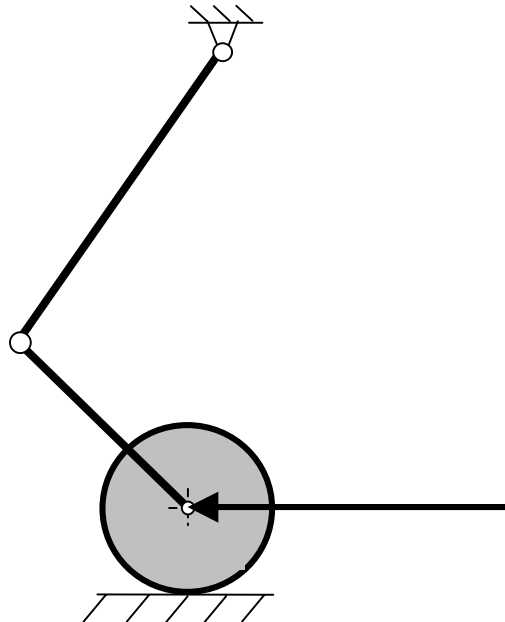


Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali  
prof. A. Curami - Appello del 17 luglio 2001

**Quesito 1:** Dato il meccanismo piano sotto raffigurato di cui sono note:

- la geometria (lunghezze delle aste e raggio del rullo);
- la legge del moto dell'asta AB (posizione angolare, velocità angolare e accelerazione angolare in ogni istante);

si determini, utilizzando obbligatoriamente il metodo dei numeri complessi, la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto D.



**Quesito 2:** Determinare per la posizione in figura la forza  $F$  sopra raffigurata applicata in D necessaria per imporre la legge di moto di cui al quesito precedente.

Allo scopo si considerino note la massa  $M$  ed il momento di inerzia baricentrico  $J$  del disco e si supponga che quest'ultimo rotoli senza strisciare.

**Quesito 3:** Dato il sistema sotto raffigurato si richiede di:

- scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
- linearizzare le stesse attorno alla posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema;

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- gli attriti siano trascurabili;

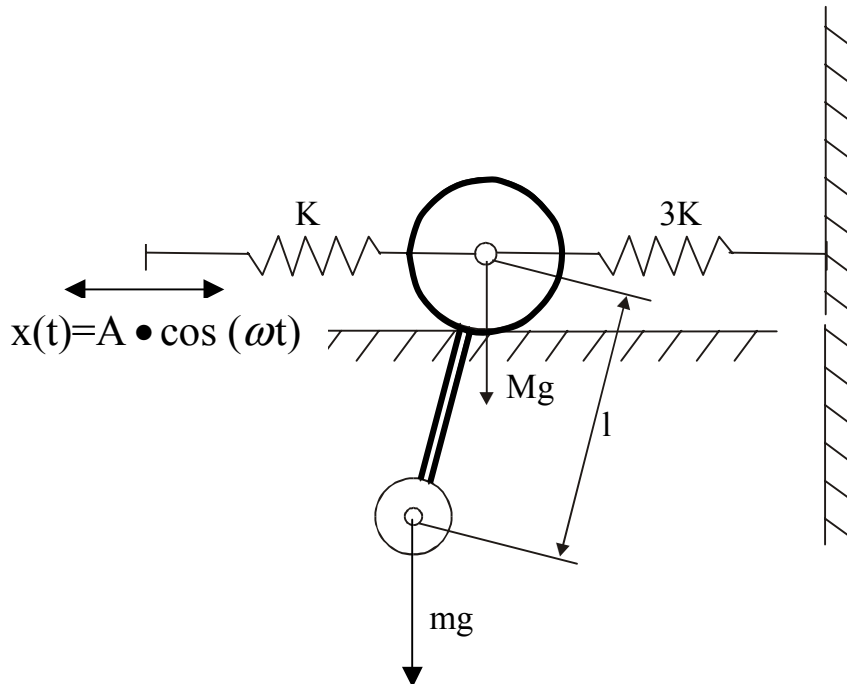


## Soluzione del tema d'esame del 17 luglio 2001

- la geometria del sistema (angoli e lunghezze) sia completamente nota; in particolare si consideri che il pendolo abbia lunghezza  $l$ .

Si ritengano, inoltre, note:

- la massa, il momento di inerzia baricentrico e il raggio del disco superiore ( $M, J, R$ );
- la massa del disco inferiore considerato puntiforme ( $m$ );
- la lunghezza  $l$  del pendolo di massa trascurabile;
- la costanti elastiche delle molle;



- la legge dello spostamento armonico del vincolo sinistro.

**Domanda** - Si parli delle trasmissioni ad ingranaggi e, considerando il proporzionamento modulare, si approfondisca l'argomento del minimo numero di denti e delle tecniche di ribassamento e correzione.





### Quesito 1

#### Introduzione generale

I numeri complessi sono utilizzati per rappresentare in coordinate polari (modulo e fase) i vettori piani:

$$\vec{l} = 5e^{i30}$$

identifica ad esempio un vettore di modulo pari a 5 unità di lunghezza con un angolo di fase rispetto all'asse preso come origine degli angoli pari a  $30^\circ$ .

I meccanismi piani che abbiamo finora trattato possono essere compiutamente descritti dal punto di vista cinematica identificando il comportamento di alcuni punti notevoli dai quali è possibile derivare il comportamento di tutto il sistema. Si immagini di ridurre il sistema proposto ad un meccanismo cinematicamente equivalente (spesso coincidente con quello dato) costituito solo da aste rigide che collegano tra loro in modo opportuno i punti notevoli individuati. Il meccanismo ottenuto sarà semplicemente descrivibile con dei vettori (e quindi con dei numeri complessi) per cui sarà possibile scrivere per lo stesso l'equazione di chiusura vettoriale. Scritta tale equazione il meccanismo potrà dirsi risolto una volta che da questa avremo ottenuto, in funzione in questo caso della posizione della manovella, la posizione delle altre aste. Per quanto riguarda la velocità e l'accelerazione queste potranno essere ricavate derivando una o due volte l'equazione di chiusura.

#### Analisi del sistema

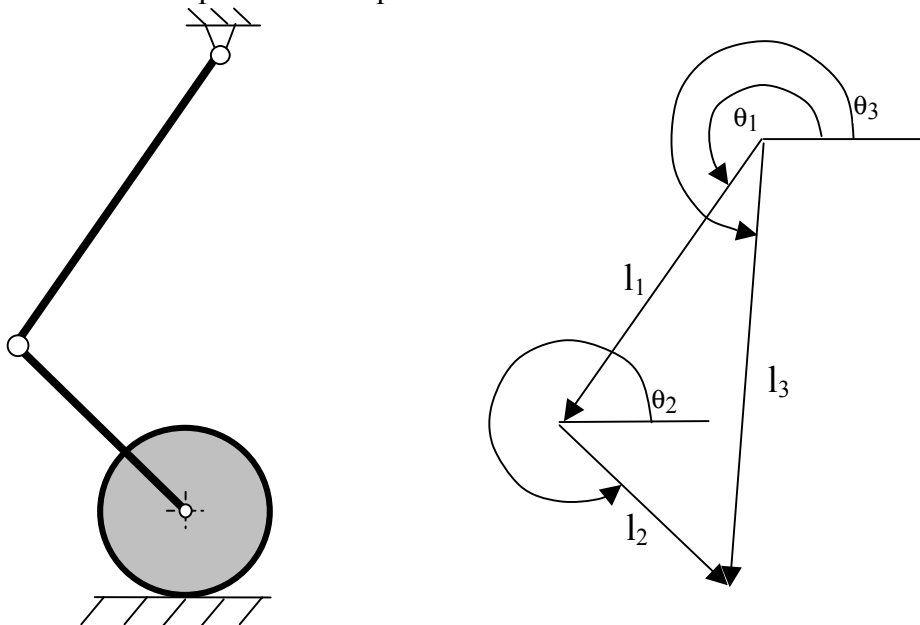
**Determiniamo i gradi di libertà complessivi del sistema; esso è formato da tre corpi rigidi (aste AB e BD e disco) per un totale di nove gradi di libertà e da quattro cerniere (di cui tre rotoidali e una prismatica) che eliminano 8 gradi di libertà. Questo computo dei gradi di libertà sottintende che il disco rimanga a contatto con il piano e rotoli senza strisciare in quanto in mancanza di tale ipotesi (quindi nell'ipotesi che il disco rotoli e strisci) il sistema sarebbe a due e non più ad un singolo grado di libertà.**

**Si sottolinea come ai fini della determinazione della cinematica di D non abbia nessuna influenza il tipo di rotolamento del disco; volendo invece determinare la cinematica del disco diventa di fondamentale importanza l'ipotesi che il disco rotoli senza strisciare in quanto in caso contrario si perderebbe il legame tra la cinematica di D e quella del disco.**



Sistema vettoriale equivalente

Dato il sistema di partenza (a sinistra) è facile derivare il sistema vettoriale equivalente (a destra) che permette di calcolare la posizione del punto richiesto:



Mentre si passa dal meccanismo al suo equivalente vettoriale si deve prestare particolare attenzione al verso dei vettori. Questi hanno fase nulla quando sono orizzontali con verso verso destra e mantengono tale verso ruotando in senso antiorario (fase positiva) o orario (fase negativa).

Si sottolinea che lo schema equivalente vettoriale è tale solo nel momento in cui si imponga che il punto D si muova in orizzontale (parallelamente al piano di scorrimento del disco) e che tale vincolo viene introdotto sul terzo vettore. Questo significa che il terzo vettore modificherà durante il movimento sia il suo modulo che la sua fase; l'alternativa è di sostituire tale vettore con altri due, corrispondenti alle sue componenti lungo l'asse reale (variabile solo in lunghezza in quanto la sua fase si presenta sempre orizzontale) e immaginario (costante). Chiameremo nel seguito  $l_r$  ed  $l_i$  queste due componenti la cui somma dà  $l_3$ .

**Posizione di D**

La cinematica di D va ricavata in funzione della posizione, della velocità e dell'accelerazione (angolari) della manovella AB, tutte quantità fornite dai dati del problema.

Consideriamo l'equivalente vettoriale del nostro meccanismo:

$$AB = \vec{l}_1$$

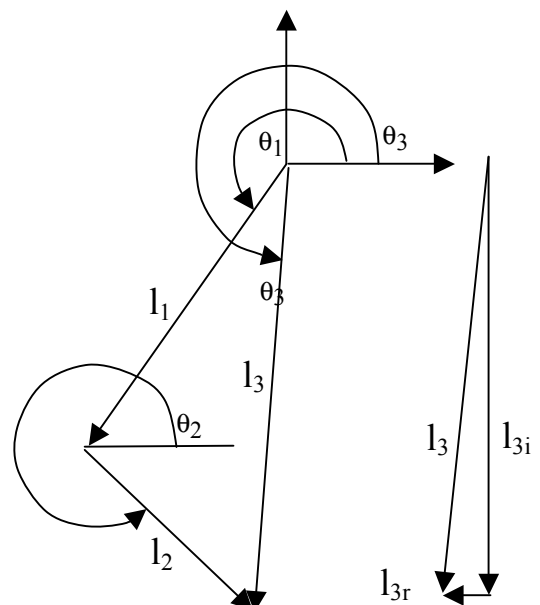
$$BD = \vec{l}_2$$

$$AD = \vec{l}_3$$

Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_3$$

che, passando ai numeri complessi, sarà espressa da:





$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 = \bar{l}_3$$

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 e^{i\vartheta_2} = l_3 e^{i\vartheta_3}$$

Scomponendo il vettore  $l_3$  nelle sue due componenti secondo l'asse reale e l'asse immaginario si ha:

$$l_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 e^{i\vartheta_2} = l_{3r} e^{i180} + l_{3i} e^{i270}$$

Si consideri che gli angoli sono presi positivi in verso antiorario a partire dall'asse reale (o da una semiretta equiverosa) ed esprimono l'orientazione delle aste del meccanismo come raffigurato nel disegno.

Analizzando l'equazione complessa si può vedere come il terzo vettore sia in realtà rappresentato da un vettore orizzontale (diretto come l'asse reale) il cui modulo è variabile nel tempo mentre il quarto rappresenta un vettore costante sia in modulo che in fase (diretto come l'asse immaginario); quanto affermato è la conseguenza del fatto che la cerniera D è vincolata a muoversi parallelamente al piano dalla presenza del disco.

Note le caratteristiche geometriche del sistema, essendo quest'ultimo ad un grado di libertà, la sua configurazione sarà completamente individuata dal valore di uno dei tre angoli utilizzato per descriverlo; nel seguito supporremo di utilizzare come variabile indipendente l'angolo di fase  $\theta_1$  in quanto direttamente noto dai dati del problema.

Si tratterà quindi di esprimere in funzione di  $\theta_1$  i valori dell'angolo  $\theta_2$  e della lunghezza  $l_{3r}$ ; per completare l'operazione abbiamo a disposizione una equazione complessa nel piano, equivalente a due equazioni scalari.

Scomponiamo l'equazione complessa in due equazioni scalari corrispondenti alle due proiezioni sull'asse reale e su quello immaginario:

$$l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 = l_{3r}$$

$$l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 = l_{3i}$$

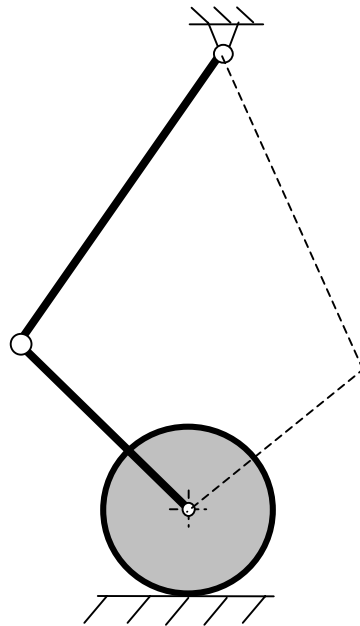
Si tratta di un sistema non lineare di due equazioni nelle due incognite  $\theta_2$  e  $l_{3r}$ . Si noti che una volta noto il valore di  $l_{3r}$  sarà semplice risalire a quello di  $l_3$  e di  $\theta_3$ .

Questo significa che dovremo individuare le relazioni sottoriportate:

$$\theta_2 = f_1(\theta_1)$$

$$l_{3r} = f_2(\theta_1)$$





Si sottolinea fin d'ora che tale corrispondenza potrebbe non essere univoca; infatti si pensi alla duplicità di soluzioni associate alle due configurazioni speculari del meccanismo che permettono di ottenere una identica posizione di D a fronte di due diverse posizioni di B.

Tornando alle nostre due equazioni scalari, cominciamo con il ricercare il legame tra  $\theta_2$  e  $\theta_1$  utilizzando allo scopo la seconda relazione scalare:

$$l_2 \sin \theta_2 = l_{3i} - l_1 \sin \theta_1$$

$$\sin \theta_2 = \frac{l_{3i} - l_1 \sin \theta_1}{l_2}$$

$$\theta_2 = \arcsen\left(\frac{l_{3i} - l_1 \sin \theta_1}{l_2}\right)$$

Sostituendo il valore di  $\theta_2$  così determinato nella prima relazione si ricava il valore di  $l_{3r}$ :

$$l_{3r} = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2$$

rispondendo in tal modo al quesito relativo alla posizione della cerniera D:

$$D \equiv (l_{3r}, l_{3i})$$



## Velocità di D

La determinazione della velocità di D passa attraverso la derivazione dell'equazione di chiusura vettoriale; si ricordi durante la derivazione che i moduli dei primi due vettori sono costanti nel tempo in quanto sono in corrispondenza con le lunghezze delle aste AB e BD. Per quanto riguarda il secondo membro, prodotto di due termini variabili nel tempo, conviene scomporlo lungo i due assi coordinati. Derivando l'espressione si ottiene:

$$l_1 i \dot{\theta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 i \dot{\theta}_2 e^{i\vartheta_2} = \dot{l}_{3r}$$

L'equazione sopra riportata mostra una corrispondenza membro a membro con la:

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{DB} = \vec{v}_D$$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:

$$-l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = \dot{l}_{3r}$$

$$l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 = 0$$

dalla seconda è possibile ricavare la velocità angolare della seconda asta:

$$\dot{\theta}_2 = -\left(\frac{l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1}{l_2 \cos \theta_2}\right)$$

e quindi la velocità di allungamento di  $l_{3r}$ :

$$\dot{l}_{3r} = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

che è poi la velocità cercata del punto D.

## Accelerazione di D

La determinazione della accelerazione di D si ottiene derivando l'equazione di chiusura delle velocità; si ricordi che i moduli dei primi due vettori sono costanti nel tempo in quanto sono in corrispondenza con le lunghezze delle aste AB e BD. Per quanto riguarda il secondo membro, prodotto di due termini variabili nel tempo, conviene scomporlo lungo i due assi coordinati.

L'espressione delle velocità è data da:

$$l_1 i \dot{\theta}_1 e^{i\vartheta_1} + l_2 i \dot{\theta}_2 e^{i\vartheta_2} = \dot{l}_{3r}$$

Derivandola opportunamente si ottiene:

$$i l_1 \ddot{\theta}_1 e^{i\vartheta_1} - l_1 \dot{\theta}_1^2 e^{i\vartheta_1} + i l_2 \ddot{\theta}_2 e^{i\vartheta_2} - l_2 \dot{\theta}_2^2 e^{i\vartheta_2} = \ddot{l}_{3r}$$

L'equazione sopra riportata mostra una corrispondenza membro a membro con la più nota relazione che trascrive sotto forma vettoriale il teorema di Rivals:



$$\vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt} + \vec{a}_{DBn} + \vec{a}_{DBt} = \vec{a}_D$$

Scomponendo l'equazione lungo l'asse reale e quello immaginario si ottiene:

$$\begin{aligned} -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 - l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2 &= \ddot{i}_{3r} \\ l_1\dot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2 &= 0 \end{aligned}$$

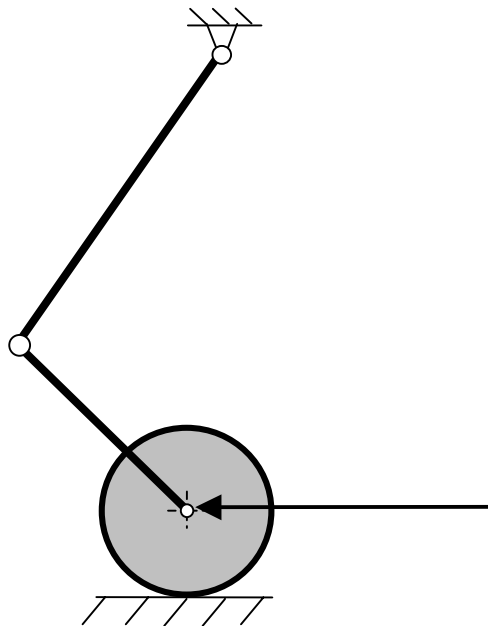
dalla seconda equazione è possibile ricavare la accelerazione angolare della seconda asta:

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{-l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1^2 \sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2^2 \sin\theta_2}{l_2 \cos\theta_2}$$

e, nota questa, l'accelerazione lineare del punto D:

$$\ddot{i}_{3r} = -l_1\ddot{\theta}_1 \sin\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 - l_2\ddot{\theta}_2 \sin\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2$$

## Quesito 2



Non essendoci per ipotesi nel sistema attriti dissipativi è possibile utilizzare il teorema delle potenze trascurando quelle perse:

$$W_m - W_r = \frac{dE_{cin}}{dt}$$

Determiniamo il valore assunto dai singoli termini:



### Potenza motrice:

$$W_m = \vec{F} \times \vec{V}_D$$

dove  $F$  è l'incognita da calcolare mentre  $V_D$  (velocità di del punto  $D$ ) è stata determinata precedentemente. La direzione è orizzontale ed il modulo vale:

$$V_D = \dot{l}_{3r} = -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2$$

### Potenza resistente:

$$W_r = 0$$

### Variazione dell'energia cinetica

In questo termine compariranno soltanto gli elementi del sistema dotati di massa e quindi solo il disco. Ricordando che l'energia cinetica ha una componente traslazionale ed una rotazionale sarà più semplice esprimerne la variazione:

$$dE_{cin}/dt = M_1 \vec{A}_D \times \vec{V}_D + J_1 \vec{\omega} \times \vec{\omega}$$

Dove  $\omega = \frac{V_D}{R}$  e  $\dot{\omega} = \frac{A_D}{R}$

A questo punto, nel bilancio energetico, rimane come unica incognita la forza  $\vec{F}$  generata dall'attuatore che può quindi essere determinata.

### Quesito 3

#### Es. 2: Analisi del sistema

Il sistema si presenta a tre gradi di libertà anche se la posizione del vincolo è data da una legge imposta:

- $\theta$  rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
- $\varphi$  rotazione assoluta del pendolo (positiva se oraria);
- $y$  spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra);



si ipotizza che tutte le coordinate sopra riportate hanno valore nullo nella configurazione in cui tutte le molle del sistema non presentino deformazione. In particolare in corrispondenza alle due coordinate angolari nulle si immagina che la lunghezza delle due molle coincida con la loro lunghezza indeformata mentre la posizione del pendolo sia verticale.

**Energia cinetica del sistema**

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del disco e di quella del pendolo, nelle componenti dovute alla rotazione ed alla traslazione. Si indichi con  $l$  la lunghezza del pendolo.

Energia cinetica del disco:

$$E_{c-d} = \frac{1}{2} M V_d^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Dove  $V_d$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del disco che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_d = R \dot{\theta}$$

Energia cinetica del pendolo:

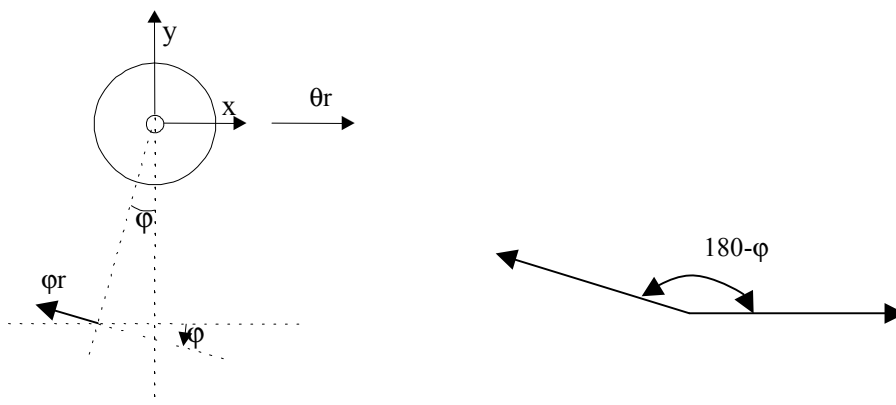
$$E_{c-p} = \frac{1}{2} m V_p^2$$

Dove  $V_p$  rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo. Immaginando di posizionare nel baricentro del disco una terna traslante solidalmente con esso, tale velocità può essere pensata come la somma di una componente di trascinamento (velocità del baricentro del disco e quindi della terna sopra definita) e di una relativa (oscillazione del pendolo rispetto alla terna sopra definita).

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{trasc} + \vec{V}_{rel}$$

Dal disegno del sistema risulta chiaro che la velocità di trascinamento è orizzontale diretta verso destra mentre quella relativa è diretta verso sinistra con un angolo rispetto all'orizzontale pari a  $180-\varphi$ .

La massa  $m$  concentrata all'estremità inferiore del pendolo è puntiforme e quindi priva di momento di inerzia; questo significa fare coincidere l'energia cinetica con la sua componente legata alla traslazione.





Il quadrato della velocità assoluta può essere ottenuto come somma dei quadrati della velocità orizzontale e di quella verticale.

Velocità orizzontale:

$$V_o = V_{trasc\_o} + V_{rel\_o} = R\dot{\theta} + l \cos(180 - \varphi)\dot{\varphi} = R\dot{\theta} - l \cos \varphi \dot{\varphi}$$

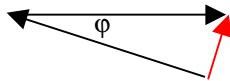
Velocità verticale:

$$V_v = V_{rel\_v} = l \sin(180 - \varphi)\dot{\varphi} = l \sin \varphi \dot{\varphi}$$

Il quadrato della velocità assoluta sarà quindi dato da:

$$\begin{aligned} V_p &= (V_{trasc\_o} + V_{rel\_o})^2 + (V_{rel\_o})^2 = \\ &= (R\dot{\theta} - l \cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (l \sin \varphi \dot{\varphi})^2 = \\ &= R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 - 2Rl \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} + l^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \\ &= R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2Rl \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi} \end{aligned}$$

Si noti come allo stesso risultato si sarebbe arrivato utilizzando il teorema di Carnot o teorema del coseno, che poi non è altro che la legge di composizione delle velocità:



$$V_p = R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2(R\dot{\theta})(l\dot{\varphi}) \cos \varphi$$

In definitiva l'energia cinetica associato alla massa m è quindi data da:

$$E_{c-p} = \frac{1}{2} m (R^2 \dot{\theta}^2 + l^2 \dot{\varphi}^2 - 2Rl \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi})$$

L'energia cinetica complessiva del sistema risulta quindi essere:

$$E_c = \frac{1}{2} (M + m) (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - m R l \cos \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

### Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro del pendolo conseguente alla sua oscillazione) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle due molle):

Energia potenziale elastica:

$$E_{pE} = \frac{1}{2} K (R\theta - x)^2 + \frac{1}{2} (3K) (-R\theta)^2 \quad \text{A.A. 2000-2001}$$



Energia potenziale gravitazionale:

$$E_{pG} = mgl(1 - \cos \varphi)$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}K(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}(3K)(-R\theta)^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{2}K(R^2\theta^2 - 2Rx\vartheta + x^2) + \frac{3}{2}KR^2\theta^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \\ &= 2KR^2\theta^2 + \frac{1}{2}K(x^2 - 2Rx\vartheta) + mgl(1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$

### Equazioni di equilibrio non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (M + m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} \right) = (M + m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl(\sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$((M + m)R^2 + J)\ddot{\theta} + mRl(\sin \varphi \dot{\varphi}^2 - \cos \varphi \ddot{\varphi}) + 4KR^2\theta - KRx = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$



$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} - mRl \cos \varphi \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} \right) = ml^2 \ddot{\varphi} + mRl \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} - mRl \cos \varphi \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = mRl \sin \varphi \dot{\theta} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$\begin{aligned} ml^2 \ddot{\varphi} + mRl \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} - mRl \cos \varphi \ddot{\theta} - mRl \sin \varphi \dot{\varphi} \dot{\theta} + mgl \sin \varphi &= \\ = ml^2 \ddot{\varphi} - mRl \cos \varphi \ddot{\theta} + mgl \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

### Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze (scritte nell'ipotesi che il vincolo mobile sia fermo alla coordinata  $x=0$ ):

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2 \theta$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\theta = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} > 0$$





$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \vartheta \partial \varphi} \right|_{0,0} \right)^2 > 0$$

Le derivate necessarie sono:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} = mgl \cos \varphi$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0} = 0$$

da cui:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} = mgl$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \vartheta^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} - \left( \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0} \right)^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

### Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(\alpha, \beta) \cong E_p|_{0,0} + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \alpha} \right|_{0,0} \alpha + \left. \frac{\partial E_p}{\partial \beta} \right|_{0,0} \beta + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2} \right|_{0,0} \frac{\alpha^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2} \right|_{0,0} \frac{\beta^2}{2} + \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta} \right|_{0,0} \alpha \beta$$

Dei termini in questione:



- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} = mgl$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2} [4KR^2] \theta^2 + \frac{1}{2} [mgl] \varphi^2$$

Alla quale aggiungiamo ora il termine contenente la dipendenza dallo spostamento del vincolo, già lineare in partenza:

$$E_p = \frac{1}{2} 4KR^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K(x^2 - 2Rx\vartheta) + \frac{1}{2} mgl \varphi^2$$

### Linearizzazione dell'energia cinetica

Nell'esercizio proposto l'energia cinetica non necessita di linearizzazione. Ci limitiamo ad indicare il processo che sarebbe stato applicato in presenza di non linearità nella stessa.

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^2 \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^2 \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nell'esercizio l'espressione dell'energia cinetica risulta è:



$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mRl \cos\varphi\dot{\theta}\dot{\phi}$$

per cui l'energia cinetica linearizzata sarà data da:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 - mRl\dot{\theta}\dot{\phi}$$

### Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzati si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$\left((M+m)R^2 + J\right)\ddot{\theta} + mRl\ddot{\phi} + 4KR^2\theta - KRx = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial E_c}{\partial \phi} + \frac{\partial E_p}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}} = ml^2\dot{\phi} - mRl\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\phi}}\right) = ml^2\ddot{\phi} - mRl\ddot{\theta}$$



$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mgl\varphi$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$ml^2\ddot{\varphi} - mRl\ddot{\theta} + mgl\varphi = 0$$

In termini matriciali l'equazione può essere espressa come:

$$\begin{bmatrix} (M+m)R^2 + J & mlR \\ mlR & ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\varphi} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4KR^2 & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} KRx \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Si noti che si perviene solo a due equazioni differenziali in quanto lo spostamento del vincolo è fornito in termini finiti dai dati del problema.

### Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$[-\omega_0^2 [M] + [K]]\{X_0\}e^{i\omega_0 t} = \{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale  $\{X_0\} = \{0\}$ , occorre che le  $\omega_0$  siano le radici di:

$$\det[-\omega_0^2 [M] + [K]] = 0$$



# Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

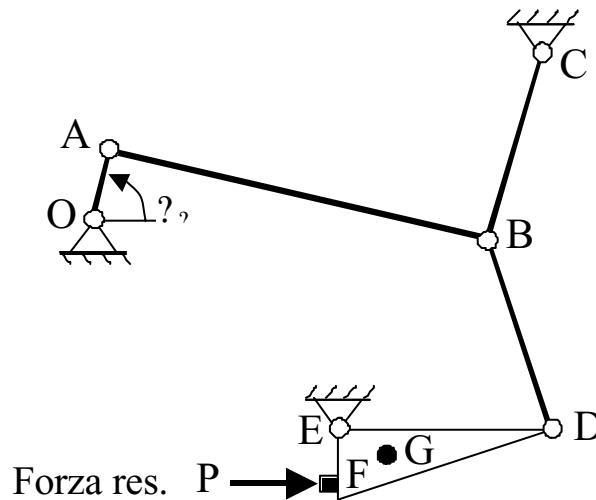
## prof. A. Curami – Appello del 04 settembre 2001

**Es 1 - Quesito 1:** Dato il meccanismo sotto raffigurato di cui sono note:

?? la geometria intesa come lunghezza delle aste e coordinate delle cerniere;

?? la legge del moto della manovella OA intesa come conoscenza in funzione del tempo della fase, della velocità e dell'accelerazione angolare.

si indichi, utilizzando obbligatoriamente il metodo dei numeri complessi, come sia possibile determinare la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto B attraverso la scrittura delle equazioni di chiusura.



**Quesito 2:** Si scriva l'equazione di chiusura da utilizzarsi per la determinazione della posizione del punto D.

**Quesito 3:** Ipotizzando che:

?? l'elemento DEF abbia massa  $M$  concentrata in  $G$  e  $J_G$  sia il suo momento di inerzia baricentrico;

?? la velocità e l'accelerazione angolare di DEF siano note come funzione di quelle di OA;

si determini ad un generico istante la coppia motrice da applicare alla manovella OA.

**Quesito 4:** Si determinino le reazioni presenti nella cerniera E.



**Es. 2** - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

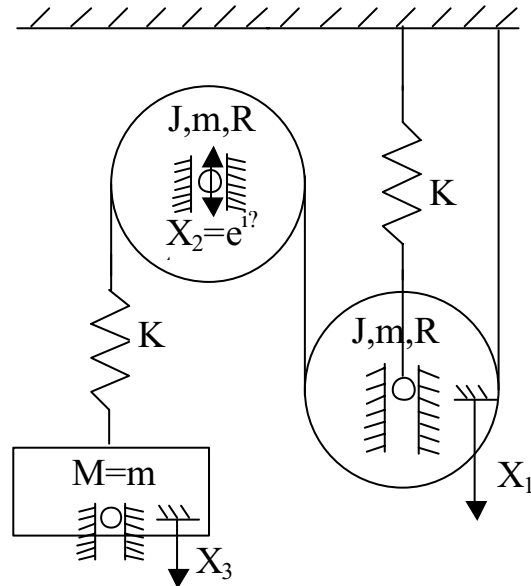
- determinare le frequenze della forzante per cui il sistema viene eccitato in risonanza;
- descrivere il comportamento in corrispondenza alle frequenze prima individuate.

Il sistema è costituito da:

- ?? un primo disco, collegato al vincolo a terra da una molla di rigidezza  $K$ , libero di oscillare in direzione verticale;
- ?? un secondo disco libero di ruotare attorno ad una cerniera posizionata nel suo centro di cui è nota la legge armonica del moto in direzione verticale;
- ?? una massa libera di oscillare in direzione verticale.

Le masse, i momenti di inerzia, le dimensioni geometriche e le costanti delle molle sono quelle indicate nel disegno. Si supponga inoltre:

- ?? che gli attriti siano trascurabili;
- ?? che non vi sia strisciamento tra filo e dischi;
- ?? che il filo sia inestensibile e di massa trascurabile;
- ?? che il momento di inerzia baricentrico dei dischi sia pari a  $mR^2/2$ .



---

**Es. 3** – Fondazione rigida e fondazione sospesa: si confrontino criticamente le due soluzioni giustificandone le specifiche caratteristiche.



## Quesito 1

### Analisi del sistema

Eseguiamo una verifica dei gradi di libertà del sistema sopra riportato:

esso è formato da 5 elementi mobili (aste OA, AB, BC, BD e corpo DEF) per un totale di 15 gradi di libertà e da 6 cerniere (O, A, B, C, D, E di cui B va contata due volte in quanto vi convergono 3 aste) che eliminano 14 gradi di libertà. Si conclude quindi che il sistema è a singolo grado di libertà e quindi che la sua cinematica può essere completamente studiata nota quella della manovella OA (accelerazione funzione del tempo e velocità e posizione iniziali).

### Cinematica del punto D

La cinematica di D deve essere determinata in funzione dei valori di posizione (velocità ed accelerazione) dell'unico grado di libertà del sistema rappresentato dall'orientazione (velocità angolare, accelerazione angolare) della manovella.

La soluzione analitica procede con i seguenti passi:

?? determinazione della cinematica di B in funzione di quella della manovella;

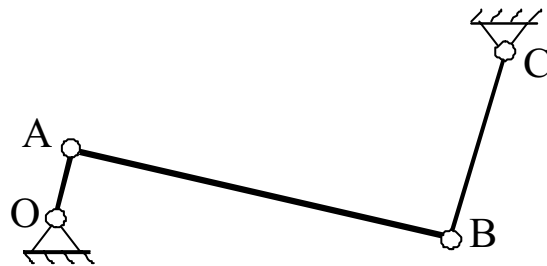
?? determinazione della cinematica di D in funzione di quella di B;

### Posizione di B

La posizione di B va ricavata in funzione della fase della manovella OA.

Consideriamo il sottosistema rappresentato dal quadrilatero OABC e rappresentiamo i lati con dei vettori:

$$\begin{aligned}
 AO &? \vec{l}_1 \\
 BA &? l_2 \\
 BC &? l_3 \\
 CO &? l_4
 \end{aligned}$$



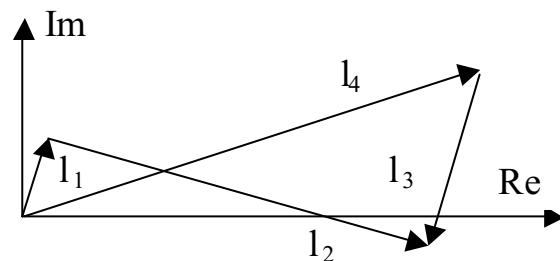
Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \vec{l}_4 = \vec{0}$$

che, passando ai numeri complessi, sarà espressa da:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 = 0$$

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} + l_3 e^{i\theta_3} + l_4 e^{i\theta_4} = 0$$





Si consideri che gli angoli sono presi positivi in verso antiorario a partire dall'asse reale ed esprimono l'orientazione delle aste del quadrilatero come raffigurato nel disegno.

Analizzando l'equazione complessa si può vedere come il quarto vettore sia in realtà rappresentato da un vettore costante nel tempo in quanto le cerniere O e C sono entrambe connesse a terra; per questo nel seguito evidenzieremo questo termine come un numero complesso costante evitando di riportare la sua dipendenza da un  $\varphi_4$  costante.

Il sottosistema considerato è composto da tre aste e da quattro cerniere per un totale complessivo di 1 solo grado di libertà (9 gdl delle aste a cui vanno sottratti gli 8 gdl introdotti dalle cerniere) che nel seguito sarà indicato con  $\varphi_1$ . Scopo del nostro procedere sarà quindi di esprimere in funzione di  $\varphi_1$  i valori degli angoli  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ ; per completare l'operazione abbiamo a disposizione una equazione complessa nel piano, equivalente a due equazioni scalari.

Scomponiamo l'equazione complessa in due equazioni scalari corrispondenti alle due proiezioni sull'asse reale e su quello immaginario:

$$l_1 \cos \varphi_1 + l_2 \cos \varphi_2 + l_3 \cos \varphi_3 + l_{4r}$$

$$l_1 \sin \varphi_1 + l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin \varphi_3 + l_{4i}$$

Note le caratteristiche geometriche del sistema, essendo quest'ultimo ad un grado di libertà, la sua configurazione sarà completamente individuata dal valore di uno dei tre angoli utilizzato per descriverlo. Nel seguito supporremo di utilizzare come variabile indipendente l'angolo di fase  $\varphi_1$  della manovella. Questo significa che dovremo individuare le due relazioni sottoriportate:

$$\varphi_2 = f_1(\varphi_1)$$

$$\varphi_3 = f_2(\varphi_1)$$

Si sottolinea fin d'ora che tale corrispondenza potrebbe non essere univoca; infatti si pensi alla duplicità di soluzioni associate alla possibilità di avere una doppia configurazione del sistema dove il punto B si trova una volta alla destra e una volta alla sinistra della retta passante per O e per C. In pratica si avranno due coppie di valori di  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  a fronte di un unico valore di  $\varphi_1$ .

Per la ricerca analitica delle due espressioni sopra riportate si rimanda alla esercitazione relativa.

## Velocità di B

Possiamo ora ritenere nota la posizione di B al variare del valore dell'angolo  $\varphi_1$  e possiamo affrontare lo studio della velocità per lo stesso; allo scopo ripartiamo dalla:

$$l_1 e^{i\varphi_1} + l_2 e^{i\varphi_2} + l_3 e^{i\varphi_3} + l_4 e^{i\varphi_4}$$

e deriviamola rispetto al tempo:

$$i\dot{\varphi}_1 l_1 e^{i\varphi_1} + i\dot{\varphi}_2 l_2 e^{i\varphi_2} + i\dot{\varphi}_3 l_3 e^{i\varphi_3}$$

che è l'equivalente, termine a termine, della relazione vettoriale tra le velocità:

$$\vec{v}_A + \vec{v}_{BA} + \vec{v}_B$$





scomponendo l'equazione complessa nelle sue due componenti lungo l'asse reale e lungo quello immaginario e isolando a secondo membro i termini relativi alla velocità di A si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 l_3 \sin \varphi_3 &= \dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 l_3 \cos \varphi_3 &= \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 \end{aligned}$$

Risolvendo le due relazioni rispetto alle due velocità angolari che si intendono determinare in funzione di quella della manovella si ottiene:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_2 &= \frac{\dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \\ \dot{\varphi}_3 &= \frac{\dot{\varphi}_1 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)} \end{aligned}$$

dalle quali siamo in grado di ricavare la velocità di ogni membro del quadrilatero attualmente considerato; si noti infatti che gli angoli sono tutti noti in quanto forniti dai dati ( $\varphi_1$ ) o calcolati al passo precedente ( $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ ). La velocità angolare della manovella è nota in quanto fornita dai dati del problema.

La velocità di B, nelle sue componenti lungo l'asse reale ed immaginario, può quindi essere calcolata utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{Br} &= \dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 l_3 \sin \varphi_3 \\ \vec{v}_{Bi} &= \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_3 l_3 \cos \varphi_3 \end{aligned}$$

## Accelerazione di B

Possiamo ora ritenere nota la posizione e la velocità di B al variare del valore dell'angolo  $\varphi_1$  e possiamo affrontare lo studio dell'accelerazione per lo stesso; allo scopo ripartiamo dalla relazione che esprime la velocità:

$$i \dot{\varphi}_1 l_1 e^{i\varphi_1} - i \dot{\varphi}_2 l_2 e^{i\varphi_2} + i \dot{\varphi}_3 l_3 e^{i\varphi_3}$$

e deriviamola rispetto al tempo:

$$i \ddot{\varphi}_1 l_1 e^{i\varphi_1} - \dot{\varphi}_1^2 l_1 e^{i\varphi_1} - i \ddot{\varphi}_2 l_2 e^{i\varphi_2} + \dot{\varphi}_2^2 l_2 e^{i\varphi_2} - i \ddot{\varphi}_3 l_3 e^{i\varphi_3} + \dot{\varphi}_3^2 l_3 e^{i\varphi_3}$$

che è l'equivalente, termine a termine, della relazione vettoriale:

$$\vec{a}_{At} - \dot{\varphi}_1 \vec{a}_{An} - \dot{\varphi}_1 \vec{a}_{BA} + \dot{\varphi}_2 \vec{a}_{BA} - \dot{\varphi}_2 \vec{a}_{Bt} + \dot{\varphi}_2 \vec{a}_{Bn}$$

scomponendo l'equazione complessa nelle sue due componenti reale ed immaginaria:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 l_1 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_1^2 l_1 \sin \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_2^2 l_2 \sin \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 l_3 \sin \varphi_3 + \dot{\varphi}_3^2 l_3 \sin \varphi_3 \\ - \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 l_1 \cos \varphi_1 - \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_2 l_2 \cos \varphi_2 - \dot{\varphi}_3 l_3 \cos \varphi_3 + \dot{\varphi}_3 l_3 \cos \varphi_3 \end{aligned}$$



posso risolvere la relazione rispetto a  $\ddot{\varphi}_2$  e a  $\ddot{\varphi}_3$  in modo da ricavare l'accelerazione angolare delle due aste in funzione di quantità note:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\ddot{\varphi}_1 l_1 \sin(\varphi_3 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_1^2 l_1 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_2^2 l_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) + l_3 \ddot{\varphi}_3^2}{l_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

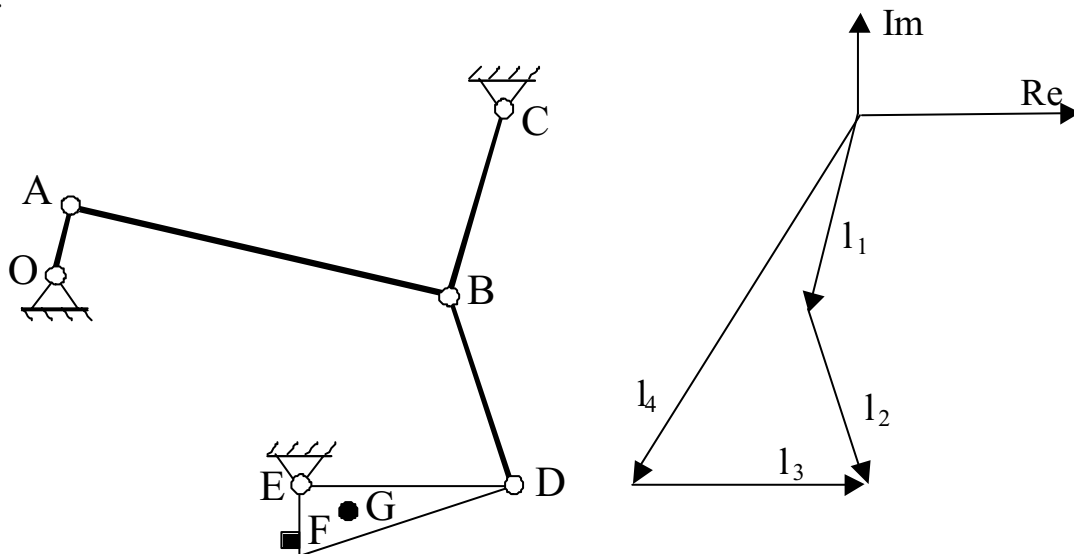
$$\ddot{\varphi}_3 = \frac{\ddot{\varphi}_1 l_1 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_1^2 l_1 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \ddot{\varphi}_3^2 l_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2) + l_2 \ddot{\varphi}_2^2}{l_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3)}$$

Determinate le due accelerazioni sarà possibile determinare le due componenti dell'accelerazione di B utilizzando le due relazioni precedentemente ricavate.

## Quesito 2

### Equazione di chiusura per la posizione di D

Nota la cinematica del punto B è completamente noto il comportamento dell'asta CB che funge da manovella per il quadrilatero CBDE. Applicando un procedimento del tutto analogo a quello sopra riportato per il primo quadrilatero si potrà arrivare a definire completamente la cinematica del punto D.



Consideriamo il sottosistema rappresentato dal quadrilatero CBDE e rappresentiamo i lati con dei vettori:

- $CB \rightarrow \vec{l}_1$
- $BD \rightarrow \vec{l}_2$
- $ED \rightarrow \vec{l}_3$
- $CE \rightarrow \vec{l}_4$



Possiamo quindi scrivere l'equazione vettoriale:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 + \vec{l}_4$$

che, passando ai numeri complessi, sarà espressa da:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4$$

$$l_1 e^{i\theta_1} + l_2 e^{i\theta_2} + l_3 e^{i\theta_3} + l_4 e^{i\theta_4}$$

### Quesito 3

Per il calcolo della coppia da applicare alla manovella OA, è conveniente utilizzare un bilancio di potenze, che può essere scritto nella forma:

$$\frac{dE_C}{dT} + W_m + W_r + W_p$$

l'unico elemento dotato di massa è il triangolo DEF, per cui il termine inerziale è dato da:

$$\frac{dE_C}{dT} + M_G \vec{V}_G + \dot{A}_G + J_G \dot{\omega}_{DE} + \dot{E}_{DE}$$

la potenza motrice è data dalla sola coppia motrice (incognita) agente sulla manovella OA:

$$W_m + M_m \dot{\theta}$$

le resistenze sono costituite dalla forza P applicata in F e dal peso del triangolo, applicato nel suo baricentro:

$$W_r + -\vec{P} \cdot \vec{V}_F - Mg \cdot \vec{V}_G$$

essendo trascurabili gli attriti, si ha:

$$W_p + 0$$

Si ha quindi:

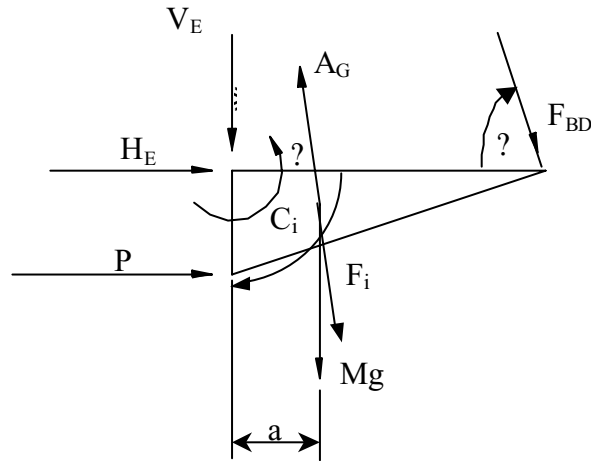
$$M_G \vec{V}_G + \dot{A}_G + J_G \dot{\omega}_{DE} + \dot{E}_{DE} + M_m \dot{\theta}_{OA} + \dot{P} \cdot \vec{V}_F + Mg \cdot \vec{V}_G$$

equazione in cui l'unica incognita è  $M_m$ , che può quindi essere ricavata.

### Quesito 4

Per calcolare la reazione vincolare della cerniera occorre considerare il triangolo DEF separatamente dal resto del sistema, evidenziando appunto la reazione in E e l'azione trasmessa dalla biella BD (la cui direzione è nota, ed è parallela alla biella BD stessa essendo questa un'asta scarica).

Avendo tre sole incognite ( $V_E$ ,  $H_E$ ,  $F_{BD}$ ), sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio dinamico applicate al triangolo:



$$\begin{aligned}
 ? F_H = 0 & \quad ? & H_E + P + F_{BD} \cos ? + M A_G \cos ? = 0 \\
 ? F_V = 0 & \quad ? & V_E + Mg + M A_G \sin ? + F_{BD} \sin ? = 0 \\
 ? M_E = 0 & \quad ? & P \cdot a - J_G \cdot a - a M A_G \sin ? - a Mg - DE F_{BD} \sin ? = 0
 \end{aligned}$$

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineari nelle tre incognite  $V_E$ ,  $H_E$ ,  $F_{BD}$ , per cui il problema risulta determinato.

**Es. 2: Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a tre gradi di libertà:

- $x_1$  posizione verticale del baricentro del primo disco; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;
- $x_2$  posizione verticale del baricentro della massa; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;
- $x_3$  posizione verticale del baricentro del secondo disco; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;

**Determinare le frequenze della forzante per cui il sistema viene eccitato in risonanza;**

Fondamentalmente si tratta di determinare le due frequenze proprie del sistema; per determinarle cominciamo con il ricavare le due equazioni di equilibrio dinamico per il sistema.

**Metodo di Lagrange: energia cinetica del sistema**

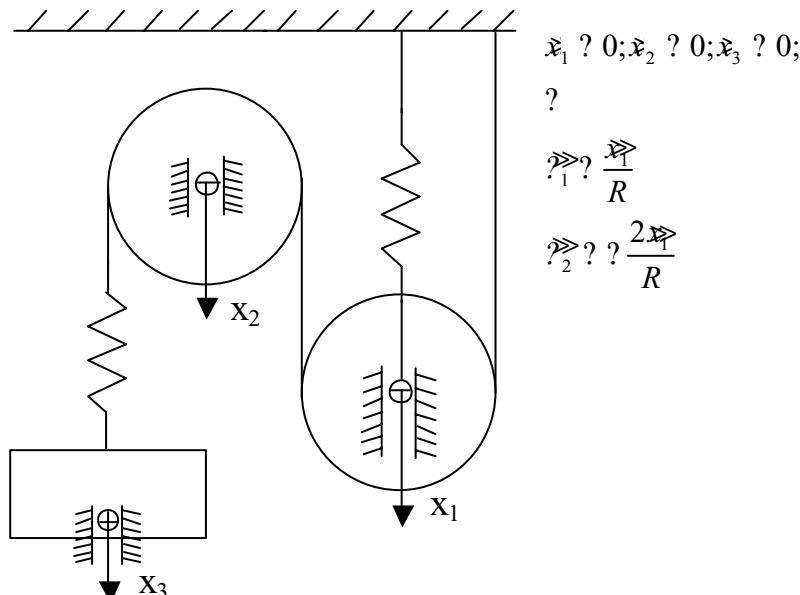
L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella dei due dischi e di quella della massa.

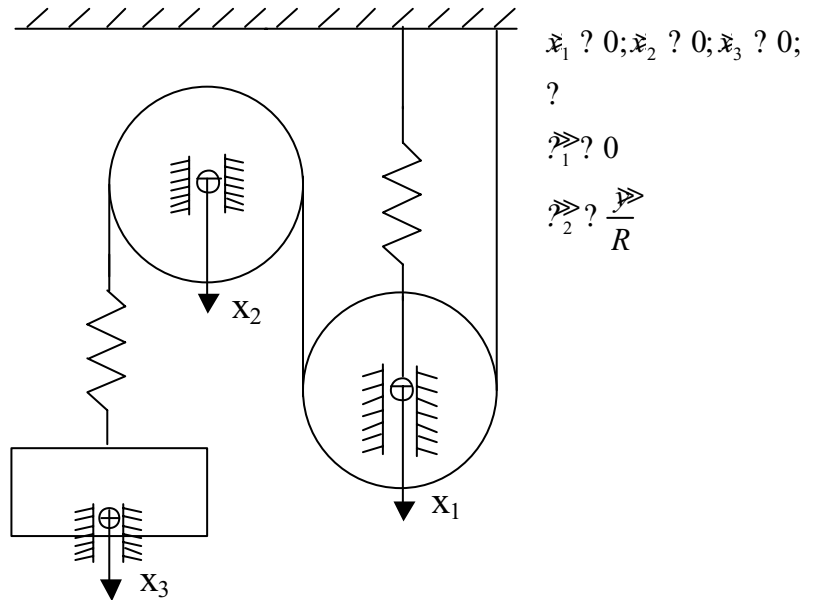
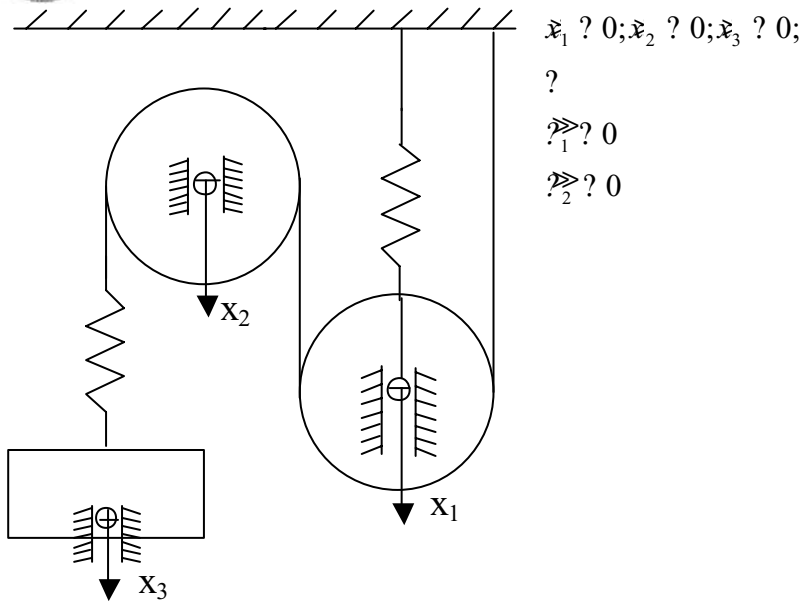
$$E_{c, disco1} = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2$$

$$E_{c, disco2} = \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2$$

$$E_{c, massa} = \frac{1}{2} M \dot{x}_3^2$$

Dove  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  rappresentano le oscillazioni angolare rispettivamente del primo e del secondo disco. Si tratta ora di esprimerle in funzione delle coordinate libere, operazione che eseguiamo applicando la sovrapposizione degli effetti:





Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\ddot{\varphi}_1 \neq \frac{\ddot{x}_1}{R}$$

$$\ddot{\varphi}_2 \neq \frac{\ddot{x}_2}{R} \neq \frac{2\ddot{x}_1}{R}$$

L'energia cinetica dei due dischi sarà quindi esprimibile come:

$$E_{c, disco1} \neq \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 \neq \frac{1}{2} J \frac{\dot{x}_1^2}{R^2} \neq \frac{3}{4} m \dot{x}_1^2$$

$$E_{c, disco2} \neq \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 \neq \frac{2J}{R^2} \dot{x}_2^2 \neq \frac{J}{2R^2} \dot{x}_2^2 \neq \frac{2}{R^2} \dot{x}_1^2 \neq m \dot{x}_1^2 \neq \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2 \neq m \dot{x}_1 \dot{x}_2$$

L'energia cinetica totale è:

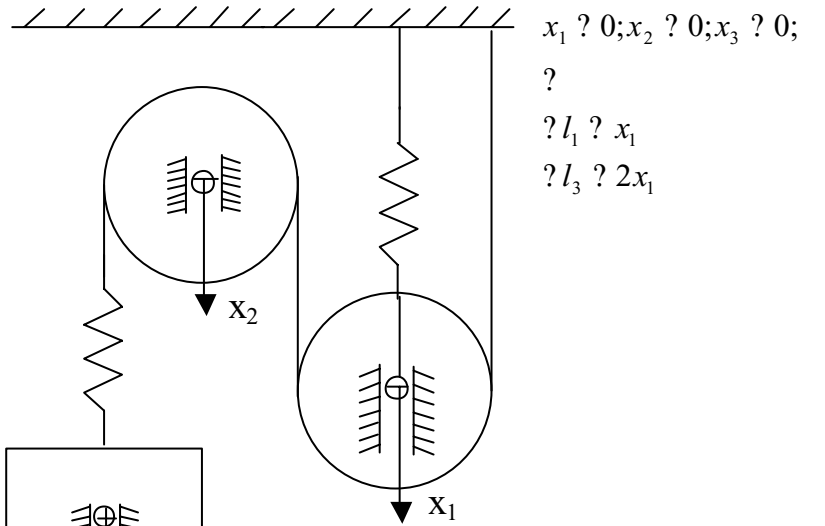
$$E_c \neq \frac{7}{4} m \dot{x}_1^2 \neq \frac{1}{2} M \dot{x}_3^2 \neq \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2 \neq m \dot{x}_1 \dot{x}_2$$



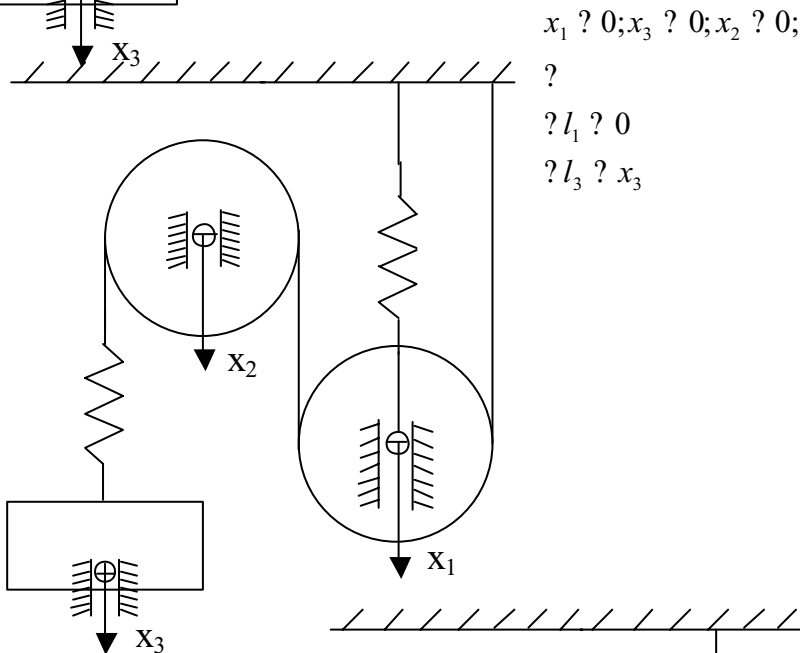
Metodo di Lagrange: energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema, avendo considerato come origine delle coordinate quella corrispondente alla configurazione di equilibrio statico del sistema, sarà pari alla sua componente elastica.

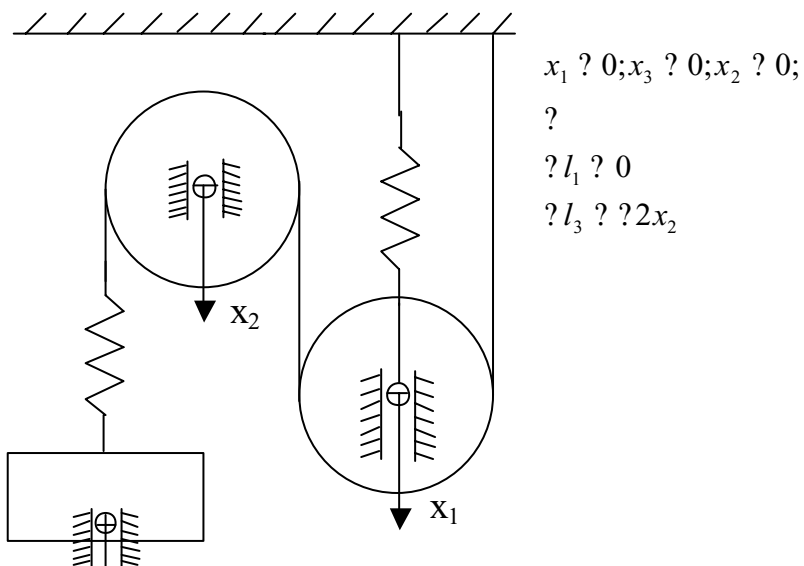
$$E_{p,molla} = \frac{1}{2}Kl_1^2 + \frac{1}{2}Kl_3^2$$



$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0;$   
 $l_1 = x_1$   
 $l_3 = 2x_1$



$x_1 = 0; x_3 = 0; x_2 = 0;$   
 $l_1 = 0$   
 $l_3 = x_3$



$x_1 = 0; x_3 = 0; x_2 = 0;$   
 $l_1 = 0$   
 $l_3 = 2x_2$



Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$l_1 = x_1$$

$$l_3 = 2x_1 + x_3 + 2x_2$$

L'energia potenziale totale è:

$$E_p = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (2x_1 + x_3 + 2x_2)^2$$

### Equazioni differenziali

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} - \frac{\partial E_c}{\partial x_1} - \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = \frac{7}{2} m \dot{x}_1 + m \dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = \frac{7}{2} m \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = K x_1 + 2K(2x_1 + x_3 + 2x_2)$$

$$\frac{7}{2} m \ddot{x}_1 + m \ddot{x}_2 - K x_1 - 2K(2x_1 + x_3 + 2x_2) = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} - \frac{\partial E_c}{\partial x_2} - \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} = M \dot{x}_3$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} = M \ddot{x}_3$$





$$\frac{\partial E_c}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = K(2x_1 - x_3 + 2x_2)$$

$$M\ddot{x}_3 = K(2x_1 - x_3 + 2x_2) = 0$$

La matrice di massa è:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{7}{2}m & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$$

La matrice di rigidezza è:

$$K = \begin{pmatrix} 5K & 2K \\ 2K & K \end{pmatrix}$$

### Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$x(t) = X_0 e^{i\omega t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$-\omega^2 M X_0 + K X_0 = 0$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale  $X_0 = 0$ , occorre che le  $\omega_0$  siano le radici di:

$$\det(-\omega^2 M + K) = 0$$

ovvero di:

$$\det \begin{pmatrix} 5K - \frac{7}{2}\omega^2 m & 2K \\ 2K & K - \omega^2 m \end{pmatrix}$$

$$(5K - \frac{7}{2}\omega^2 m)(K - \omega^2 m) - 4K^2 = 0$$



$$\frac{7}{2} \omega^4 m^2 + \frac{17}{2} \omega^2 m + K^2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in  $\omega^2$ , del tipo

$$a\omega^4 + b\omega^2 + c = 0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{01}^2 = \frac{\frac{17}{4} mK + \sqrt{\frac{17^2}{4} m^2 K^2 + \frac{7}{2} m^2 K^2}}{\frac{7}{2} m^2} = 2,3 \frac{K}{m}$$

$$\omega_{02}^2 = \frac{\frac{17}{4} mK - \sqrt{\frac{17^2}{4} m^2 K^2 + \frac{7}{2} m^2 K^2}}{\frac{7}{2} m^2} = 0,124 \frac{K}{m}$$

**Descrivere il comportamento in corrispondenza alle frequenze prima individuate.**

Le equazioni di equilibrio dinamico che governano il comportamento del sistema sono:

$$\frac{7}{2} m \ddot{x}_1 + 5Kx_1 + 2Kx_3 + m \ddot{x}_2 + 4Kx_2 + (m\omega^2 + 4K)e^{i\omega t}$$

$$M \ddot{x}_3 + 2K2x_1 + Kx_3 + 2Kx_2 + 2Ke^{i\omega t}$$

L'integrale del sistema di equazioni differenziali sopra riportato è dato dalla somma dell'integrale dell'omogenea associata (che descrive il comportamento del sistema non forzato) con un integrale particolare (che in pratica è quello che ci interessa in quanto stiamo cercando la soluzione a regime).

In termini generali si parte da una forma del tipo (sistema forzato):

$$M \ddot{x}(t) + Kx(t) = f e^{i\omega t}$$

che a regime ammetterà una soluzione del tipo

$$x(t) = \tilde{x} e^{i\omega t}$$

dove il vettore delle ampiezze di vibrazione  $\tilde{x}$  è soluzione di



$$\hat{x}(s) = H(s) \hat{f}(s)$$

che può essere anche riscritta come

$$\hat{x}(s) = H(s) \hat{f}(s)$$

dove  $H(s)$  è la *receptance matrix* del sistema, quadrata di ordine  $N$ , e ne costituisce il modello della sua risposta in frequenza. In riferimento a quanto sviluppato a lezione (lezione XXVIII sistemi vibranti a  $2n$  gradi di libertà), si può scrivere che:

$$h_{jk} = \frac{x_j(\omega_r)}{f_k(\omega_r)} = h_{kj} = \frac{x_k(\omega_r)}{f_j(\omega_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{X_j(\omega_r) X_k(\omega_r)}{\omega_r^2}$$

da cui si nota come il sistema possa andare in risonanza, qualora la pulsazione della forzante  $\omega$  uguagli una delle due frequenze proprie del sistema vibrante.

Questo significa che sarà possibile studiare la risposta del sistema nell'intorno della prima frequenza propria considerando la risposta di un sistema che abbia massa modale pari a  $m_{11}$  e rigidezza pari a  $k_{11}$  introducendo un errore modesto; considerazioni analoghe valgono ovviamente per il comportamento del sistema nell'intorno della seconda frequenza propria.



# Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

prof. A. Curami – Appello del 18 settembre 2001

**Es. 1 - Quesito 1** - Dato il meccanismo sotto raffigurato di cui sono note:

?? la costanti geometriche caratteristiche del sistema:

- le lunghezze delle aste ( $O'A$  e  $AB$ ),
- il diametro del disco di centro  $B$ ,
- tutte le coordinate atte ad individuare la posizione delle cerniere a terra e del piano sul quale rotola il disco;

?? la distanza tra il punto  $A$  e la cerniera  $O$ , nonché la velocità e l'accelerazione con cui la stessa varia nel tempo.

si indichi, utilizzando obbligatoriamente il metodo dei numeri complessi, come sia possibile determinare la posizione, la velocità e l'accelerazione del punto  $A$  attraverso la scrittura delle equazioni di chiusura.

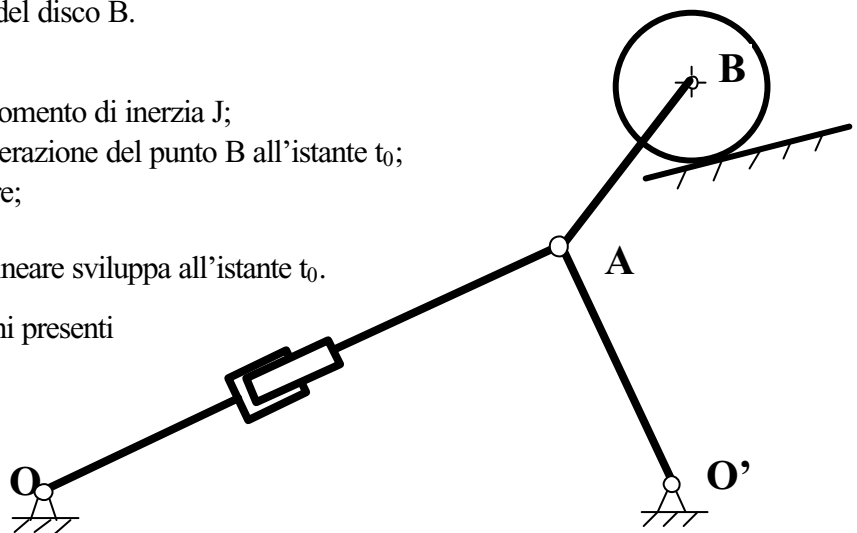
**Quesito 2:** Si scriva l'equazione di chiusura da utilizzarsi per determinare la posizione del centro del disco  $B$ .

**Quesito 3:** Ipotizzando che:

- ?? il disco abbia massa  $M$  e momento di inerzia  $J$ ;
- ?? sia nota la velocità e l'accelerazione del punto  $B$  all'istante  $t_0$ ;
- ?? il disco rotoli senza strisciare;
- ?? gli attriti siano trascurabili;

si determini la forza che l'attuatore lineare sviluppa all'istante  $t_0$ .

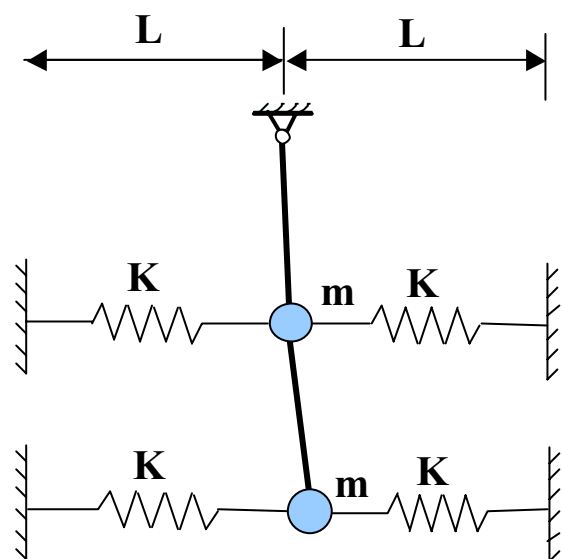
**Quesito 4:** Si determinino le reazioni presenti nella cerniera  $O$  all'istante  $t_0$ .



**Es. 2** - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- ?? scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio del sistema;
- ?? linearizzare le precedenti reazioni nell'intorno della posizione di equilibrio;
- ?? determinare le frequenze proprie del sistema linearizzato;

A tal fine si ritengano note: la massa  $m$  delle due sfere considerate puntiformi, la costante elastica  $K$  delle molle e le dimensioni del sistema riportate in figura. Si supponga inoltre che la lunghezza delle molle indeformate sia pari ad  $L$  e si ipotizzi che nel loro spostamento si mantengano orizzontali.



**Es. 3** – Descrivere il principio di funzionamento dei freni a ceppi.



## Es. 1: Svolto con l'ausilio dei numeri complessi

### Analisi del sistema

Determiniamo i gradi di liberta' del sistema; esso e' formato da quattro corpi rigidi (aste OA, O'A e AB e da un disco ) per un totale di dodici gradi di liberta' e da tre cerniere rotoidali (di cui una va contata due volte poiche' vi convergono tre aste), una prismatica ed una assimilabile ad un carrello) che eliminano un totale di undici gradi di liberta'. Il sistema e' pertanto ad un solo grado di liberta'.

### Sistema vettoriale equivalente

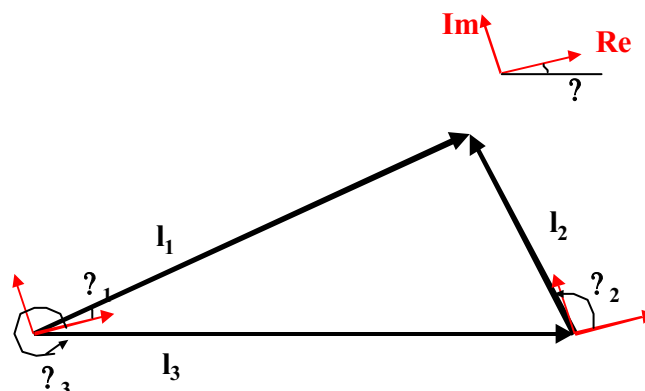
Prima di tutto osserviamo che e' utile operare un cambio di riferimento, chiamando  $\theta$  l'angolo che il piano inclinato (lungo il quale scorre il disco) forma con l'orizzontale avremo:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} & \hat{=} \hat{i}_1 \\ ie^{i\theta} & \hat{=} \hat{j}_1 \end{aligned}$$

Dove  $\hat{i}_1$  e  $\hat{j}_1$  sono i nuovi assi. D'ora in poi tutti gli angoli saranno riferiti al nuovo sistema di assi coordinati.

Dato il sistema di partenza ne consideriamo dapprima il sottosistema OO'A costituito dall'asta OA e dall'asta O'A come mostrato nella figura sottostante.

Le convenzioni adottate per il verso e la fase dei vettori sono ampiamente trattate negli esempi relativi allo svolgimento degli esercizi con l'ausilio dei numeri complessi.





Dai dati del problema abbiamo che:

$$l_1 \neq 0$$

$$\vec{l}_1 \neq V$$

$$\vec{l}_1 \neq A$$

Analizziamo i singoli vettori della figura sopra riportata per verificare di non avere più di due incognite poiché in tale ipotesi la sola equazione di chiusura non sarebbe sufficiente a risolvere il sistema.

	$l_1$	$l_2$	$l_3$
<b>modulo</b>	Nota (OA variabile)	Nota (O'A)	Nota (OO')
<b>fase</b>	?	?	Nota ( $\alpha_3$ costante)

L'equazione vettoriale equivalente a tale sistema è:

$$\vec{l}_3 \neq \vec{l}_2 \neq \vec{l}_1$$

### Posizione del punto A

Scomponendo l'equazione precedente nelle sue due componenti secondo i nuovi assi si ottiene:

$$l_3 \cos \alpha_3 \neq l_2 \cos \alpha_2 \neq l_1 \cos \alpha_1$$

$$l_3 \sin \alpha_3 \neq l_2 \sin \alpha_2 \neq l_1 \sin \alpha_1$$

Le uniche due incognite del sistema sono:  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$ .

Quadro le due espressioni precedenti:

$$l_3^2 \cos^2 \alpha_3 \neq l_2^2 \cos^2 \alpha_2 \neq 2l_2 l_3 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \neq l_1^2 \cos^2 \alpha_1$$

$$l_3^2 \sin^2 \alpha_3 \neq l_2^2 \sin^2 \alpha_2 \neq 2l_2 l_3 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \neq l_1^2 \sin^2 \alpha_1$$

Sommando membro a membro si ottiene:

$$\cos \alpha_3 \neq \alpha_2 \neq \frac{l_1^2 \neq l_2^2 \neq l_3^2}{2l_2 l_3}$$

da cui:

$$\alpha_3 \neq \alpha_2 \neq \arccos\left(\frac{l_1^2 \neq l_2^2 \neq l_3^2}{2l_2 l_3}\right)$$

da cui:

$$\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \arccos\left(\frac{l_1^2 \neq l_2^2 \neq l_3^2}{2l_2 l_3}\right)$$

Sostituendo quest'ultimo in una delle due equazioni precedenti otteniamo il valore di  $\alpha_1$ .



### Velocita' del punto A

Derivando le due equazioni precedenti si ottiene:

$$l_3 \ddot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 + l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ l_3 \dot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1$$

dalla prima equazione si ricava:

$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{\dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2}{l_1 \sin \varphi_1}$$

sostituendo questa espressione nella seconda equazione si ha:

$$\ddot{\varphi}_2 = \frac{\dot{\varphi}_1}{l_2 \sin \varphi_1 + \varphi_2}$$

tramite quest'ultima espressione si puo' ovviamente ottenere anche il valore di  $\ddot{\varphi}_1$ .

### Accelerazione del punto A

Deriviamo ulteriormente le due equazioni precedenti:

$$l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \\ l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1$$

Raccogliamo i termini costanti e chiamiamoli con delle lettere:

$$A = l_2 \dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 \\ B = l_2 \dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + l_1 \dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1$$

di conseguenza il sistema si riduce a:

$$A + l_2 \ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 = l_1 \ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 \\ B + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 = l_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1$$

Dalla seconda equazione si esprime  $\dot{\varphi}_1$  in funzione di  $\dot{\varphi}_2$ :

$$\dot{\varphi}_1 = \frac{B + l_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2}{l_1 \cos \varphi_1}$$

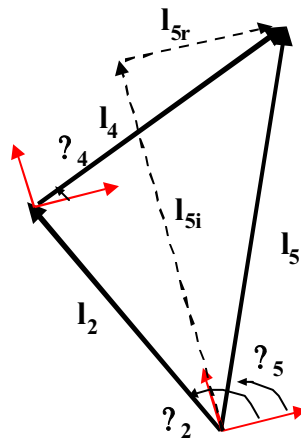
che sostituito nella prima da:



$$\varphi_2 = \frac{B \sin \varphi_1 \cos \varphi_1}{l_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2}$$

tramite il quale si ottiene il valore di  $\varphi_1$ .

Consideriamo ora il sottosistema O'AB formato dalle aste O'A e AB e l'equivalente vettoriale rappresentato nel disegno sottostante:



Considerando la figura sopra riportata analizziamo i singoli vettori allo scopo di verificare che non ci siano più di due incognite.

	$l_2$	$l_4$	$l_{5i}$	$l_{5r}$
<b>modulo</b>	Noto (O'A)	Noto (AB)	Noto	?
<b>fase</b>	Nota	?	90°	0°

L'equazione vettoriale equivalente al sistema rappresentato è:

$$\vec{l}_2 + \vec{l}_4 = \vec{l}_5$$

in cui il vettore  $\vec{l}_5$  rappresenta la posizione del disco B e può essere scomposto in una componente costante  $l_{5i}$  parallela all'asse immaginario (dovuta al fatto che il disco è vincolato a scorrere lungo il piano inclinato senza distaccarsene) ed in una variabile  $l_{5r}$  parallela all'asse reale.

### Posizione del disco B

Scompongo l'equazione nelle sue due componenti lungo gli assi immaginario e reale:

$$l_2 \cos \varphi_2 + l_4 \cos \varphi_4 = l_{5r}$$

$$l_2 \sin \varphi_2 + l_4 \sin \varphi_4 = l_{5i}$$





Dalla seconda equazione otteniamo:

$$\sin \theta_4 = \frac{l_{5i} \sin \theta_2}{l_4}$$

da cui:

$$\theta_4 = \arcsin\left(\frac{l_{5i} \sin \theta_2}{l_4}\right)$$

e' quindi facile ottenere  $l_{5r}$ :

$$l_{5r} = l_2 \cos \theta_2 = l_4 \cos \theta_4$$

### La forza sviluppata dall'attuatore lineare

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m = W_r$$

### Variatione di energia cinetica

Coincide con quella del disco:

$$\frac{dE_C}{dT} = M \vec{v}_B \cdot \vec{a}_B = J_{AB} \cdot \vec{\omega}_{AB}$$

### Potenza motrice

E' fornita dall'attuatore lineare per cui:

$$W_m = \vec{F} \cdot \vec{V}$$

Si sottolinea che la velocità da considerare è quella relativa tra le due parti in movimento che, nel caso particolare, essendo una delle due collegata a terra, coincide con quella assoluta.

### Potenza resistente

E' dovuta alla variazione di quota del disco:

$$W_r = M \vec{g} \cdot \vec{v}_B$$



## Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$M\vec{v}_B \cdot \vec{a}_B + J_{AB} \cdot \dot{\vec{\omega}}_{AB} \cdot \vec{\omega}_{AB} + \vec{F} \cdot \vec{V} + M\vec{g} \cdot \vec{v}_B$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F.

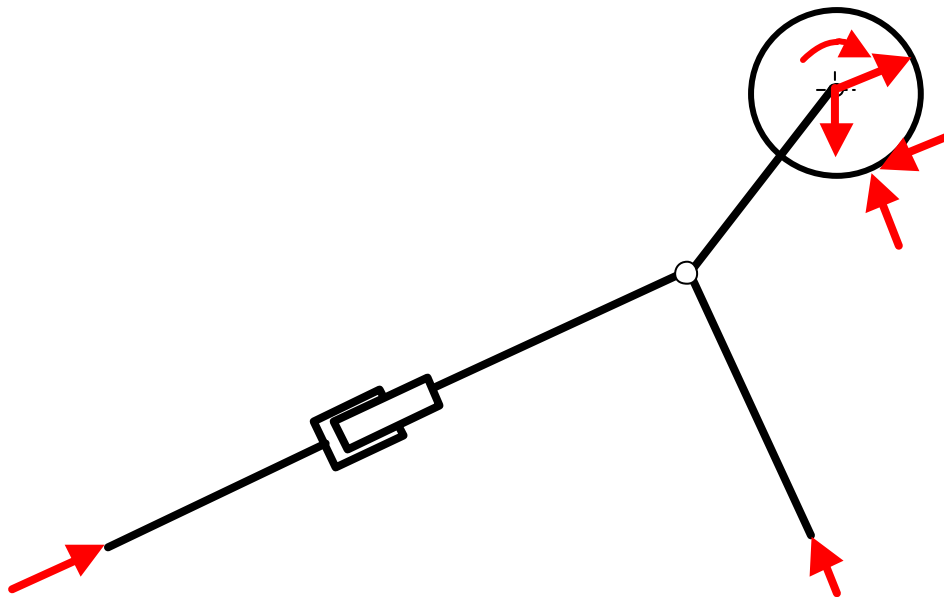
## Le reazioni vincolari nella cerniera O

Le considerazioni da svolgere sul sistema sono le seguenti:

- tutte le aste sono scariche e quindi possono essere considerate delle bielle;
- l'attuatore lineare è privo di massa e quindi può essere considerato una biella.

Un procedimento per determinare le reazioni in O risulta quindi il seguente:

- spezzare il sistema isolando il disco e quindi determinare l'azione trasmessa dalla biella AB ad esempio imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto al punto di contatto del disco;
- sostituire alle cerniere O e O' le rispettive reazioni ed in A la forza calcolata e risolvere il sistema ad esempio imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad O (ottenendo una relazione con come unica incognita la reazione in O') oppure rispetto ad O' (ottenendo una relazione che ha come unica incognita la reazione in O).



**Es. 2:**

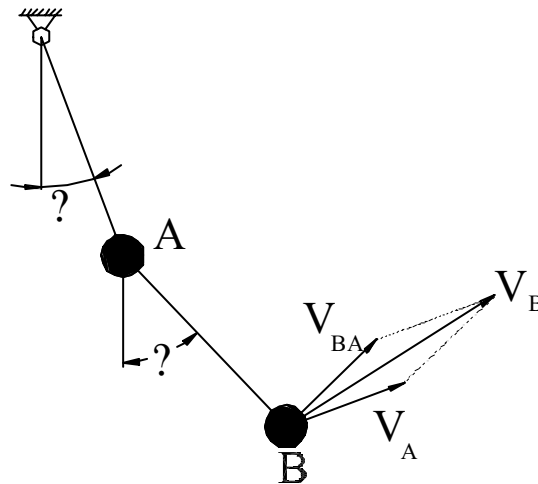
Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:

$\varphi$  : rotazione assoluta del pendolo superiore (positiva se antioraria)

$\theta$  : rotazione assoluta del pendolo inferiore (positiva se antioraria)

Per entrambe le coordinate libere si assume come origine quella con i pendoli verticali.

Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

**Calcolo dell'energia cinetica**

Per quanto riguarda il pendolo A, l'energia cinetica è data semplicemente da:

$$E_{cA} = \frac{1}{2} m (L \dot{\varphi})^2$$

Per valutare l'energia cinetica del pendolo B, occorre calcolare la velocità di quest'ultimo come somma della velocità del pendolo A (di trascinamento) e della velocità del pendolo B rispetto ad A (relativa):

$$(V_B)^2 = L^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta))$$

$$E_{cB} = \frac{1}{2} m L^2 (\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 + 2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta))$$

L'energia potenziale complessiva è data quindi da:

$$E_c = m L^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\theta}^2 + m L^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos(\varphi - \theta)$$

**Calcolo dell'energia potenziale**

Trascurando la deformazione delle molle dovuta agli spostamenti verticali dei punti A e B, si ha:



$$V_{kA} = 2 \left( \frac{1}{2} k (L \sin\theta)^2 \right) = kL^2 \sin^2\theta$$

$$V_{kB} = 2 \left( \frac{1}{2} k (L (\sin\theta + \sin\theta))^2 \right) = kL^2 (\sin\theta + \sin\theta)^2$$

Occorre poi tenere conto della variazione di energia potenziale legata all'innalzamento dei pendoli:

$$V_g = mgL (1 - \cos\theta) + mgL ((1 - \cos\theta) + (1 - \cos\theta))$$

L'energia potenziale del sistema in una generica configurazione è data quindi da:

$$V = kL^2 \sin^2\theta + kL^2 (\sin\theta + \sin\theta)^2 + 2mgL (1 - \cos\theta) + mgL (1 - \cos\theta)$$

## Equazioni di moto non lineari

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} - \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

Sviluppando i vari termini si ha:

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} = 2mL^2 \dot{\theta} + mL^2 \dot{\theta} \cos(\theta - \theta)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \theta} = mL^2 \dot{\theta} + mL^2 \dot{\theta} \cos(\theta - \theta)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \dot{\theta} \sin(\theta - \theta)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \theta} = -mL^2 \dot{\theta} \sin(\theta - \theta)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kL^2 2\sin\theta \cos\theta + kL^2 2(\sin\theta + \sin\theta)\cos\theta + 2mgL \sin\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = kL^2 2(\sin\theta + \sin\theta)\cos\theta + mgL \sin\theta$$

Il sistema di equazioni differenziali è dunque il seguente:

$$2mL^2 \ddot{\theta} + mL^2 (\ddot{\theta} \cos(\theta - \theta) - \dot{\theta} \sin(\theta - \theta) (\dot{\theta} - \dot{\theta})) - mL^2 \dot{\theta} \sin(\theta - \theta) + kL^2 2\sin\theta \cos\theta + kL^2 2(\sin\theta + \sin\theta)\cos\theta + 2mgL \sin\theta = 0$$

$$mL^2 \ddot{\theta} + mL^2 (\ddot{\theta} \cos(\theta - \theta) - \dot{\theta} \sin(\theta - \theta) (\dot{\theta} - \dot{\theta})) + mL^2 \dot{\theta} \sin(\theta - \theta) + kL^2 2(\sin\theta + \sin\theta)\cos\theta + mgL \sin\theta = 0$$



Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite  $\theta(t)$  e  $\varphi(t)$ , che può essere risolto in generale con metodi numerici.

## Linearizzazione del sistema

Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). Si può osservare che le derivate prime di  $V$  si annullano per  $\theta = \varphi = 0$ ; per verificare che la configurazione trovata sia di equilibrio stabile, deve essere:

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} > 0 \quad ? \quad 4 kL^2 + 2 mgL > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} > 0 \quad ? \quad 2 kL^2 + mgL > 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} - \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0}^2 > 0 \quad ? \quad (4 kL^2 + 2 mgL)(2 kL^2 + mgL) - (2 kL^2)^2 > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile.

Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor dell'energia cinetica e potenziale (che non sono forme quadratiche nelle variabili del problema), arrestando lo sviluppo ai termini di secondo ordine e supponendo piccoli gli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio.

Iniziando dall'energia potenziale, avremo:

$$V \approx V(\theta, \varphi) \approx V|_{0,0} + \left. \frac{\partial V}{\partial \theta} \right|_{0,0} \theta + \left. \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right|_{0,0} \varphi + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right|_{0,0} \theta^2 + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} \right|_{0,0} \varphi^2 + \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \varphi} \right|_{0,0} \theta \varphi$$

Dei termini in questione:

~~il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;~~

~~i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).~~

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$V \approx (4 kL^2 + 2 mgL) \frac{1}{2} \theta^2 + (2 kL^2 + mgL) \frac{1}{2} \varphi^2 + (2 kL^2) \theta \varphi$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, occorre osservare che essa è funzione di  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\varphi}$ ,  $\ddot{\theta}$ ,  $\ddot{\varphi}$ , e che nella configurazione di equilibrio queste variabili sono nulle:



$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{y}} = m \dot{y}, \quad \frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m \dot{z}$$

$$\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{x}^2} = m, \quad \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{y}^2} = m, \quad \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{z}^2} = m$$

Di tutti i termini dello sviluppo, occorre innanzitutto notare che gli unici utili ai fini delle equazioni di Lagrange sono quelli che presentano  $\dot{x}$  o  $\dot{y}$  almeno al primo ordine, poiché gli altri scompaiono a causa delle derivazioni rispetto a  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$ . Tutte le derivate prime dell'energia cinetica (vedi sopra) sono nulle nella configurazione di equilibrio; si può osservare inoltre che le uniche derivate seconde non nulle sono quelle che moltiplicano i termini in  $\dot{x}^2$ ,  $\dot{y}^2$ ,  $\dot{x} \cdot \dot{y}$ ; in definitiva, lo sviluppo di Taylor dell'energia cinetica arrestato agli infinitesimi di secondo ordine è dato da:

$$E_c = 2mL^2 \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + mL^2 \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + mL^2 \dot{\varphi} \dot{\theta}$$

A questo punto, nelle ipotesi assunte (piccoli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile), l'energia cinetica e potenziale sono approssimate con forme quadratiche che, derivate, daranno luogo a equazioni lineari:

$$2mL^2 \ddot{\varphi} + mL^2 \ddot{\theta} + (4kL^2 + 2mgL)\varphi + (2kL^2)\theta = 0$$

$$mL^2 \ddot{\varphi} + mL^2 \ddot{\theta} + (2kL^2)\varphi + (2kL^2 + mgL)\theta = 0$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{bmatrix} \ddot{\begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} 4kL^2 + 2mgL & 2kL^2 \\ 2kL^2 & 2kL^2 + mgL \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

mettendo in evidenza le matrici di massa e rigidezza che verranno utilizzate nel calcolo delle frequenze proprie.

### Calcolo delle frequenze proprie del sistema

Essendo le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, gli autovalori del sistema saranno immaginari puri; cerchiamo allora soluzioni del tipo  $X = X_0 e^{i\omega t}$ . Sostituendo nel sistema, si trova che, per avere soluzioni diverse dalla banale ( $X_0 = 0$ ), occorre che  $\omega^2$  sia uno degli autovalori della matrice  $-\omega^2 [M] + [K]$ :

$$\det(-\omega^2 [M] + [K]) = 0$$



$$\det \begin{pmatrix} m_1 \omega^2 - 2k & k \\ k & m_2 \omega^2 - 2k + mgL \end{pmatrix} = 0$$

$$(-m_1 \omega^2 + 2kL^2 + 2mgL)(-m_2 \omega^2 + 2kL^2 + mgL) - (2kL^2)^2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in  $\omega^2$ , che ammetterà due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le due frequenze proprie del sistema libero non smorzato.