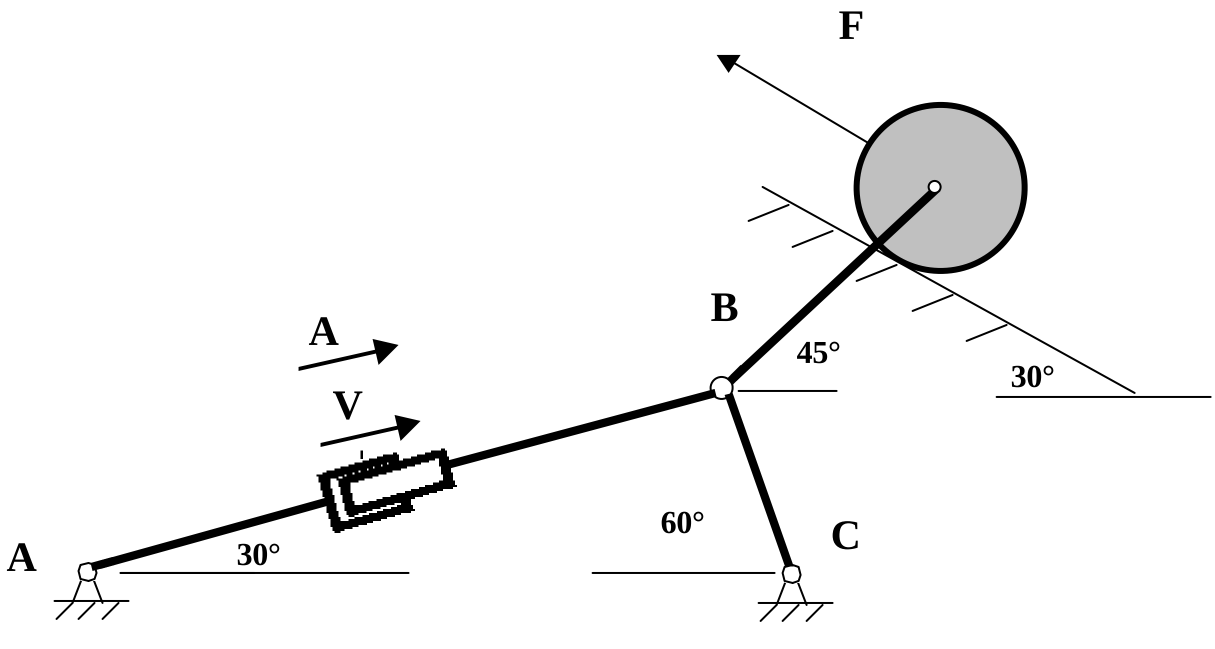
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Prova in itinere del 5 maggio 2000

Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione del punto D, baricentro del disco;
- la forza sviluppata dall'attuatore lineare;
- le reazioni vincolari nei punti A e C ed H (contatto disco/piano) discutendo il movimento del disco.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

a) l'attuatore si muova con velocità V e accelerazione A nei versi segnati;
b) il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
c) la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
d) il disco abbia raggio r, massa M_d e momento di inerzia baricentrico J_d;
e) applicata al baricentro del disco agisca la forza F nel verso indicato
f) gli attriti siano trascurabili tranne che tra disco e piano; dove sono da ritenersi noti i coefficienti di attrito statico, dinamico e volvente.



Soluzione della prova in itinere del 05/05/2000 – Allievi Aerospaziali

Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata.

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto A	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto B	Circonferenza centrata in C	?	?
Punto C	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto D	Parallela a terra	?	?

Primo quesito: la velocità angolare del disco

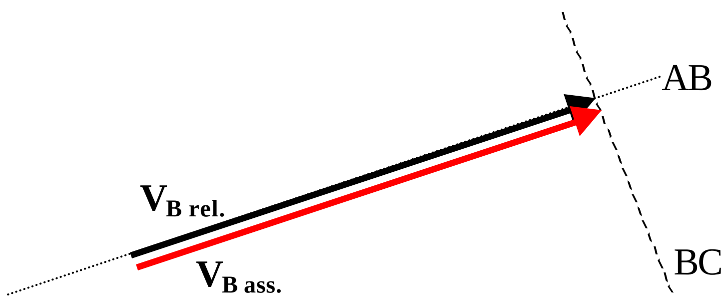
La velocità angolare del disco può essere determinata a partire dalla conoscenza della velocità del punto D, naturalmente nell'ipotesi che il moto del disco sia di puro rotolamento.
La velocità di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:
- si posiziona nel punto A una terna rotante solidalmente ad AB e si determina la velocità assoluta del punto B;
- si posiziona nel punto B una terna traslante di moto circolare attorno a C e si esprime la velocità assoluta di D come somma vettoriale della velocità di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

Velocità assoluta di B

Riassumendo, in riferimento alla terna mobile rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{B\ ass}$	=	$V_{B\ trasc}$	$V_{B\ rel.}$
modulo	?		?	v
direzione	$\perp$ BC		$\perp$ BA	// BA

Costruendo il triangolo delle velocità si ricava il modulo della velocità assoluta di B che, data la particolare configurazione del sistema che vede l'attuatore lineare AB e l'asta BC perpendicolari tra loro, coinciderà con quello della velocità relativa:



Prima di procedere conviene ricavarsi la velocità angolare dell'asta BC, che risulta essere in verso orario:

$$w_{BC} = \frac{V_{Bass}}{BC}$$

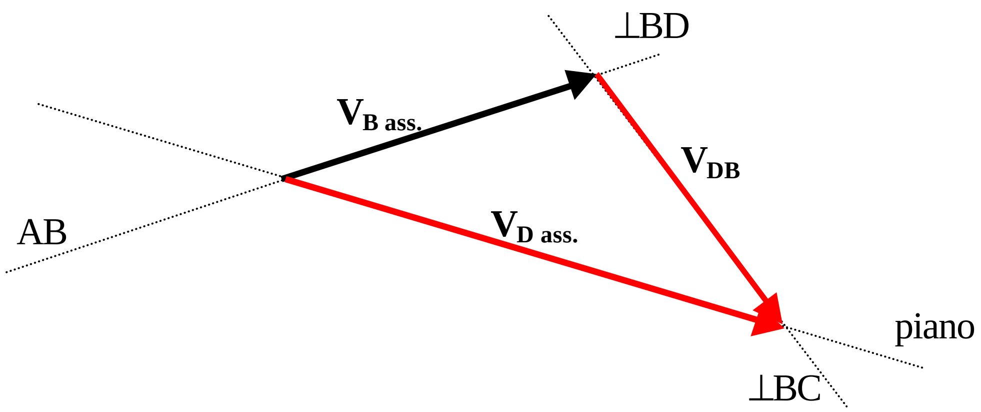
che verrà nel seguito utilizzata per determinare l'accelerazione di B.

<u>Velocità assoluta di D (centro del disco)</u>

Determinata la velocità di B, in riferimento alla terna mobile traslante prima definita, si ottiene:

	$\mathbf{V_{D\ ass}}$	=	$\mathbf{V_B}$	$\mathbf{V_{DB}}$
modulo	?		nota	v
direzione	// piano		⊥ BC	⊥ BD

Riportando graficamente l'equazione si ottiene:



Prima di procedere conviene ricavarsi la velocità angolare dell'asta DB, che risulta essere in verso orario:

$$w_{DB} = \frac{V_{DBass}}{DB}$$

che verrà nel seguito utilizzata per determinare l'accelerazione di D.

<u>Velocità angolare del disco</u>

Determinata la velocità lineare del centro del disco è immediato ricavare quella angolare del disco nell'ipotesi che quest'ultimo si muova di puro rotolamento:

$$w_{disco} = \frac{V_d}{r}$$

con verso orario.

Primo quesito: la accelerazione angolare del disco

La accelerazione angolare del disco può essere determinata a partire dalla accelerazione del punto D, naturalmente nell’ipotesi che il moto del disco sia di puro rotolamento.
La accelerazione di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

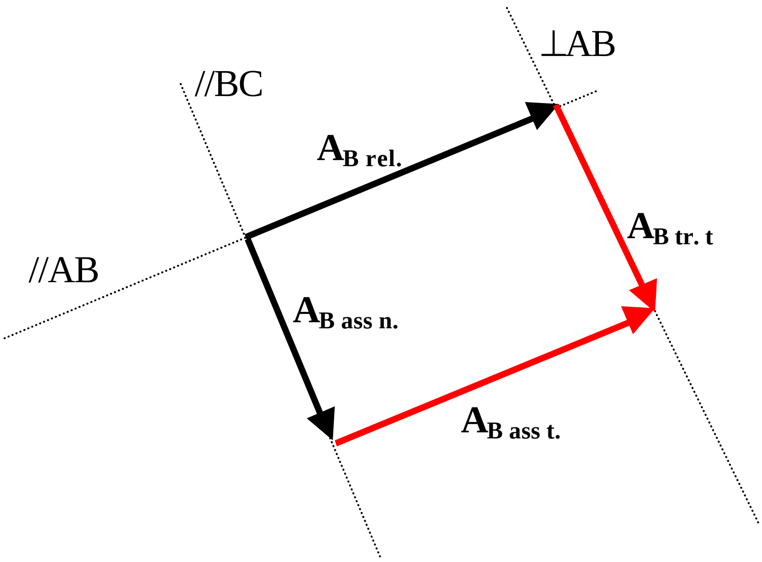
- si posiziona nel punto A una terna rotante solidalmente ad AB e si determina la accelerazione assoluta del punto B;
- si posiziona nel punto B una terna traslante di moto circolare attorno a C e si esprime la accelerazione assoluta di D come somma vettoriale della accelerazione di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

Accelerazione assoluta di B

In riferimento alla terna mobile rotante già utilizzata per la determinazione della velocità si ha:

	$A_{Bass\ n}$	$A_{Bass\ t}$	=	$A_{Btr\ n}$	$A_{Btr\ t}$	$A_{B\ rel}$	A_{com}
modulo	$w^2_{BC} BC$	?		$w^2_{AB} AB$	?	a	$2 w_{AB} v$
direzione	// BC	⊥ BC		// AB	⊥ AB	// AB	⊥ AB

Prima di riportare graficamente l’equazione vettoriale sopra scritta si presti attenzione al fatto che, determinando la velocità assoluta di B, si era concluso che la sua componente di trascinamento, nella particolare configurazione considerata era nulla. La conseguenza immediata è che anche la velocità angolare dell’attuatore lineare AB, e di conseguenza della terna mobile ad esso associata è nulla per cui l’accelerazione di trascinamento (componente normale) e quella complementare risulteranno essere nulle.



Prima di procedere conviene ricavarsi l’accelerazione angolare dell’asta BC, che risulta essere in verso orario:

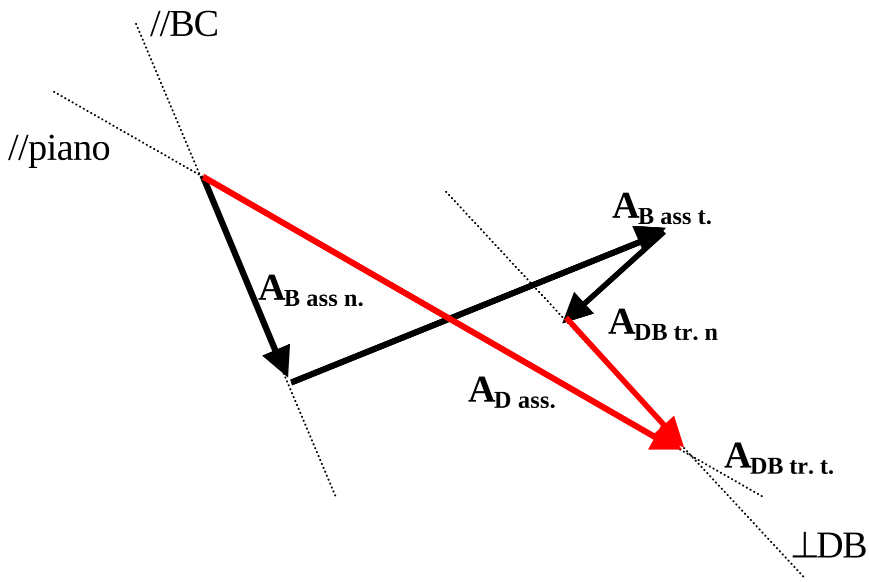
$$\dot{w}_{BC} = \frac{A_{Basst}}{BC}$$

che verrà nel seguito utilizzata per determinare l'accelerazione di D.

Accelerazione assoluta di D

In riferimento alla terna mobile traslante già utilizzata per la determinazione della velocità si ha:

	A_{Dass}	=	$A_{Bass\ n}$	$A_{Bass\ t}$	$A_{DB\ n}$	$A_{DB\ t}$
modulo	?		$w_{BC}^2 BC$	$\dot{w}_{BC} BC$	$w_{DB}^2 DB$	?
direzione	// piano		// BC	⊥ BC	// DB	⊥ DB



Accelerazione angolare del disco

Determinata la accelerazione lineare del centro del disco è immediato ricavare quella angolare dello stesso nell'ipotesi che quest'ultimo si muova di puro rotolamento:

$$\dot{w}_{disco} = \frac{A_d}{r}$$

con verso orario.

La forza F sviluppata nell'attuatore lineare

La coppia necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito e quindi dall'assenza di potenze perse:

$$\frac{dE_C}{dt} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

L'unico elemento dotato di massa presente nel meccanismo è il disco che quindi contribuisce alla variazione di energia cinetica nel seguente modo:

$$\frac{dE_C}{dt} = M_d \vec{v}_d \times \vec{a}_d + J_d \vec{\omega}_d \times \dot{\vec{\omega}}_d$$

Potenza motrice

E' fornita dall'attuatore lineare:

$$W_m = \vec{F} \times \vec{v}$$

La velocità inserita nella relazione è quella relativa tra i due elementi dell'attuatore.

Potenza resistente

E' il risultato del contributo della forza Q, della forza peso del disco e dell'attrito volvente nel moto tra il disco ed il piano:

$$W_r = -\vec{Q} \times \vec{v}_d - M_d \vec{g} \times \vec{v}_d + N f_v V_d$$

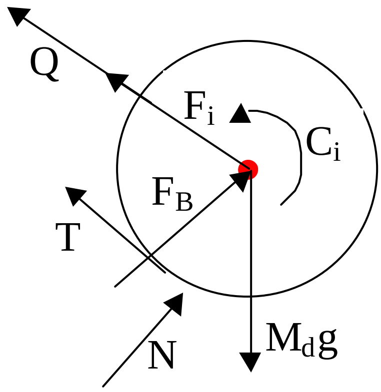
Le velocità in gioco devono essere assolute.

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$M_d \vec{v}_d \times \vec{a}_d + J_d \vec{w}_d \times \dot{\vec{w}}_d = \vec{F} \times \vec{v}_d + \vec{Q} \times \vec{v}_d + M_d \vec{g} \times \vec{v}_d - N f_v V_d$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno della forza sviluppata dall'attuatore lineare e della reazione verticale del suolo N.
Occorrerà quindi calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto fra piano e disco. Allo scopo sarà sufficiente isolare il disco tagliando l'asta BD che, essendo priva di massa e scarica, può essere considerata una biella e scrivere le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale nonché alla rotazione.
Le forze in gioco risultano essere quelle sotto indicate:



Da cui:

$F_{BD}\cos(45) - Q\cos(30) - F_i\cos(30) - T\cos(30) + N\cos(60) = 0$ traslazione orizzontale

$F_{BD}\mathrm{sen}(45) - Q\mathrm{sen}(30) - F_i\mathrm{sen}(30) - M_d g + T\mathrm{sen}(30) + N\mathrm{sen}(60) = 0$ traslazione verticale

$C_i - Tr + Nfr = 0$ rotazione

Le reazioni vincolari nelle cerniere A e C

Sarà sufficiente scrivere le equazioni di equilibrio del sistema dopo avere eliminato le cerniere in A e C (e averle sostituite con le corrispondenti reazioni) e osservare che le aste AB e BC possono essere considerate delle bielle.
Si tenga presente che la reazione in B dovuta alla presenza del disco è già stata calcolata nel punto precedente della soluzione.

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Prova in itinere del 12 giugno 2000

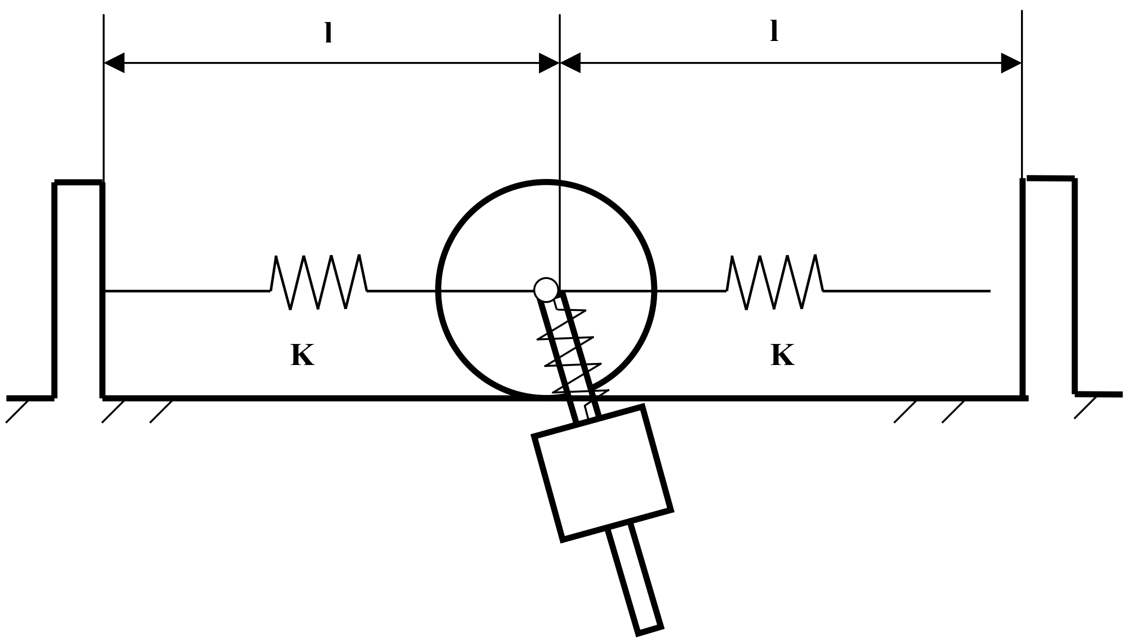
Es. 1 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede:

a) Scrivere l'energia potenziale e l'energia cinetica;
b) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) Determinare le frequenze proprie.

Nella risoluzione si ritengano note:

- La massa (M_d), il momento di inerzia baricentrico (J_d) ed il raggio (R) del disco;
- La massa (M_s) e il momento di inerzia baricentrico (J_s) della slitta scorrevole sul ;
- Le costanti elastiche delle tre molle riportate nel disegno, tutte pari a K;
- La lunghezza in condizione indeformata delle due molle orizzontali pari ad l;

Si sottolinea che il disco ed il pendolo sono solidali tra loro e che il pendolo ha massa e momento di inerzia trascurabile.



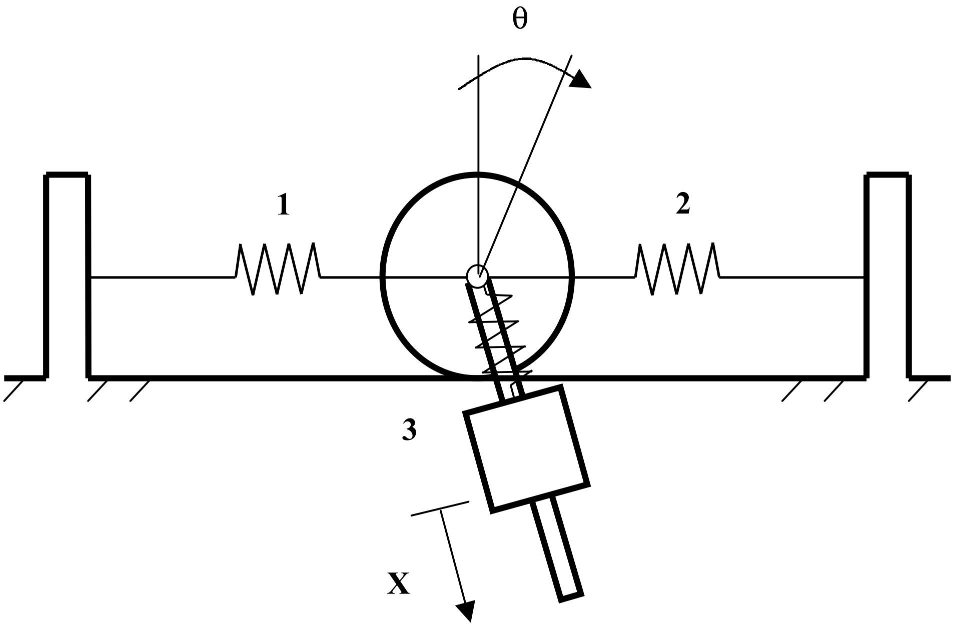
Es. 2 - Dati due alberi ad assi paralleli tra i quali si deve trasmettere un certo momento con un certo rapporto di trasmissione, si discutano le possibili soluzioni confrontandole criticamente e ricorrendo, ove sia necessario, a sviluppi analitici.

Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà, corrispondenti rispettivamente all'oscillazione del disco sul piano ed alla oscillazione della slitta lungo l'asta. La condizione vale naturalmente solo nell'ipotesi che il disco rotoli sul piano senza strisciare.
I gradi di libertà saranno individuati dalle seguenti coordinate libere:

θ -> oscillazione del disco con $\theta = 0$ in corrispondenza alla posizione in cui il baricentro del disco è equidistante dalle due barriere laterali. Si assumano rotazione, velocità ed accelerazione positive in verso orario

x -> oscillazione della slitta lungo l'asta; assumiamo che la posizione $x = 0$ coincida con la posizione di equilibrio statico. Questo significa che la posizione $x = 0$ si troverà alla distanza Δx dalla cerniera, risultato della somma della lunghezza della molla indeformata (x_{mi}) e dell'allungamento della stessa (x_0) a causa del carico statico determinato dalla massa della slitta ($x_0 = \frac{M_s g}{K}$). Si consideri inoltre la variabile $l_0 = x_{mi} + x_0$. Si assumamo spostamento, velocità ed accelerazione positive verso il basso.



Energia potenziale del sistema

Considerando singolarmente l'energia potenziale dei singoli componenti il sistema si ha:

$$E_p = E_{p\,disco} + E_{p\,slitta} + E_{p\,1} + E_{p\,2} + E_{p\,3}$$

Il **disco** contribuisce all'energia potenziale del sistema con un termine costante che trascuriamo in quanto verrebbe eliminato dalle operazioni di derivazione previste da Lagrange.

Si consideri ora la **slitta**; il lavoro totale compiuto dalla massa M_s, essendo il campo di forze conservativo, è indipendente dalla traiettoria ma è funzione solo della posizione iniziale e di quella finale. Questo significa che la variazione di energia potenziale cambiata di segno, può essere visto come il lavoro compiuto per farla spostare in verticale di una quantità x a cui si somma il lavoro necessario per far ruotare, da questa posizione, l'asta di un angolo θ e quindi:

$E_{p.slitta} = - M_s g\, x + M_s g\, (l_0 + x)(1 - \cos\theta)$

In modo diverso, ma ai fini del risultato del tutto equivalente, per il calcolo dell'energia potenziale della slitta si immagini di portarla nella posizione x = 0, θ = 0 e successivamente di applicare in successione uno spostamento elementare di θ e quindi uno di x e di esprimere nelle diverse ipotesi la quota della slitta rispetto al baricentro del disco (quota positiva verso il basso).

1) $Q_s = x_{mi} + x_0$

2) $Q_s = (x_{mi} + x_0)\cos\theta$

3) $Q_s = (x_{mi} + x_0 + x)\cos\theta$

Il lavoro risultante per spostare la massa dalla condizione iniziale a quella finale sarà dato dai due singoli contibuti riportati nel seguito; si consideri la condizione (2) rispetto alla condizione (1); il ΔQ_{21} è negativo e quindi diretto verso l'alto. Il lavoro risultante sarà:

$$L = \mathbf{M_s}\vec{\mathbf{g}} \times \vec{\Delta}Q_{21} = -\left|\mathbf{M_s}\vec{\mathbf{g}}\right| \left|\vec{\Delta}Q_{21}\right| = M_s g l_0(\cos\theta - 1)$$

Consideriamo la condizione (3) rispetto alla condizione (2); il ΔQ_{32} è positivo e quindi diretto verso il basso. Il lavoro risultante sarà:

$$L = \mathbf{M_s}\vec{\mathbf{g}} \times \vec{\Delta}Q_{32} = +\left|\mathbf{M_s}\vec{\mathbf{g}}\right| \left|\vec{\Delta}Q_{32}\right| = M_s g x \cos\theta$$

Dato il lavoro calcoliamo immediatamente il valore dell'energia potenziale della slitta

$$E_{p\ slitta} = - L = M_s g l_0(1 - \cos\theta) - M_s g x \cos\theta = M_s g(l_0+x)(1 - \cos\theta) - M_s g x$$

Rimane da determinare il contributo delle molle all'energia potenziale definendo i singoli allungamenti in funzione delle coordinate libere; ci si limita ad analizzare la molla verticale in quanto lo spostamento degli estremi delle altre due è semplicemente determinabile in base a θ (spostamento dato da Rθ); tornando alla molla disposta in verticale, occorre tenere presente che l'origine della variabile x è stata assunta nella condizione di equilibrio (e non in quella di molla indeformata); la variazione di energia potenziale della molla sarà quindi data da:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k\, (\Delta l)^2$$

dove Δl è dato da:

$$\Delta l = x_0 + x$$

dove x_0 rappresenta l'allungamento della molla all'equilibrio statico, ovviamente uguale a $M_s g/K$.

La variazione di energia potenziale della molla risulta quindi essere:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k \, (x_0 + x)^2$$

Sviluppando il termine si ottiene:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k \, (x_0^2 + 2\, x_0 x + x^2) = (M_s g)^2/2k + M_s g x + \frac{1}{2} k \, x^2$$

Dello sviluppo possiamo trascurare il termine costante (eliminato dalle derivazioni). In accordo con quanto detto, l'energia potenziale assume il seguente valore:

$$E_p = M_s g(l_0+x)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} K(R\theta)^2 + \frac{1}{2} K(R)^2 + \frac{1}{2} Kx^2$$

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica del sistema è data dalla somma di quella del disco e della slitta.

L'energia cinetica del disco è facilmente determinabile:

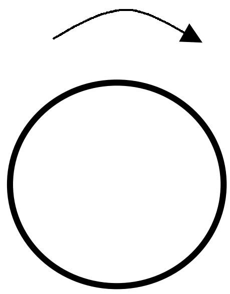
$$E_c = \frac{1}{2} M_d V^2 + \frac{1}{2} J_d \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} M_d \left(R\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2} J_d \dot{\theta}^2$$

L'energia cinetica della slittà è determinabile con lo stesso procedimento, che comporta tuttavia una determinazione della velocità assoluta del baricentro più complessa:

$$E_c = \frac{1}{2} M_s V^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\theta}^2$$

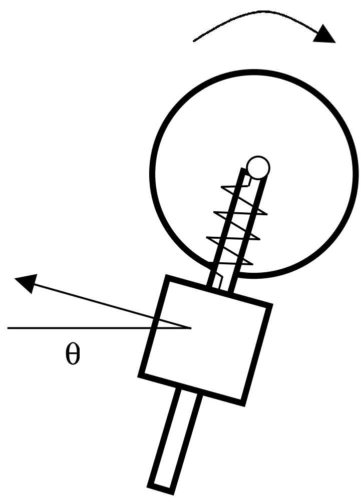
La velocità assoluta del baricentro è infatti data da tre diverse componenti:

1) velocità di trascinamento dovuta al moto del baricentro del disco



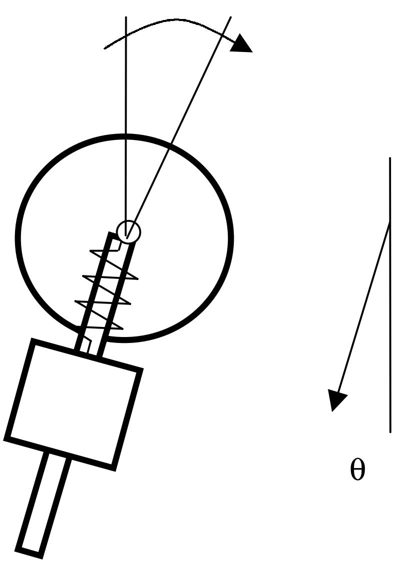
$$v_1 = R\dot{\theta}$$

2) velocità di trascinamento dovuta alla rotazione del disco



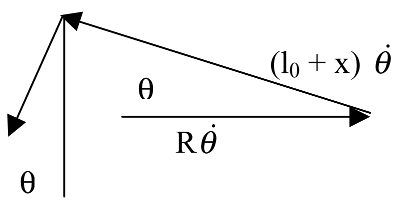
$$v_2 = (x_{mi} + x_0 + x)\ \dot{\theta} = (l_0 + x)\ \dot{\theta}$$

3) velocità relativa dovuta all'oscillazione della slitta



$$v_3 = \dot{x}$$

I tre termini si compongono vettorialmente nel seguente modo



Per il calcolo dell'energia cinetica è necessario calcolare il quadrato della velocità assoluta. Di conseguenza è possibile proiettare le singole componenti in orizzontale ed in verticale e successivamente applicare il teorema di Pitagora.

$$(V_x)^2 = (R\dot{\theta} - (l_0 + x)\ \dot{\theta}\cos\theta - \dot{x}\sin\theta)^2$$

$$(V_y)^2 = ((l_0 + x)\ \dot{\theta}\sin\theta - \dot{x}\cos\theta)^2$$

Sviluppando i quadrati (nella prima colonna il trinomio e nella seconda il binomio), si ottiene:

$V^2 =$	$(V_x)^2$	$+$	$(V_y)^2$
	$R^2\,\dot\theta^2$		
	$+ (l_0 + x)^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2$		$(l_0 + x)^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2$
	$+ \sin^2\theta\,\dot x^2$		$+ \cos^2\theta\,\dot x^2$
	$- 2R(l_0+x)\cos\theta\,\dot\theta^2$		
	$- 2R\sin\theta\,\dot\theta\,\dot x$		
	$+ 2(l_0+x)\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\,\dot X$		$- 2(l_0+x)\cos\theta\sin\theta\,\dot\theta\,\dot X$

Effettuando le opportune semplificazioni si ottiene:

$$V^2 = R^2\dot\theta^2 + (l_0 + x)^2\dot\theta^2 + \dot x^2 - 2R(l_0+x)\cos\theta\,\dot\theta^2 - 2R\sin\theta\,\dot\theta\,\dot x$$

E quindi, nota la velocità assoluta del baricentro si ottiene l'espressione dell'energia cinetica dovuta alla slitta:

$$E_c = \frac{1}{2}\,M_s\left(R^2\dot\theta^2 + (l_0 + x)^2\dot\theta^2 + \dot x^2 - 2R(l_0+x)\cos\theta\,\dot\theta^2 - 2R\sin\theta\,\dot\theta\,\dot x\right) + \frac{1}{2}J_s\,\dot\theta^2$$

Linearizzazione delle equazioni

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio statico del sistema che può essere individuata imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = M_s g(1 - \cos\theta) + Kx$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = M_s g(l_0 + x)\sin\theta + 2KR^2\theta$$

Sicuramente una condizione di equilibrio è data dalla coppia di variabili:

$$x = 0$$
$$\theta = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad M_s g(l_0 + x)\cos\vartheta + 2KR^2 > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \Rightarrow \quad K(M_s g(l_0 + x)\cos\vartheta + 2KR^2) - (M_s g \sin\vartheta)^2 > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

<u>Linearizzazione dell'energia potenziale</u>

$$V = V(x,\theta) \cong V\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{x^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} x\theta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui, ricordando che l'espressione rigorosa dell'energia potenziale è data da:

$$E_p = M_s g(l_0+x)(\ 1 - \cos\theta) + \frac{1}{2}K(R\theta)^2 + \frac{1}{2}\ K(R\theta)^2 + \frac{1}{2}\ Kx^2$$

Di cui l'unico termine da linearizzare è il primo:

$$E_{p1} = M_s g(l_0+x)(\ 1 - \cos\theta)$$

che, opportunamente svolto dà:

$$E_{p1} = M_s g l_0(1 - \cos\theta) + M_s g x(1 - \cos\theta)$$

Eseguendo le opportune derivazioni si ottiene:

$$\left.\frac{\partial^2 E_{p1}}{\partial x^2}\right|_{0,0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_{p1}}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = [Mg\,(L_0 + x)\cos\theta]|_{0,0} = MgL_0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_{p1}}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = Mg\,\sin\theta = 0$$

Da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2} Mgl_0\theta^2 + K(R\theta)^2 + \frac{1}{2} Kx^2$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

L'energia cinetica può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

e quindi la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni linearizzate è:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j\dot{q}_k$$

Ricordando l'espressione rigorosa dell'energia cinetica:

$$E_c = \frac{1}{2} M_s\,(R^2\dot{\theta}^2 + (l_0 + x)^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2R(l_0+x)\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - 2R\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{x} + \frac{1}{2} J_s\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_d\,(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_d\,\dot{\theta}^2$$

Per quanto sopra affermato la linearizzazione dell'energia cinetica può essere ottenuta sostituendo nei coefficienti i valori corrispondenti alla posizione di equilibrio statico ($x = 0$, $\theta = 0$):

$$E_c = \frac{1}{2} M_s\,(R^2\dot{\theta}^2 + l_0^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2 - 2Rl_0\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} J_s\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} M_d\,(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J_d\,\dot{\theta}^2$$

<u>Secondo quesito: equazioni di equilibrio linearizzate</u>

Applicando il metodo di Lagrange le equazioni di equilibrio linearizzate sono:

<u>Prima equazione:</u>

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = M_s\left(R^2 + l_0^2 - 2Rl_0\right)\dot{\theta} + J_s\dot{\theta} + M_d R^2\dot{\theta} + J_d\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[M_s\left(R^2 + l_0^2 - 2Rl_0\right) + J_s + M_d R^2 + J_d\right]\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \left(M_s g l_0 + 2KR^2\right)\theta$$

<u>Seconda equazione:</u>

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M_s\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M_s\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} M_s\left(R^2 + l_0^2 - 2Rl_0\right) + J_s + M_d R^2 + J_d & 0 \\ 0 & M_s \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta} \\ \ddot{x}\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} M_s g l_0 + 2KR & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta \\ x\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0 \\ 0\end{Bmatrix}$$

Terzo quesito: determinare le frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche (nel nostro caso diagonali) e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo $\{x(t)\}=\{X_0\}e^{i\omega_0 t}$, che, sostituite nel sistema, danno

$$\left[-\omega_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]=0$$

ovvero di

$$\begin{aligned}&(M_sR^2+M_sl_0^2-2M_sRl_0+J_s+M_dR^2+J_d)\omega_0^4+...\\&+((M_sgl_0+2KR)M_s+K(M_sR^2+M_sl_0^2-2M_sRl_0+J_s+M_dR^2+J_d))\omega_0^2+(M_sgl_0+2KR)K=0\end{aligned}$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in ω_0^2, del tipo

$$a\omega_0^4+b\omega_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti,

$$\omega_{0I,II}=\pm\sqrt{\frac{K}{M_s}}$$

$$\omega_{0III,IV}=\pm\sqrt{\frac{M_sgl_0+2KR}{M_s\left(R^2+l_0^2-2Rl_0\right)+J_s+M_dR^2+J_d}}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori. Infatti l'inversa della matrice di massa è

$$\left[M\right]^{-1}=\begin{bmatrix}1\Big/\left[M_s\left(R^2+l_0^2-2Rl_0\right)+J_s+M_dR^2+J_d\right] & 0\\ 0 & 1/M_s\end{bmatrix}$$

e

$$\left[A\right]=\left[M\right]^{-1}\left[K\right]=\begin{bmatrix}\left(M_sgl_0+2KR\right)\Big/\left[M_s\left(R^2+l_0^2-2Rl_0\right)+J_s+M_dR^2+J_d\right] & 0\\ 0 & K/M_s\end{bmatrix}$$

per cui

$$-\lambda[I]+[A]=\{0\} \text{con } \lambda=\omega_0^2$$

e quindi

$$\lambda_1=\omega_{01}^2=\frac{K}{M_s}$$

$$\lambda_2=\omega_{02}^2=\frac{M_s g l_0+2KR}{M_s\left(R^2+l_0^2-2Rl_0\right)+J_s+M_d R^2+J_d}$$

I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente, essendo le equazioni disaccoppiate,

$$\begin{Bmatrix}\theta\\x\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix};\begin{Bmatrix}\theta\\x\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1\\0\end{Bmatrix}$$

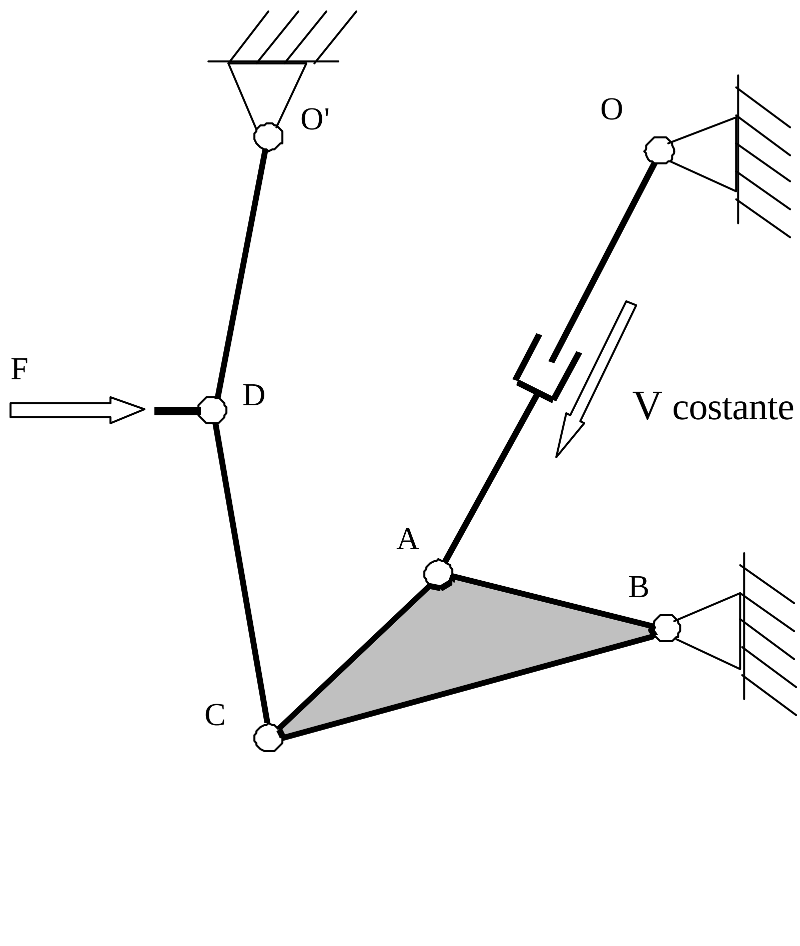
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 21 giugno 2000

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, nella configurazione rappresentata:

a) la velocità e l'accelerazione del punto D;
b) la forza motrice che deve essere generata dall’attuatore lineare OA;
c) le reazioni nella cerniera O’.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale;
- la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezza);
- la velocità lineare relativa generata dall’attuatore lineare sia V costante;
- l’unico elemento dotato di massa sia ABC, di cui sono noti la massa (M) ed il momento di inerzia baricentrico (J).
- gli attriti siano trascurabili;
- la forza F applicata in D sia orizzontale.



Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata.

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto O'	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto A	Circonferenza centrata in B	?	?
Punto B	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto C	Circonferenza centrata in B	?	?
Punto D	Circonferenza centrata in O'	?	?

La velocità del punto D

La velocità di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

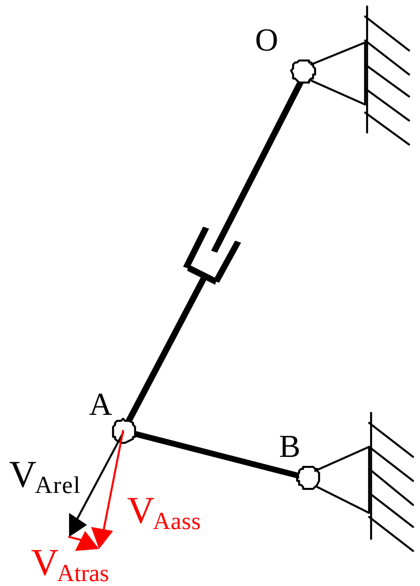
- si posiziona nel punto O una terna rotante solidalmente ad OA e si determina la velocità assoluta del punto A;
- nota la velocità assoluta di A si determina la velocità angolare di ABC e quindi quella di C;
- si posiziona nel punto C una terna traslante di moto circolare attorno a B e si esprime la velocità assoluta di D come somma vettoriale della velocità di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

Velocità assoluta di A

Riassumendo, in riferimento alla terna mobile rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{A\ ass}$	=	$V_{A\ trasc}$	$V_{A\ rel.}$
modulo	?		?	v
direzione	$\perp$ BA		$\perp$ OA	// OA

Da cui graficamente si ha:



Prima di procedere conviene ricavare la velocità angolare dell'asta BA, che ruota in verso antiorario:

$$\omega_{BA} = \frac{V_{Aass}}{BA}$$

che verrà nel seguito utilizzata per determinare la velocità assoluta di C e l'accelerazione assoluta di B.

Velocità assoluta di C

Conoscendo la velocità angolare di ω_{BA} si ha:

$$V_{Cass} = \omega_{BA} BA$$

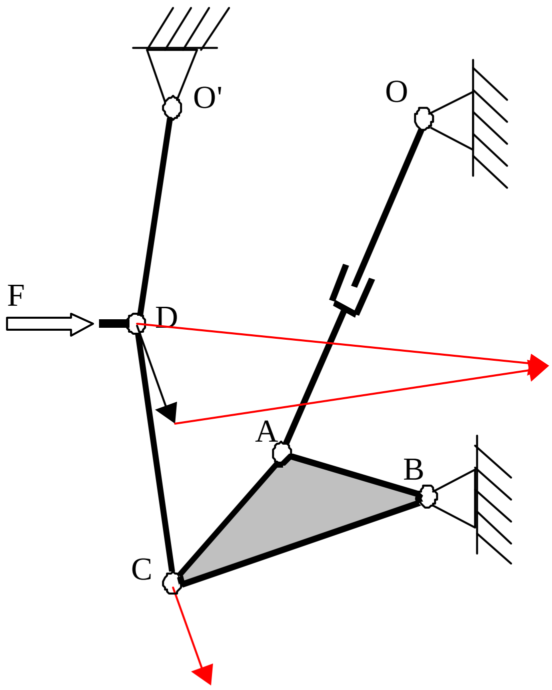
ovviamente diretta verso il basso come conseguenza della velocità angolare antioraria.

Velocità assoluta di D

Riassumendo, in riferimento alla terna traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{D\,ass}$	=	$V_{C\,ass}$	V_{DC}
modulo	?		ω_{BA} BC	?
direzione	⊥ O'D		⊥ BC	⊥ DC

Da cui graficamente si ha:



La velocità angolare dell'asta O'D, che ruota in verso antiorario, è:

$$\omega_{O'D} = \frac{V_{Dass}}{O'D}$$

e sarà nel seguito utilizzata per determinare l'accelerazione di D.

La velocità angolare dell'asta CD, che ruota in verso orario, è:

$$\omega_{CD} = \frac{V_{CD}}{CD}$$

e sarà nel seguito utilizzata per determinare l'accelerazione di D.

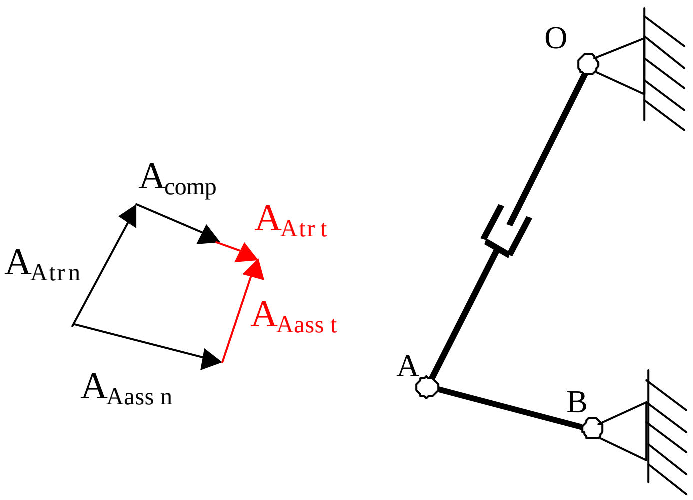
La accelerazione del punto D

La accelerazione di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:
- si posiziona nel punto O una terna rotante solidalmente ad OA e si determina la accelerazione assoluta del punto A;
- nota la accelerazione assoluta di A si determina quella angolare di ABC e quindi quella di C;
- si posiziona nel punto C una terna traslante di moto circolare attorno a B e si esprime la accelerazione assoluta di D come somma vettoriale della accelerazione di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

Accelerazione assoluta di A

In riferimento alla terna mobile rotante già utilizzata per la determinazione della velocità si ha:

	$A_{Aass\,n}$	$A_{Aass\,t}$	=	$A_{Atr\,n}$	$A_{Atr\,t}$	$A_{A\,rel}$	A_{com}
modulo	$ù^{2}_{BA}AB$	?		$ù^{2}_{BA}OA$	?	0	$2ù_{OA}v$
direzione	// AB verso B	$\perp$ AB		// OA verso O	$\perp$ OA	// OA	$\perp$ OA



L'accelerazione angolare dell'asta BA, diretta in verso orario:

$$\dot{\omega}_{BA} = \frac{A_{Aasst}}{BA}$$

verrà utilizzata per determinare l'accelerazione di C e quindi di D.

Accelerazione assoluta di C

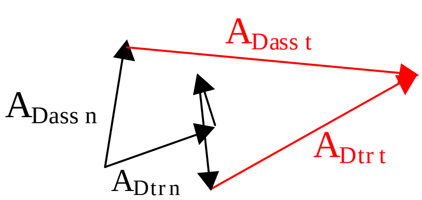
Il punto C ruota attorno ad O con velocità ed accelerazione angolari note per cui è possibile determinare la sua accelerazione assoluta:

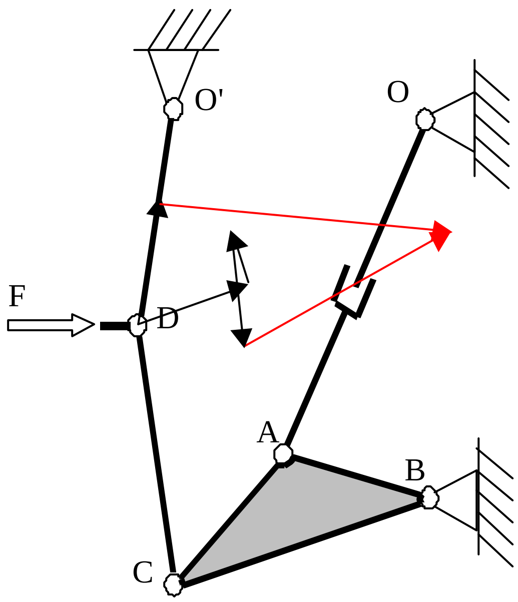
	A_{Cass}	=	$A_{Cass\ n}$	$A_{Cass\ t}$
modulo	?		$\omega_{BA}^2 BC$	$\dot{\omega}_{BA} BC$
direzione	?		// BC	⊥ BC

Accelerazione assoluta di D

In riferimento alla terna mobile traslante già utilizzata per la determinazione della velocità si ha:

	$A_{D\ n}$	$A_{D\ t}$	=	$A_{Cass\ n}$	$A_{Cass\ t}$	$A_{DC\ n}$	$A_{DC\ t}$
modulo	$\omega_{O'D}^2 O'D$	?		$\omega_{AB}^2 BC$	$\dot{\omega}_{AB} BC$	$\omega_{CD}^2 CD$	?
direzione	// O'D	⊥O'D		// BC	⊥ BC	// CD	⊥ CD





La forza F sviluppata dall'attuatore lineare

Per il calcolo della forza F che l'attuatore lineare deve sviluppare per garantire il moto, si può ricorrere ad un bilancio di potenze.

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Per scrivere il bilancio sopra riportato bisogna conoscere la cinematica del corpo ABC ed in particolare del suo baricentro che chiameremo G.

Velocità assoluta di G

Conoscendo la velocità angolare di ω_{BA} si ha:

$$V_{Gass} = \omega_{BA} GA$$

ovviamente diretta verso il basso come conseguenza della velocità angolare antioraria.

Accelerazione assoluta di G

Il punto G ruota attorno ad O con velocità ed accelerazione angolari note per cui è possibile determinare la sua accelerazione assoluta:

	A_{Gass}	=	$A_{Gass\,n}$	$A_{Gass\,t}$
modulo	?		$\omega_{BA}^2 GC$	$\dot{\omega}_{BA} GC$
direzione	?		// GC	$\perp$GC

La variazione di energia cinetica del sistema coincide con quella del corpo ABC:

$$\frac{dE_C}{dT} = M_{ABC} \vec{v}_G \times \vec{a}_G + J_{ABC} \vec{\omega}_{AB} \times \dot{\vec{\omega}}_{AB}$$

La potenza motrice è fornita dall'attuatore lineare per cui:

$$W_m = \vec{F} \times \vec{v}$$

dove la velocità da considerarsi è quella relativa.

La potenza resistente vede in gioco il contributo della forza F e della forza peso:

$$W_r = -\vec{F} \times \vec{v}_d - M_{ABC} \vec{g} \times \vec{v}_G$$

L'equazione dell'energia risulta quindi essere:

$$M_{ABC} \vec{v}_G \times \vec{a}_G + J_{ABC} \vec{\omega}_{AB} \times \dot{\vec{\omega}}_{AB} = \vec{F} \times \vec{v} + \vec{F} \times \vec{v}_d + M_{ABC} \vec{g} \times \vec{v}_G$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F.

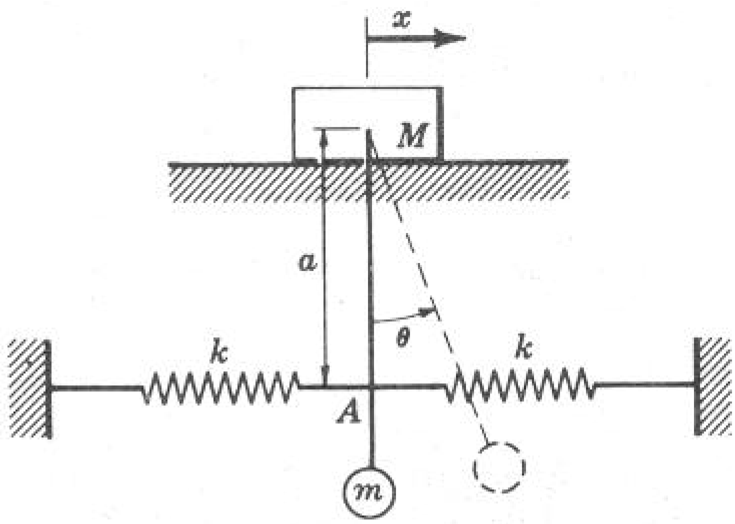
<u>Le reazioni vincolari in O'</u>

Osservato che DO' e BC sono entrambe delle bielle, per cui è nota la direzione della reazione da esse esercitate, è possibile spezzare l'asta DC ed eliminare la cerniera in O' sostituendole con le rispettive reazioni. Scrivendo l'equilibrio di questa parte del sistema è possibile trovare la reazione esercitata dalla cerniera O'.

Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

a) Scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
b) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) Determinare le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare.

Il sistema è costituito da una slitta che oscilla liberamente su una superficie piana priva di attrito; alla slitta è incernierato un pendolo semplice di lunghezza L e massa m.



Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

x oscillazione della slitta sul piano.
L'origine coincide con un punto sulla verticale tracciata per A, punto equidistante dagli agganci delle due molle.

θ oscillazione del pendolo
L'origine coincide con la condizione di pendolo verticale.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella della slitta e di quella del pendolo:

$$E_{c-slitta} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$E_{c-pendolo} = \frac{1}{2} mV^2 + \frac{1}{2} J\theta^2$$

Dove V rappresenta la velocità del baricentro del pendolo:

$$V = \frac{d}{dt}(x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) = \frac{d}{dt}\left[(x + l\sin\theta)\vec{i} + (l\cos\theta)\vec{j}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})\vec{i} + (l\cos\theta\dot{\theta})\vec{j}\right] =$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (slitta e pendolo) e di quella elastica (molle):

$$E_{p-slitta} = \text{costante}$$

$$E_{p-pendolo} = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E_{p-molle} = \frac{1}{2} K(x + a\,\text{sen}\,\theta)^2$$

La deformazione delle molle è stata calcolata nell'ipotesi che queste rimangano orizzontali e che la variazione di quota a sia trascurabile. In alternativa si poteva considerare costante la quota delle molle, nel qual caso la deformazione dovuta all'asta sarebbe stata proporzionale alla tangente. Le due soluzioni sono da ritenersi equivalenti.

L'energia potenziale totale, a meno dei termini costanti, è:

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) + K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

<u>Equazioni differenziali non lineari</u>

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}^2 + 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = (ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{x} + mgl\sin\theta + Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (ml^2 + J)\dot{\theta} + ml\cos\theta\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (ml^2 + J)\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -mL\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\sin\theta + 2Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori x = 0, θ = 0 delle variabili.
Tale posizione di equilibrio va verificata imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\sin\theta + 2Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta$$

Sicuramente una condizione di equilibrio è data dalla coppia di variabili:

$$x = 0$$
$$\theta = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad mgl\cos\theta + Ka\cos^2\theta - Ka\,\mathrm{sen}^2\,\theta$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \quad 2Kmgl\cos\theta + Ka\cos^2\theta - Ka\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2Ka\cos\theta > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile, per tutti i valori di n pari. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(x,\theta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:
- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;

- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} = 2K$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = mgl\cos\theta + 2Ka\cos^2\theta - 2Ka\,\mathrm{sen}^2\theta - 2aKx\,\mathrm{sen}\,\vartheta = mgl + 2Ka$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = 2Ka\cos\theta = 2Ka$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = Kx^2 + 2Kax\theta + (mgl + Ka)\frac{\theta^2}{2}$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2K(x + a\theta) = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\theta)$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\sin\theta +$$
$$+ K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (J+ml^2)\dot{\theta} + ml\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 2Kax + mgl\theta + Ka\theta$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & J+ml^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 2Ka \\ 2Ka & Ka+mgl \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-w_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]\left\{X_0\right\}e^{iw_0 t}=\left\{0\right\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\left\{X_0\right\}=\left\{0\right\}$, occorre che le w_0 siano le radici di:

$$\det\left[-w_0^2\left[M\right]+\left[K\right]\right]=0$$

ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2(M+m) & 2Ka-\omega_0^2 ml \\ 2Ka-\omega_0^2 ml & Ka+mgl-\omega_0^2(J+ml^2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2 M^* & 2Ka-\omega_0^2 ml \\ 2Ka-\omega_0^2 ml & K^*-\omega_0^2 J^* \end{bmatrix}$$

$$2KK^*-2KJ^*\omega_0^2-M^*K^*\omega_0^2+M^*J^*\omega_0^4-4K^2a^2+4mlKa\omega_0^2+ml\omega_0^4=0$$

$$(M^*J^*+ml)\omega_0^4+(4mlKa-M^*K^*-2KJ^*)\omega_0^2+2KK^*-4K^2a^2=0$$

Si tratta di un’equazione algebrica di secondo grado in w_0^2, del tipo

$$aw_0^4+bw_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{0I,II}=\frac{-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*+\sqrt{\left((-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*)^2-4(M^*J^*+ml)(2KK^*-4K^2a^2)\right)}}{2(M^*J^*+ml)}$$

$$\omega_{0III,IV}=\frac{-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*-\sqrt{\left((-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*)^2-4(M^*J^*+ml)(2KK^*-4K^2a^2)\right)}}{2(M^*J^*+ml)}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori in quanto:

$$\lambda_1=\omega_{01}^2$$
$$\lambda_2=\omega_{02}^2$$

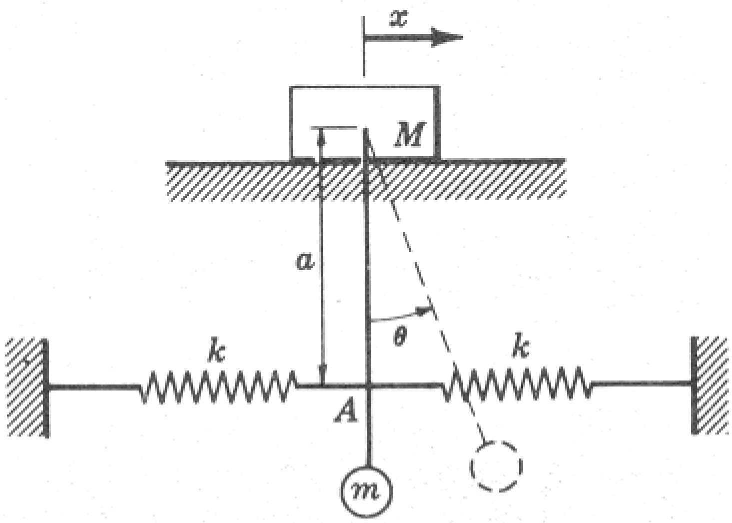
I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}$$

Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

a) Scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
b) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) Determinare le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare.

Il sistema è costituito da una slitta che oscilla liberamente su una superficie piana priva di attrito; alla slitta è incernierato un pendolo semplice di lunghezza L e massa m.



Analisi del sistema

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

x oscillazione della slitta sul piano.
L'origine coincide con un punto sulla verticale tracciata per A, punto equidistante dagli agganci delle due molle.

θ oscillazione del pendolo
L'origine coincide con la condizione di pendolo verticale.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella della slitta e di quella del pendolo:

$$E_{c-slitta} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$E_{c-pendolo} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} J \theta^2$$

Dove V rappresenta la velocità del baricentro del pendolo:

$$V = \frac{d}{dt}(x_G \vec{i} + y_G \vec{j}) = \frac{d}{dt}\left[(x + l\sin\theta)\vec{i} + (l\cos\theta)\vec{j}\right] =$$

$$= \frac{d}{dt}\left[(\dot{x} + l\cos\theta\dot{\theta})\vec{i} + (l\cos\theta\dot{\theta})\vec{j}\right] =$$

$$V^2 = \dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (slitta e pendolo) e di quella elastica (molle):

$$E_{p-slitta} = \text{costante}$$

$$E_{p-pendolo} = mgl(1 - \cos\theta)$$

$$E_{p-molle} = \frac{1}{2} K (x + a\,\text{sen}\,\theta)^2$$

La deformazione delle molle è stata calcolata nell'ipotesi che queste rimangano orizzontali e che la variazione di quota a sia trascurabile. In alternativa si poteva considerare costante la quota delle molle, nel qual caso la deformazione dovuta all'asta sarebbe stata proporzionale alla tangente. Le due soluzioni sono da ritenersi equivalenti.

L'energia potenziale totale, a meno dei termini costanti, è:

$$E_p = mgl(1-\cos\theta) + K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)^2$$

Equazioni differenziali non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}^2 + 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta) = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\cos\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\cos\theta\ddot{\theta} - ml\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = (ml^2 + J)\ddot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{x} + mgl\sin\theta + Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (ml^2 + J)\dot{\theta} + ml\cos\theta\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (ml^2 + J)\ddot{\theta} - ml\sin\theta\dot{x}\dot{\theta} + ml\cos\theta\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -mL\sin\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\sin\theta + 2Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori x = 0, θ = 0 delle variabili.
Tale posizione di equilibrio va verificata imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\sin\theta + 2Ka(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta$$

Sicuramente una condizione di equilibrio è data dalla coppia di variabili:

$$x = 0$$
$$\theta = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow mgl\cos\theta + 2Ka\left[a\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) - x\sin\theta\right]$$

$mgl + 2Ka^2$ nella posizione di equilibrio

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0}\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \quad 2Kmgl\cos\theta + Ka\cos^2\theta - Ka\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2Ka\cos\theta > 0$$

$2Kmgl$ nella posizione di equilibrio

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile, per tutti i valori di n pari. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(x,\theta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} = 2K$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = mgl\cos\theta + 2Ka\cos^2\theta - 2Ka\,\mathrm{sen}^2\,\theta - 2aKx\,\mathrm{sen}\,\vartheta = mgl + 2Ka^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = 2Ka\cos\theta = 2Ka$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = Kx^2 + 2Kax\theta + (mgl + 2Ka)\frac{\theta^2}{2}$$

<u>Linearizzazione dell'energia cinetica</u>

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

<u>Equazioni linearizzate</u>

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} + 2K(x + a\theta) = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x} + ml\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2K(x + a\theta)$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = (J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x} + mgl\sin\theta + K(x + a\,\mathrm{sen}\,\theta)\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (J + ml^2)\dot{\theta} + ml\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (J + ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 2Kax + mgl\theta + 2Ka\theta$$

ovvero

$$\begin{bmatrix} M+m & ml \\ ml & J+ml^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & 2Ka \\ 2Ka & 2Ka + mgl \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<u>Frequenze proprie del sistema</u>

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\} e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]=0$$

ponendo $M+m=M^*;\ J+ml^2=J^*$ e $2Ka+mgl=K^*$ otteniamo:

$$\det\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2(M+m) & 2Ka-\omega_0^2 ml \\ 2Ka-\omega_0^2 ml & Ka+mgl-\omega_0^2(J+ml^2) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2 M^* & 2Ka-\omega_0^2 ml \\ 2Ka-\omega_0^2 ml & K^*-\omega_0^2 J^* \end{bmatrix}$$

$$2KK^*-2KJ^*\omega_0^2-M^*K^*\omega_0^2+M^*J^*\omega_0^4-4K^2a^2+4mlKa\omega_0^2+m^2l^2\omega_0^4=0$$

$$(M^*J^*+m^2l^2)\omega_0^4+(4mlKa-M^*K^*-2KJ^*)\omega_0^2+2KK^*-4K^2a^2=0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in ω_0^2, del tipo

$$a\omega_0^4+b\omega_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{0I,II}=\frac{-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*+\sqrt{\left((-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*)^2-4(M^*J^*+m^2l^2)(2KK^*-4K^2a^2)\right)}}{2(M^*J^*+ml)}$$

$$\omega_{0III,IV}=\frac{-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*-\sqrt{\left((-4mlKa+M^*K^*+2KJ^*)^2-4(M^*J^*+m^2l^2)(2KK^*-4K^2a^2)\right)}}{2(M^*J^*+ml)}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori in quanto:

$$\lambda_1=\omega_{01}^2$$
$$\lambda_2=\omega_{02}^2$$

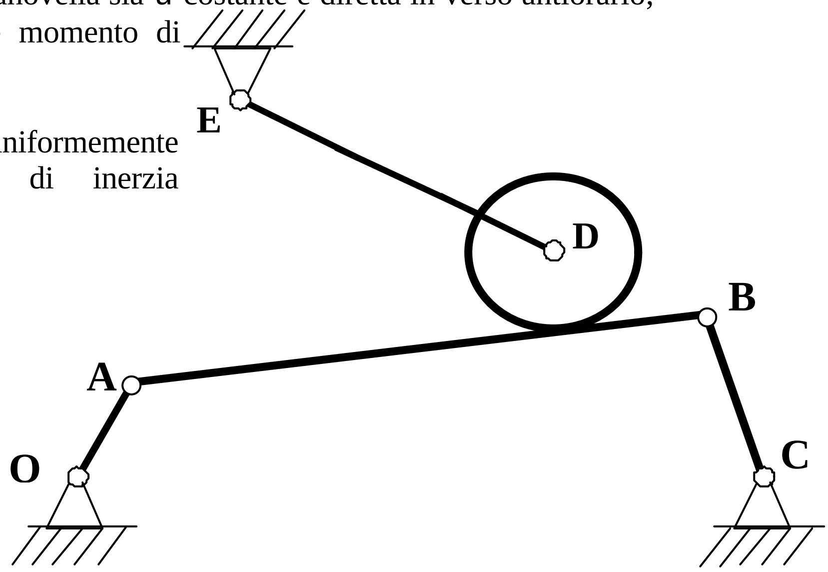
I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente:

$$\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 05 luglio 2000

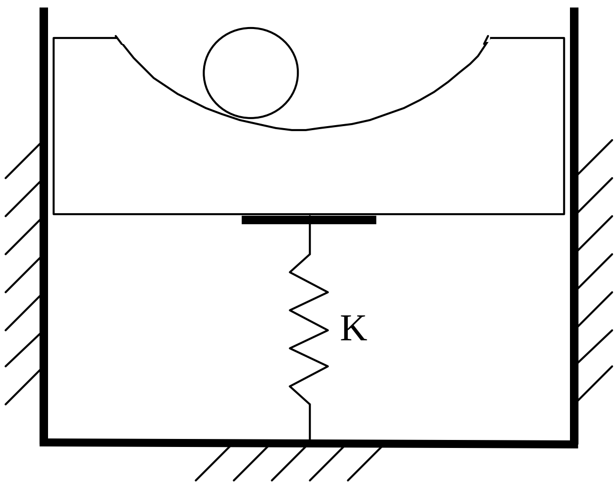
Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, nella configurazione rappresentata:
a) la velocità e l'accelerazione del punto D, centro del disco;
b) la velocità angolare e l'accelerazione angolare del disco;
c) la coppia motrice applicata alla manovella OA;
d) le reazioni nella cerniera E.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:
- il sistema operi in un piano verticale;
- la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezza);
- la velocità angolare della manovella sia ù costante e diretta in verso antiorario;
- il disco abbia massa M e momento di inerzia J;
- gli attriti siano trascurabili;
- l'asta ED abbia massa m (uniformemente distribuita) e momento di inerzia baricentrico j.



Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:
a) Scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
b) Scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) Determinare le frequenze proprie e i relativi modi di vibrare.

Il sistema è costituito da una slitta di massa M vincolata a muoversi verticalmente da due guide laterali prive di attrito e da un disco circolare di raggio r e massa m che rotola senza strisciare sulla parte superiore concava della slitta (geometricamente descrivibile come un arco di circonferenza di raggio R). La slitta appoggia poi su un supporto elastico schematizzabile come una molla con costante elastica K.



Es. 3 – Discutere il fenomeno delle velocità critiche flessionali ricorrendo agli opportuni sviluppi analitici.

Es. 1: Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata.

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto A	Circonferenza centrata in O	Nota	Nota
Punto B	Circonferenza centrata in O	?	?
Punto C	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto D	Circonferenza centrata in E	?	?
Punto E	Punto a terra	Nulla	Nulla

La velocità del punto D

La velocità di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

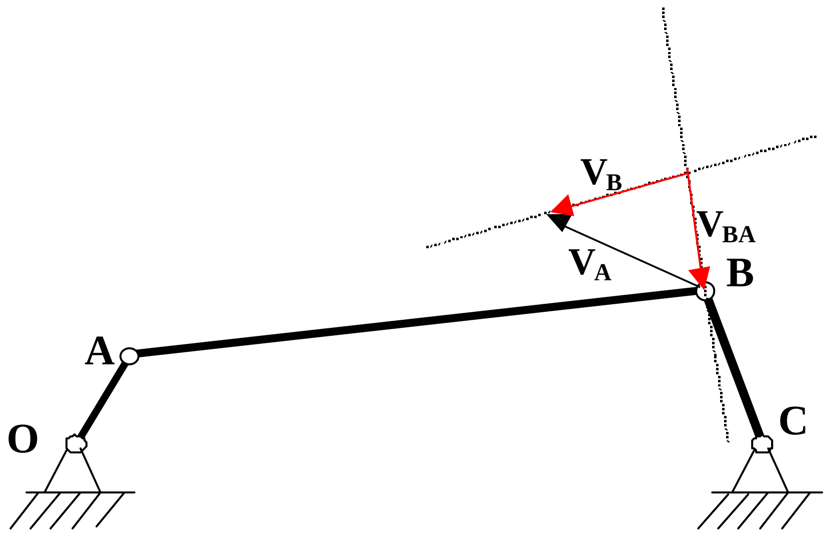
- si posiziona nel punto A una terna traslante di moto circolare attorno ad O e si determina la velocità assoluta del punto B (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (nota solo in direzione);
- si posiziona nel punto A una terna rototraslante solidale all'asta AB e si ricava la velocità assoluta del punto D (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione).

Velocità assoluta di B

In riferimento alla terna mobile traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{B\ ass}$	=	$V_{B\ trasc}$	$V_{B\ rel.}$
modulo	?		ωOA	?
direzione	$\perp$ CB		$\perp$ OA	$\perp$ AB

Da cui graficamente si ha:



Sono ora note le velocità angolari delle altre due aste:

- asta BA (verso orario)

$$\omega_{BA} = \frac{V_{BA}}{BA}$$

- asta BC (verso antiorario)

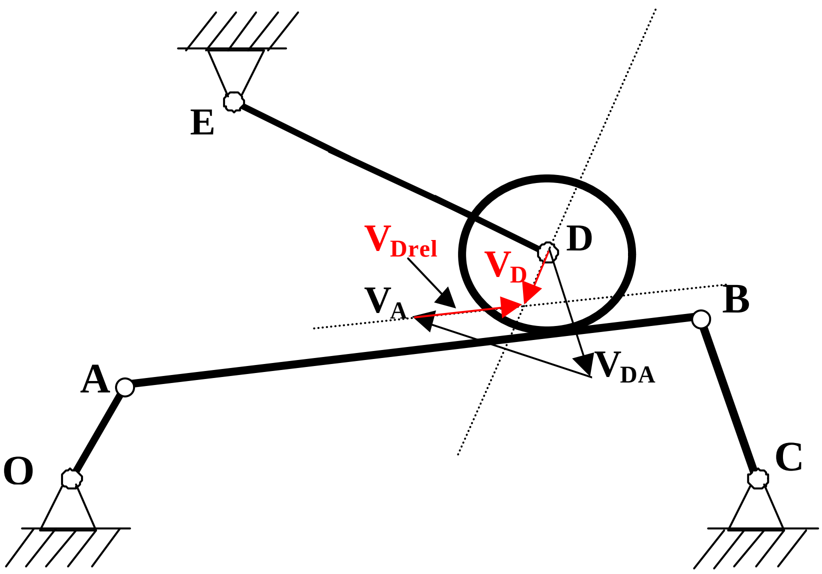
$$\omega_{BC} = \frac{V_B}{BC}$$

Velocità assoluta di D

In riferimento alla terna rototraslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{D\ ass}$	=	$V_{D\ trasc\ (traslazione)}$	$V_{D\ trasc\ (rotazione)}$	$V_{D\ relativa}$
modulo	?		ω OA	ω_{BA} DA	?
direzione	$\perp$ ED		$\perp$ OA	$\perp$ DA	// AB

Da cui graficamente si ha:



E' nota la velocità angolare dell'asta ED:

- asta ED (verso orario)

$$\omega_{ED} = \frac{V_D}{ED}$$

La accelerazione del punto D

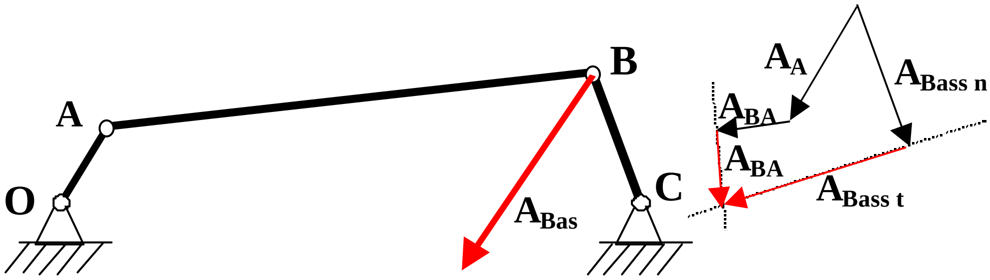
La accelerazione di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

- sfruttando la terna traslante posizionata in A si determina la accelerazione assoluta del punto B (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione);
- si posiziona nel punto A una terna rototraslante solidale all'asta AB e si ricava la accelerazione assoluta del punto D (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione).

Accelerazione assoluta di B

In riferimento alla terna mobile rotante già utilizzata per la determinazione della accelerazione di B si ha:

	$A_{Bass\ n}$	$A_{Bass\ t}$	=	$A_{A\ n}$	$A_{A\ t}$	$A_{BA\ n}$	$A_{BA\ t}$
modulo	$\omega_{BC}^2 BC$	?		$\omega^2 OA$	0	$\omega_{BA}^2 BA$	?
direzione	// BC verso C	$\perp$ BC		// OA verso O	$\perp$ OA	// BA verso A	$\perp$ BA



Sono ora note le accelerazioni angolari delle altre due aste:

- asta BA (verso orario)

$$\dot{\omega}_{BA} = \frac{A_{BAt}}{BA}$$

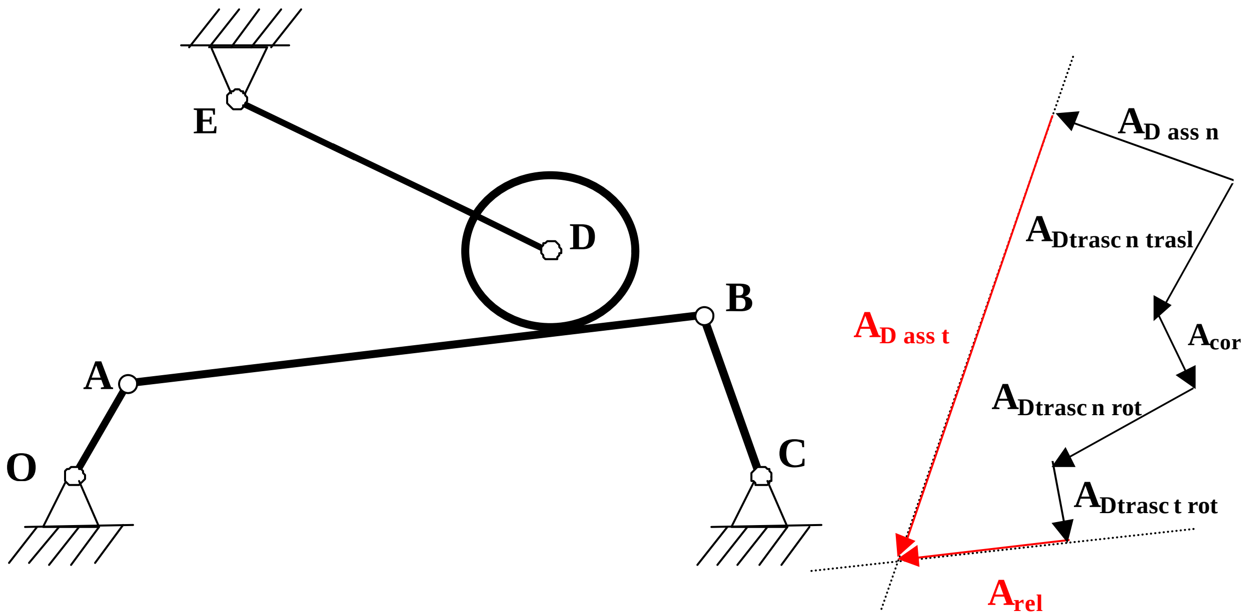
- asta BC (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{A_{Basst}}{BC}$$

Accelerazione assoluta di D

In riferimento alla terna rototraslante precedentemente introdotta l'accelerazione assoluta di D è data dalla seguente tabella:

	$A_{Dass\ n}$	$A_{Dass\ t}$	=	$A_{D\ trasc\ n\ trasl}$	$A_{D\ trasc\ n\ rot}$	$A_{D\ trasc\ t\ rot}$	A_{compl}	A_{rel}
Mod.	$\omega_{ED}^2 ED$	?		$\omega^2 OA$	$\omega_{BA}^2 DA$	$\dot{\omega}_{BA} DA$	$2 w_{BA} V_{rel}$	?
Dir.	// ED verso E	$\perp$ ED		// OA verso O	// DA verso A	$\perp$ DA	$\perp$ BA	// BA



E' ora nota l'accelerazione angolare dell'asta DE:

- asta DE (verso orario)

$$\dot{\omega}_{DE} = \frac{A_{DEt}}{DE}$$

La velocità e l'accelerazione angolare del disco

Entrambe le quantità, espresse relativamente all'asta AB, possono essere agevolmente determinate dalla conoscenza della velocità e dell'accelerazione relativa del punto D, unitamente a quella del raggio R del disco.
Volendo passare alla velocità ed all'accelerazione angolari assolute del disco bisognerà sommare a quelle relative sopra determinate la velocità e l'accelerazione angolari dell'asta AB.

La coppia motrice applicata alla manovella OA;

Per il calcolo della coppia M che la manovella deve sviluppare per garantire il moto, si può ricorrere ad un bilancio di potenze.

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Per scrivere il bilancio sopra riportato bisogna conoscere la cinematica dell'asta DE ed in particolare del suo baricentro G che supporremo essere equidistante dai due estremi.

Velocità assoluta di G

Conoscendo la velocità angolare di ω_{ED} si ha:

$$V_{Gass} = \omega_{ED} ED$$

ovviamente diretta verso sinistra come conseguenza della velocità angolare oraria.

Accelerazione assoluta di G

Il punto G ruota attorno ad E con velocità ed accelerazione angolari note per cui è possibile determinare la sua accelerazione assoluta:

	A_{Gass}	=	$A_{Gass\,n}$	$A_{Gass\,t}$
modulo	?		$\omega_{ED}^2 ED$	$\dot{\omega}_{ED} ED$
direzione	?		// ED verso E	$\perp$ED

La variazione di energia cinetica del sistema coincide con la somma di quella dell'asta ED e del disco. Per quanto riguarda la velocità e l'accelerazione angolare del disco essa sarà il risultato della somma vettoriale della velocità e dell'accelerazione angolare relativa e di quella di trascinamento.

$$\frac{dE_C}{dT} = m\vec{v}_G \times \vec{a}_G + j\vec{w}_{ED} \times \dot{\vec{w}}_{ED} + M\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\vec{w}_{Dass} \times \dot{\vec{w}}_{Dass}$$

La potenza motrice è fornita dalla manovella per cui:

$$W_m = \vec{M} \times \vec{\omega}$$

La potenza resistente vede in gioco il solo contributo della forza peso:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_D - m\vec{g} \times \vec{v}_G$$

L'equazione dell'energia risulta quindi essere:

$$m\vec{v}_G \times \vec{a}_G + j\vec{\omega}_{ED} \times \dot{\vec{\omega}}_{ED} + M\vec{v}_D \times \vec{a}_D + J\frac{\vec{v}_{rel}}{R} \times \frac{\vec{a}_{rel}}{R} = \vec{M} \times \vec{\omega} + M\vec{g} \times \vec{v}_D + m\vec{g} \times \vec{v}_G$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita M.

Le reazioni vincolari nella cerniera E

L'asta ED è dotata di massa per cui non può essere considerata una biella e quindi le reazioni in E andrà scomposta nella sua componente orizzontale e verticale.
Un modo di procedere che permette di scrivere solo due equazioni (e quindi relativamente semplice) è il seguente:

- annullare il momento rispetto a D, considerando come sottosistema la sola asta ED;
- annullare il momento rispetto ad H (punto di contatto disco-asta AB) considerando come sottosistema l'asta ED ed il disco.

Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

x oscillazione verticale della slitta
L'origine coincide con la condizione di equilibrio statico in cui la molla ha lunghezza x_0, positiva verso l'alto.

θ posizione del centro del disco (espressa rispetto al centro di curvatura della guida)
L'origine coincide con il disco al centro della guida, positiva in verso orario.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella della slitta e di quella del disco:

$$E_{c-slitta} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2$$

$$E_{c-disco} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}J\frac{R^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Dove V rappresenta la velocità del baricentro del disco:

$$V^2 = \dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 - 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta$$

L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2 - 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta\right) + \frac{1}{2}J\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (disco) e di quella elastica (molla):

$$E_{p-disco} = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$E_{p-molla} = \frac{1}{2}Kx^2$$

Si noti come non si sia considerata l'energia potenziale associata alla slitta in quanto si è considerata come origine della coordinata x la condizione di molla in equilibrio statico.
L'energia potenziale totale è:

$$E_p = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Kx^2$$

Equazioni differenziali non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial x}+\frac{\partial E_p}{\partial x}=(M+m)\ddot{x}-2(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2-2(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\theta}+Kx=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}-2(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right)=(M+m)\ddot{x}-2(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2-2(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}=Kx$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial \theta}+\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+mg(R-r)\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}=m(R-r)^2\dot{\theta}+m(R-r)\dot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\ddot{\theta}=$$

$$=\frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta}=m(R-r)\cos\theta\dot{x}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=mg(R-r)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori x = 0, θ = 0 delle variabili.
Tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mg(R-r)\operatorname{sen}\theta = 0$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$x = 0$$
$$\theta = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad mg(R-r)\cos\theta > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad mgK(R-r)\cos\theta > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile, per tutti i valori di n pari. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(x,\theta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:
- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;

- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} = K$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = mg(R-r)$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + mg(R-r)\frac{\theta^2}{2}$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{1}{2}a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2}\frac{1}{2}a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j\dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}J\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}m(R-r)^2\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}m(R-r)^2\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mg(R-r)\theta$$

ovvero, ponendo L=R-r:

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza diagonali e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-w_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{iw_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le w_0 siano le radici di:

$$\det\left[-w_0^2[M]+[K]\right]=0$$

ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} K-\omega_0^2(M+m) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2-\omega_0^2 mgL \end{bmatrix}=$$

$$\frac{3}{2}mL^2K-mgL^2K\omega_0^2-\frac{3}{2}mL^2K\omega_0^2+mg(m+M)L\omega_0^4=0$$

$$mg(m+M)L\omega_0^4-(mgL^2K+\frac{3}{2}mL^2K)\omega_0^2+\frac{3}{2}mL^2K=0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in w_0^2, del tipo

$$aw_0^4+bw_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{0I,II}=\pm\sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$\omega_{0III,IV}=\pm\sqrt{\frac{mgL}{\frac{3}{2}mL^2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{L}}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori in quanto, essendo diagonale, l'inversa della matrice M è semplicemente data da:

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/(m+M) & 0 \\ 0 & 1/\left(\frac{3}{2}mL^2\right) \end{bmatrix}$$

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix} K/(m+M) & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}g/L \end{bmatrix}$$

Per cui si ottiene:

$$-\lambda[\mathrm{I}]+[\mathrm{A}]=\{0\}$$

dove:

$$\lambda=\omega_0^2$$

e quindi si ottiene:

$$\lambda_1=\omega_{01}^2=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}}$$

$$\lambda_2=\omega_{02}^2=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}$$

I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente, essendo le equazioni disaccoppiate,

$$\begin{Bmatrix} q \\ x \end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix};\begin{Bmatrix} q \\ x \end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

x oscillazione verticale della slitta
L'origine coincide con la condizione di equilibrio statico in cui la molla ha lunghezza x_0, positiva verso l'alto.

θ posizione del centro del disco (espressa rispetto al centro di curvatura della guida)
L'origine coincide con il disco al centro della guida, positiva in verso orario.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella della slitta e di quella del disco:

$$E_{c-slitta} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

$$E_{c-disco} = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} J \left(\frac{R-r}{r} \right)^2 \dot{\theta}^2$$

Dove V rappresenta la velocità del baricentro del disco:

$$V^2 = \dot{x}^2 + \left(R-r \right)^2 \dot{\theta}^2 + 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \left(\dot{x}^2 + \left(R-r \right)^2 \dot{\theta}^2 + 2(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta \right) + \frac{1}{2} J \frac{(R-r)^2}{r^2} \dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (disco) e di quella elastica (molla):

$$E_{p-disco} = mg(R-r)(1-\cos\theta)$$

$$E_{p-molla} = \frac{1}{2} K x^2$$

Si noti come non si sia considerata l'energia potenziale associata alla slitta in quanto si è considerata come origine della coordinata x la condizione di equilibrio statico stabile.
L'energia potenziale totale è:

$$E_p = mg(R-r)(1-\cos\theta) + \frac{1}{2} K x^2$$

Equazioni differenziali non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial x}+\frac{\partial E_p}{\partial x}=(M+m)\ddot{x}+(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2+(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\theta}+Kx=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}=(M+m)\dot{x}+(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right)=(M+m)\ddot{x}+(R-r)m\cos\theta\dot{\theta}^2+(R-r)m\,\mathrm{sen}\,\theta\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_c}}{\partial \mathrm{x}}=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial \mathrm{x}}=\mathrm{Kx}$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial \theta}+\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+J\frac{(R-r)^2}{r^2}\ddot{\theta}+mg(R-r)\,\mathrm{sen}\,\theta=0$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_c}}{\partial \dot{\theta}}=\mathrm{m(R-r)^2}\dot{\theta}+\mathrm{m(R-r)}\dot{\mathrm{x}}\,\mathrm{sen}\,\theta+\mathrm{J}\left(\frac{\mathrm{R-r}}{\mathrm{r}}\right)^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)=m(R-r)^2\ddot{\theta}+m(R-r)\ddot{x}\,\mathrm{sen}\,\theta+m(R-r)\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta+J\frac{(R-r)^2}{r^2}\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_c}}{\partial \theta}=\mathrm{m(R-r)}\cos\theta\dot{\mathrm{x}}\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial \theta}=\mathrm{mg(R-r)}\ \mathrm{sen}\ \theta$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori x = 0, θ = 0 delle variabili.
Tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mg(R - r)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$x_0 = 0$$
$$\theta_0 = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad mg(R-r)\cos\theta_0 > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad mgK(R-r)\cos\theta_0 > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile, per tutti i valori di n pari. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche eventualmente non lineari e cioè, in riferimento all'esercizio, l'energia potenziale e l'energia cinetica.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(x,\theta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;

- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} = K$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = mg(R-r)$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2}Kx^2 + mg(R-r)\frac{\theta^2}{2}$$

<u>Linearizzazione dell'energia cinetica</u>

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2}\frac{1}{2}a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j\dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2}\frac{1}{2}a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j\dot{q}_k =$$
$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + (R-r)^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2}J\frac{(R-r)^2}{r^2}\dot{\theta}^2$$

<u>Equazioni linearizzate</u>

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = (M+m)\ddot{x} + Kx = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\dot{x}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\ddot{x}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = \left[m(R-r)^2 + J\frac{(R-r)^2}{r^2}\right]\ddot{\theta} + mg(R-r)\theta = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = \left[m(R-r)^2 + J\frac{(R-r)^2}{r^2}\right]\dot{\theta}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = \left[m(R-r)^2 + J\frac{(R-r)^2}{r^2}\right]\ddot{\theta}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mg(R-r)\theta$$

Si è ipotizzato che il disco sia uniforme per cui: $J = \frac{1}{2}mR^2$ ed inoltre ponendo $L = R - r$ otteniamo:

$$\begin{bmatrix} M+m & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgL \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza diagonali e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]=0$$

ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} K-\omega_0^2(M+m) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}mL^2-\omega_0^2 mgL \end{bmatrix}=$$

$$\frac{3}{2}mL^2K-mgL^2K\omega_0^2-\frac{3}{2}mL^2K\omega_0^2+mg(m+M)L\omega_0^4=0$$

$$mg(m+M)L\omega_0^4-(mgL^2K+\frac{3}{2}mL^2K)\omega_0^2+\frac{3}{2}mL^2K=0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in ω_0^2, del tipo

$$a\omega_0^4+b\omega_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{0I,II}=\pm\sqrt{\frac{K}{M+m}}$$

$$\omega_{0III,IV}=\pm\sqrt{\frac{mgL}{\frac{3}{2}mL^2}}=\pm\sqrt{\frac{2}{3}\frac{g}{L}}$$

Al medesimo risultato saremmo pervenuti riconducendo il problema agli autovalori in quanto, essendo diagonale, l'inversa della matrice M è semplicemente data da:

$$[M]^{-1}=\begin{bmatrix} 1/(m+M) & 0 \\ 0 & 1/\left(\frac{3}{2}mL^2\right) \end{bmatrix}$$

$$[A]=[M]^{-1}[K]=\begin{bmatrix} K/(m+M) & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}g/L \end{bmatrix}$$

Per cui si ottiene:

$$-\lambda[\mathrm{I}]+[\mathrm{A}]=\{0\}$$

dove:

$$\lambda=\omega_0^2$$

e quindi si ottiene:

$$\lambda_1=\omega_{01}^2=\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}+\mathrm{M}}$$

$$\lambda_2=\omega_{02}^2=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{L}}$$

I modi di vibrare associati (autovettori) sono rispettivamente, essendo le equazioni disaccoppiate,

$$\begin{Bmatrix}\theta\\ x\end{Bmatrix}_1=\begin{Bmatrix}0\\ 1\end{Bmatrix};\begin{Bmatrix}\theta\\ x\end{Bmatrix}_2=\begin{Bmatrix}1\\ 0\end{Bmatrix}$$

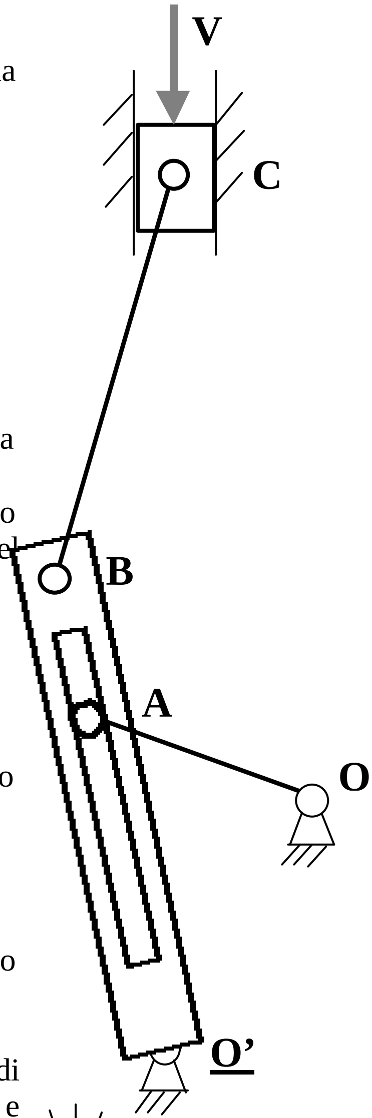
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 06 settembre 2000

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, nella configurazione rappresentata:

a) la velocità e l'accelerazione angolare della manovella OA;
b) la coppia che deve essere applicata alla stessa;
c) le reazioni nella cerniera O.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

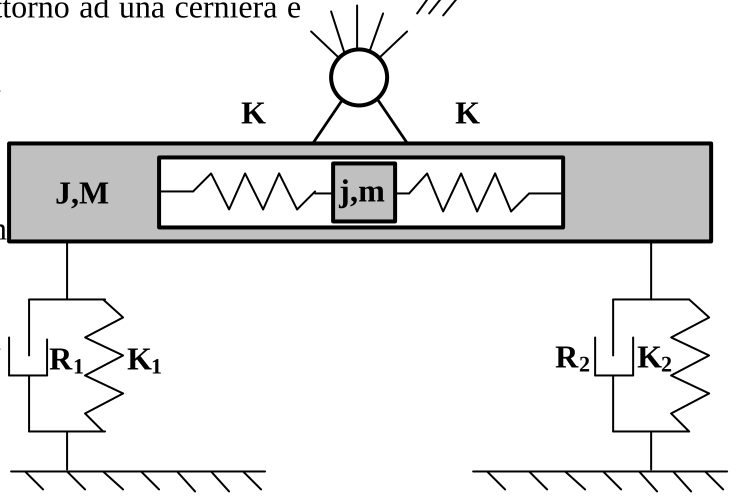
- il sistema operi in un piano verticale;
- la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezza);
- la velocità V della slitta C sia costante; la stessa slitta sia sottoposta ad una forza F diretta verso il basso;
- il glifo O'B abbia massa M e momento di inerzia baricentrico J; si posizioni il baricentro al termine della parte inferiore del corsoio;
- gli attriti siano trascurabili.



Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

a) scrivere le equazioni di equilibrio non lineari;
b) scrivere le equazioni di equilibrio dinamico linearizzate;
c) determinare le frequenze proprie del sistema non smorzato;
d) descrivere come è possibile ottenere le equazioni del moto libero del sistema smorzato.

Il sistema è costituito da una asta di massa M e momento di inerzia baricentrico J vincolata a ruotare attorno ad una cerniera e collegata a terra ai suoi estremi da due gruppi molla smorzatore. Tali gruppi si trovano a distanza l dalla cerniera e sono simmetricamente disposti rispetto ad essa.
Nell'asta è ricavato un corsoio al cui interno oscilla senza attrito una massa m (e momento di inerzia baricentrico j) vincolata a due molle contrapposte.
Le costanti delle molle e degli smorzatori sono quelle indicate nel disegno.



Es. 3 – Teoria dell'attrito: statico, dinamico e volvente.

Es. 1: <u>Analisi del sistema</u>

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata.

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto O'	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto A	Circonferenza centrata in O	?	?
Punto B	Circonferenza centrata in O'	?	?
Punto C	Verticale	V	Nulla

La velocità angolare della manovella OA

Tale velocità può essere determinata con il seguente procedimento:

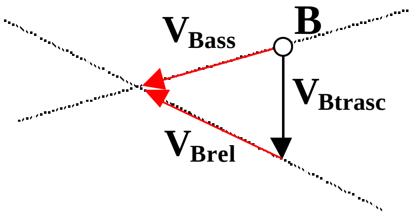
- si posiziona nel punto C una terna traslante di moto verticale e si determina la velocità assoluta del punto B (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (nota solo in direzione); risulta ora nota la velocità angolare del glifo O'B.
- si posiziona nel punto O' una terna rotante solidale all'asta O'B e si ricava la velocità assoluta del punto A (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione).

<u>Velocità assoluta di B</u>

In riferimento alla terna mobile traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$\mathbf{V_{B\ ass}}$	=	$\mathbf{V_{B\ trasc}}$	$\mathbf{V_{B\ rel.}}$
modulo	?		V	?
direzione	⊥ O'B		verticale	⊥ CB

Da cui graficamente si ha:



Sono ora note le velocità angolari delle altre due aste:

- ➢ asta BC (verso orario)

$$w_{BC} = \frac{V_{Brel}}{BC}$$

- ➢ asta O'B (verso antiorario)

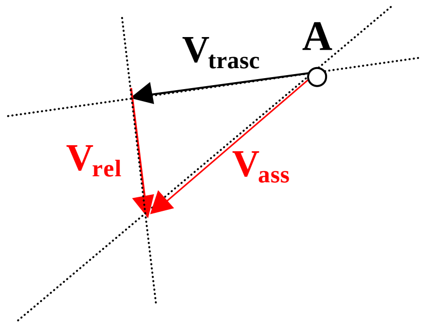
$$w_{O'B} = \frac{V_{Bass}}{O'B}$$

<u>Velocità assoluta di A</u>

In riferimento alla terna rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{A\ ass}$	=	$V_{A\ trasc}$	$V_{A\ rel}$
modulo	?		$\omega_{O'B}\ O'A$	?
direzione	$\perp$ OA		$\perp$ O'A	// O'B

Da cui graficamente si ha:



<u>Velocità angolare della manovella OA</u>

- manovella OA (verso antiorario)

$$\omega_{OA} = \frac{V_{Aass}}{OA}$$

<u>La accelerazione del punto B</u>

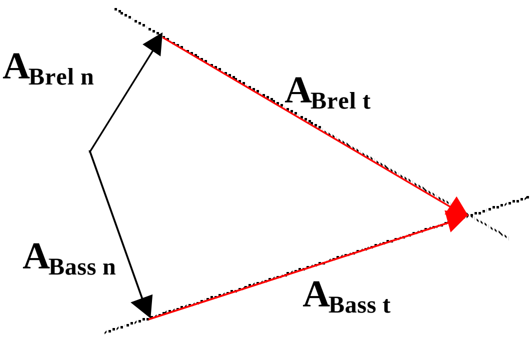
La accelerazione di B può essere determinata con il seguente procedimento in due passi:

- sfruttando la terna traslante posizionata in C si determina la accelerazione assoluta del punto B (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (completamente nota dai dati del problema) e di quella relativa (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione);
- si posiziona nel punto O' una terna rotante solidale all'asta O'B e si ricava la accelerazione assoluta del punto A (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione).

<u>Accelerazione assoluta di B</u>

In noti come l'accelerazione assoluta debba coincidere con quella relativa in quanto il riferimento mobile trasla con velocità uniforme.
In riferimento alla terna mobile traslante sopra definita si ha:

	$A_{Bass\ n}$	$A_{Bass\ t}$	=	$A_{Btrasc\ n}$	$A_{Btrasc\ t}$	$A_{Brel\ n}$	$A_{Brel\ t}$
Modulo	$w^2_{O'B}O'B$	?		-	0	$w^2_{BC}BC$	?
Direzione	// O‘B verso O‘	⊥ O’B		-	-	// BC verso C	⊥ BC



Sono ora note le accelerazioni angolari delle altre due aste:

- asta BA (verso antiorario)

$$\dot{w}_{BC} = \frac{A_{Basst}}{BC}$$

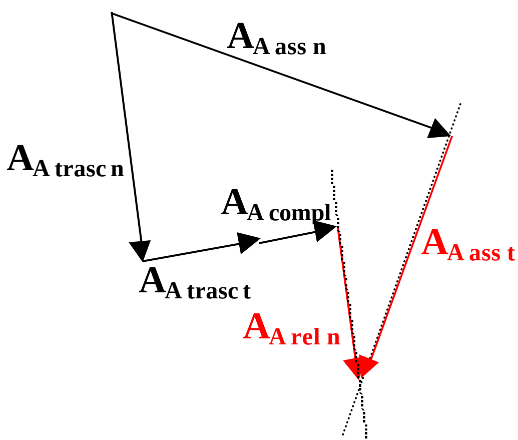
- asta BO’ (verso orario)

$$\dot{w}_{O'B} = \frac{A_{Basst}}{BO'}$$

Accelerazione assoluta di A

In riferimento alla terna rotante sopra definita si ha:

	$A_{Aass\ n}$	$A_{Aass\ t}$	=	$A_{A\ trasc\ n}$	$A_{A\ trasc\ t}$	$A_{A\ rel}$	$A_{A\ rel\ n}$	A_{compl}
Mod.	ù$^{2}_{OA}$OA	?		ù$^{2}_{O'B}$O'A	ǔ$_{O'B}$O'A	?	-	2ù$_{O'B}$V$_{Arel}$
Dir.	// OA verso O	⊥ OA		// O‘A verso O‘	⊥ O’A	// O’A	-	⊥ O’A



Accelerazione angolare della manovella OA

- manovella OA (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{OA} = \frac{A_{Aass}}{OA}$$

La coppia motrice applicata alla manovella OA;

Per il calcolo della coppia M che la manovella deve sviluppare per garantire il moto, si può ricorrere ad un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Per scrivere il bilancio sopra riportato bisogna conoscere la cinematica del glifo O'B (nota) ed in particolare del suo baricentro G (nota data la distanza O'G).

Velocità assoluta di G

Conoscendo la velocità angolare di ω_{ED} si ha:

$$V_{Gass} = \omega_{O'B} O'B$$

ovviamente diretta verso sinistra come conseguenza della velocità angolare antioraria.

Accelerazione assoluta di G

Il punto G ruota attorno ad O' con velocità ed accelerazione angolari note per cui è possibile determinare la sua accelerazione assoluta:

	A_{Gass}	=	**$A_{Gass\,n}$**	**$A_{Gass\,t}$**
modulo	?		$\omega_{O'B}^2 O'B$	$\dot{\omega}_{O'B} O'B$
direzione	?		// O'B verso O'	$\perp$O'B

La variazione di energia cinetica del sistema coincide con quella del glifo O'B:

$$\frac{dE_C}{dT} = M\vec{v}_G \times \vec{a}_G + J\vec{\omega}_{O'B} \times \vec{\dot{\omega}}_{O'B}$$

La potenza motrice è fornita dalla manovella per cui:

$$W_m = \vec{M} \times \vec{\omega}$$

La potenza resistente vede in gioco il contributo della forza F oltre a quello del peso:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_G - \vec{F} \times \vec{v}_C$$

L'equazione dell'energia risulta quindi essere:

$$M\vec{v}_G \times \vec{a}_G + J\vec{w}_{O'B} \times \dot{\vec{w}}_{O'B} = \vec{M} \times \vec{w} + -M\vec{g} \times \vec{v}_G - \vec{F} \times \vec{v}_C$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita M.

Le reazioni vincolari nella cerniera O

Le considerazione da svolgere sul sistema sono le seguenti:

- la manovella OA non può essere considerata scarica per la presenza del momento motore M;
- la reazione in A non può che essere normale data l'assenza di attriti

Il procedimento più semplice per determinare le reazioni in O risulta quindi il seguente:

- spezzare il sistema in A sostituendo il vincolo con una reazione normale alla guida;
- spezzare il sistema in O e quindi sostituire alla cerniera una reazione orizzontale e una verticale;
- applicare alla manovella così isolata le equazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale e verticale nonché alla rotazione attorno ad O ricavando il valore delle tre incognite.

Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a due gradi di libertà:

θ oscillazione dell'asta attorno alla condizione di equilibrio orizzontale, positiva in verso antiorario.

x oscillazione della slitta all'interno del glifo con l'origine coincidente con la posizione centrale della stessa, positiva verso destra.

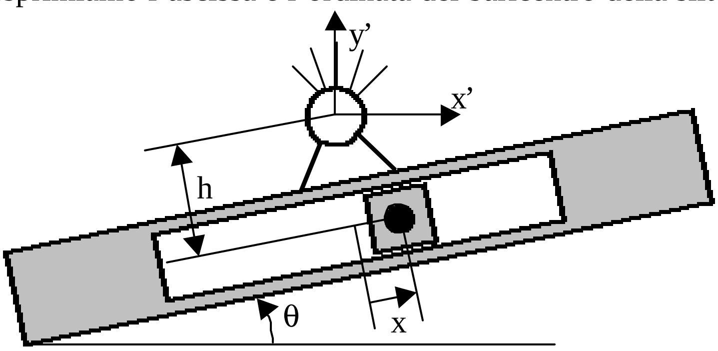
Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella dell'asta e di quella della slitta:

$$E_{c-asta} = \frac{1}{2}Mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$E_{c-slitta} = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2$$

La velocità V è il risultato della composizione della velocità di trascinamento dovuta alla rotazione dell'asta e della velocità relativa di scorrimento.
Al fine di determinarne il modulo poniamo un sistema di rifemento x'y' centrato nella cerniera ed esprimiamo l'ascissa e l'ordinata del baricentro della slitta:



$$x' = x\cos\theta + h\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta - h\cos\vartheta$$

Derivando le due espressioni otteniamo le componenti orizzontali e verticali della velocità:

$$\dot{x}' = \dot{x}\cos\theta - x\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\theta + h\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\dot{y}' = \dot{x}\sin\theta + x\dot{\theta}\cos\theta + h\dot{\theta}\sin\vartheta$$

Da cui possiamo risalire al modulo, dato da:

$$V^2 = \dot{x}'^2 + \dot{y}'^2 = \dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta}$$

L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{1}{2}Mh^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}j\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}J'\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + x^2\dot{\theta}^2 + h^2\dot{\theta}^2 + 2h\dot{x}\dot{\theta})$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (asta e slitta) e di quella elastica (molle):

$$E_{p-asta} = Mgh(1-\cos\theta)$$

$$E_{p-slitta} = mgh(1-\cos\theta) - mgxsin$$

$$E_{p-elastica} = \frac{1}{2}K_1\Delta l_1^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_2^2 + Kx^2$$

Per la determinazione del Δl è conveniente scrivere le espressioni dell'ascissa e dell'ordinata dei punti di collegamento tra le due molle e l'asta nello stesso sistema di riferimento prima introdotto:

Molla a sinistra della cerniera:

posizione a molla indeformata estremo superiore:

$$x' = -l$$

$$y' = -h$$

posizione generica estremo superiore:

$$x' = -l\cos\theta + hsin\theta$$

$$y' = -lsin\theta - h\cos\theta$$

posizione generica estremo inferiore:

$$x' = -l$$

$$y' = -H$$

Da tali espressioni è possibile ricavare la lunghezza generica della molla sinistra:

$$l_1^2 = (x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2 =$$

$$= (-l\cos\theta + h\,\mathrm{sen}\theta + l)^2 + (-l\,\mathrm{sen}\theta - h\cos\theta + H)^2 =$$

$$= l^2\cos^2\theta + h^2\,\mathrm{sen}^2\theta + l^2 - 2lh\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2l^2\cos\theta +$$

$$+ l^2\,\mathrm{sen}^2\theta + H^2\cos^2\theta + H^2 + 2lh\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - 2hH\cos\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta =$$

$$= 2l^2 + h^2 + H^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta$$

Come verifica è possibile valutare l'espressione in θ=0 ottenendo come lunghezza della molla H-h:

$$l_1^2 = 2l^2 + h^2 + H^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta =$$

$$= h^2 + H^2 - 2hH = (H-h)^2$$

Il Δl cercato sarà quindi dato da:

$$\Delta l_1^2 = 2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta$$

Molla a destra della cerniera:

posizione a molla indeformata estremo superiore:

$$x' = l$$
$$y' = -h$$

posizione generica estremo superiore:

$$x' = l\cos\theta + h sin\theta$$
$$y' = l sin\theta - h\cos\vartheta$$

posizione generica estremo inferiore:

$$x' = l$$
$$y' = -H$$

Da tali espressioni è possibile ricavare la lunghezza generica della molla destra:

$$l_2^2 = (x_s - x_i)^2 + (y_s - y_i)^2 =$$
$$= (l\cos\theta + h\,\mathrm{sen}\theta - l)^2 + (l\,\mathrm{sen}\theta - h\cos\theta + H)^2 =$$
$$= l^2\cos^2\theta + h^2\,\mathrm{sen}^2\theta + l^2 + 2lh\cos\theta\,\mathrm{sen}\theta - 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2l^2\cos\theta +$$
$$+ l^2\,\mathrm{sen}^2\theta + H^2\cos^2\theta + H^2 - 2lh\,\mathrm{sen}\theta\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2Hl\,\mathrm{sen}\theta =$$
$$= 2l^2 + h^2 + H^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta - 2hl\,\mathrm{sen}\theta + 2Hl\,\mathrm{sen}\theta$$

Come verifica è possibile valutare l’espressione in θ=0 ottenendo come lunghezza della molla H-h:

$$l_2^2 = 2l^2 + h^2 + H^2 - 2l^2\cos^2\theta - 2hH\cos\theta - 2hl\,\mathrm{sen}\theta + 2Hl\,\mathrm{sen}\theta =$$
$$= 2l^2 + h^2 + H^2 - 2l^2 - 2hH\cos\theta = (H-h)^2$$

Il Δl cercato sarà quindi dato da:

$$\Delta l_2^2 = 2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta - -2hl\,\mathrm{sen}\theta + 2Hl\,\mathrm{sen}\theta$$

L’energia potenziale totale risulterà quindi essere:

$$E_p = (M+m)gh(1-\cos\theta) - mgx sin\theta + \frac{1}{2}K_1(2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta +$$
$$+ 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta) + \frac{1}{2}K_2(2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta - -2hl\,\mathrm{sen}\theta + 2Hl\,\mathrm{sen}\theta) + Kx^2$$

<u>Termine dissipativo</u>

Il termine dissipativo vede il contributo di due soli smorzatori
Per la determinazione della velocità relativa tra i due estremi degli stessi è possibile derivare l’espressione dello spostamento relativo degli stessi utilizzato per l’energia cinetica.

<u>Molla a sinistra della cerniera:</u>

L’espressione dello spostamento relativo è data da:

$$\Delta l_1 = \sqrt{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta}$$

derivandolo si ottiene:

$$\dot{\Delta l}_1 = \sqrt{\frac{l^2\,\mathrm{sen}\theta + hH\,\mathrm{sen}\theta + hl\cos\theta - Hl\cos\theta}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\theta - 2hH\cos\theta + 2hl\,\mathrm{sen}\theta - 2Hl\,\mathrm{sen}\theta}}\dot{\theta}$$

e quadrandolo si ha:

$$\Delta\dot{l}_1^2 = \frac{l^2\cos\boldsymbol{q} + hH\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} + hl\cos\boldsymbol{q} - Hl\cos\boldsymbol{q}}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\boldsymbol{q} - 2hH\cos\boldsymbol{q} + 2hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} - 2Hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}^2$$

<u>Molla a destra della cerniera</u>:

L'espressione dello spostamento relativo è data da:

$$\Delta l_2 = \sqrt{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\boldsymbol{q} - 2hH\cos\boldsymbol{q} + 2Hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} - 2hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q}}$$

derivandolo si ottiene:

$$\Delta\dot{l}_2 = \sqrt{\frac{l^2\cos\boldsymbol{q} + hH\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} + Hl\cos\boldsymbol{q} - hl\cos\boldsymbol{q}}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\boldsymbol{q} - 2hH\cos\boldsymbol{q} + 2Hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} - 2hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q}}}\dot{\boldsymbol{q}}$$

e quadrandolo si ha:

$$\Delta\dot{l}_2^2 = \frac{l^2\cos\boldsymbol{q} + hH\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} + Hl\cos\boldsymbol{q} - hl\cos\boldsymbol{q}}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos\boldsymbol{q} - 2hH\cos\boldsymbol{q} + 2Hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} - 2hl\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{q}}^2$$

Moltiplicando le espressioni degli spostamenti relativi per i rispettivi coefficienti di smorzamento si ottiene la funzione dissipativa per il sistema:

$$D = \frac{1}{2}R_1\Delta\dot{l}_1^2 + \frac{1}{2}R_2\Delta\dot{l}_2^2$$

<u>Equazioni differenziali non lineari</u>

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = m\ddot{x} + mh\ddot{\boldsymbol{q}} - mx\dot{\boldsymbol{q}} + 2Kx - mg\,\mathrm{sen}\,\boldsymbol{q} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + mh\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + mh\ddot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = mx\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = 2Kx - mg\,\mathrm{sen}\,q$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0$$

dove:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = mx^2\dot{q} + mh^2\dot{q} + mh\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}}\right) = mx^2\ddot{q} + mh^2\ddot{q} + mh\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = R_1 \frac{l^2\cos q + hH\,\mathrm{sen}\,q + hl\cos q - Hl\cos q}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos q - 2hH\cos q + 2hl\,\mathrm{sen}\,q - 2Hl\,\mathrm{sen}\,q}\dot{q}$$
$$+ R_2 \frac{l^2\cos q + hH\,\mathrm{sen}\,q + Hl\cos q - hl\cos q}{2l^2 + 2h^2 - 2l^2\cos q - 2hH\cos q + 2Hl\,\mathrm{sen}\,q - 2hl\,\mathrm{sen}\,q}\dot{q}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial q} = (M+m)gh\,\mathrm{sen}\,q + mgx\cos q + K_1(l^2\,\mathrm{sen}\,q + hH\,\mathrm{sen}\,q + hl\cos q - Hl\cos q +$$
$$+ K_2(l^2\,\mathrm{sen}\,q + hH\,\mathrm{sen}\,q - hl\cos q + Hl\cos q$$

Posizione di equilibrio

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è stata individuata in base alle considerazioni inizialmente svolte e corrisponde ai valori $x = 0$, $\theta = 0$ delle variabili.
Tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta + 2Kx = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = (M+m)gh\,\mathrm{sen}\,\theta + mgx\cos\theta + K_1(l^2\,\mathrm{sen}\,\theta + hH\,\mathrm{sen}\,\theta + hl\cos\theta - Hl\cos\theta +$$
$$+ K_2(l^2\,\mathrm{sen}\,\theta + hH\,\mathrm{sen}\,\theta - hl\cos\theta + Hl\cos\theta = 0$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$x = 0$$
$$\theta = 0 \pm n\pi \rightarrow n = 0,1,2,3.....$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow 2K > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow (M+m)gh + K_1(l^2 + hH) + K_2(l^2 + hH)$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0}\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \theta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \left[(M+m)gh + K_1(l^2 + hH) + K_2(l^2 + hH)\right]2k - m^2 g^2$$

Le prime due condizioni sono sempre verificate mentre la terza potrebbe non esserlo. La risoluzione prosegue nell'ipotesi che anche la terza relazione sia verificata e che quindi la configurazione di equilibrio individuata è da ritenersi stabile. Qualora la condizione non sia verificata se ne concluderebbe che la posizione di equilibrio individuata non è stabile per cui il sistema non potrebbe essere linearizzato.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(x,\theta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{0,0} x + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \theta}\right|_{0,0} \theta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} \frac{x^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial x}\right|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{0,0} = 2K$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \boldsymbol{q}^2}\right|_{0,0} = (M+m)gh + K_1(l^2+hH) + +K_2(l^2+hH)$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \boldsymbol{q}}\right|_{0,0} = -mg$$

da cui l’espressione dell’energia potenziale linearizzata:

$$E_p = Kx^2 + \frac{1}{2}\left[(M+m)gh + K_1(l^2+hH) + K_2(l^2+hH)\right]\boldsymbol{q}^2 - mgx\boldsymbol{q}$$

<u>Linearizzazione dell’energia cinetica</u>

Per ciò che riguarda l’energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k =$$

$$= \frac{1}{2} J' \dot{\boldsymbol{q}}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + h^2\dot{\boldsymbol{q}}^2 + 2h\dot{x}\dot{\boldsymbol{q}})^2$$

<u>Linearizzazione del termine dissipativo</u>

Il termine dissipativo, nel sistema proposto, può essere pensato come:

$$D = \frac{1}{2} R_1 (a_1(\boldsymbol{q}))^2 \dot{\boldsymbol{q}}^2 + \frac{1}{2} R_2 (a_2(\boldsymbol{q}))^2 \dot{\boldsymbol{q}}^2$$

La sviluppo del termine dissipativo, nella suo forma più completa è:

$$D(x,\theta,\dot{x},\dot{\theta}) = D(0,0,0,0) + \frac{\partial D}{\partial x}\Big|_{0,0,0,0} x + \frac{\partial D}{\partial \theta}\Big|_{0,0,0,0}\theta + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{x}^2}\Big|_{0,0,0,0}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}^2}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{x}\,\partial \dot{\theta}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}\partial \dot{x}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta}\dot{x} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\Big|_{0,0,0,0}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \theta^2}\Big|_{0,0,0,0}\theta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial \theta}\Big|_{0,0,0,0}x\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \theta\partial x}\Big|_{0,0,0,0}\theta x +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial \dot{\theta}}\Big|_{0,0,0,0}x\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}\partial x}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{x}\partial \theta}\Big|_{0,0,0,0}\dot{x}\theta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \theta\partial \dot{x}}\Big|_{0,0,0,0}\theta\dot{x} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial x\partial \dot{x}}\Big|_{0,0,0,0}x\dot{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{x}\partial x}\Big|_{0,0,0,0}\dot{x}x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \theta\partial \dot{\theta}}\Big|_{0,0,0,0}\theta\dot{\theta} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}\partial \theta}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta}\theta$$

Tenendo conto della particolare forma assunta dal termine dissipativo, e del fatto che la valutazione avviene con valore nullo sia delle variabili libere che delle loro derivate prime, è possibile semplificare notevolmente lo sviluppo. Le considerazioni da svolgere sono le seguenti:

- il termine non dipende da x e dalle sue derivate e quindi tutti i termini che contengono derivate rispetto ad x o di ordine superiore saranno nulli;
- il termine costante e quelli del primo ordine sono nulli in quanto nel risultato compare la derivata prima di θ che, quando vengono calcolati nel punto li annulla;
- con analoghe considerazioni è possibile dimostrate che l'unico termine non nullo del secondo ordine è quello derivato due volte rispetto a $\dot{\theta}$ e cioè:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\theta}^2}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}R_1\frac{l^2+hl-Hl}{2h^2-2hH}\dot{\theta}_2 + \frac{1}{2}R_2\frac{l^2-hl+Hl}{2h^2-2hH}\dot{\theta}_2$$

<u>Equazioni linearizzate</u>

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica, dell'energia potenziale e del termine dissipativo linearizzate si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial x}+\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+\frac{\partial E_p}{\partial x}=m\ddot{x}+mh\ddot{\boldsymbol{q}}+2Kx-mg\boldsymbol{q}=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}=m\dot{x}+mh\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right)=m\ddot{x}+mh\ddot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}=0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}=2Kx-mg\boldsymbol{q}$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial \boldsymbol{q}}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}+\frac{\partial E_p}{\partial \boldsymbol{q}}=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=mh^2\dot{\boldsymbol{q}}+mh\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}\right)=mh^2\ddot{\boldsymbol{q}}+mh\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \boldsymbol{q}}=0$$

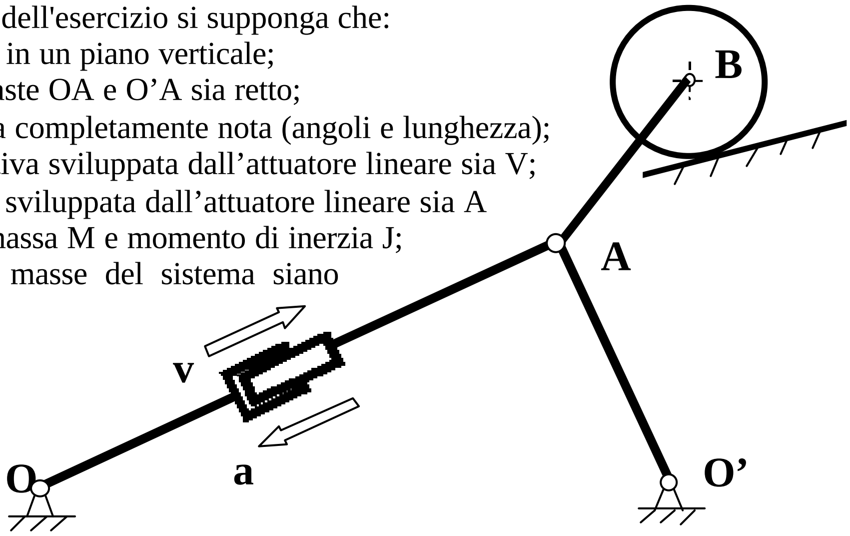
$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}}=R_1\frac{l^2+hl-Hl}{2h^2-2hH}+R_2\frac{l^2-hl+Hl}{2h^2-2hH}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \boldsymbol{q}}=\left[(M+m)gh+K_1(l^2+hH)+K_2(l^2+hH)\right]\boldsymbol{q}-mgx$$

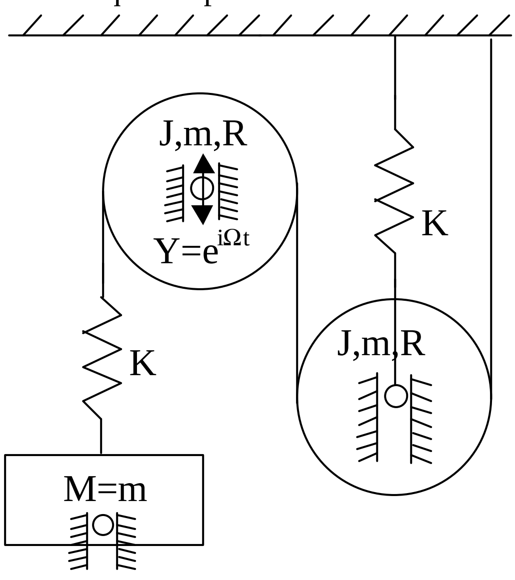
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Appello del 18 settembre 2000

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, nella configurazione rappresentata:
- La velocità e l'accelerazione angolare del disco nell'ipotesi di puro rotolamento;
- La forza sviluppata dall'attuatore lineare;
- Le reazioni nella cerniera 0.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:
- il sistema operi in un piano verticale;
- l'angolo tra le aste OA e O'A sia retto;
- la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezza);
- la velocità relativa sviluppata dall'attuatore lineare sia V;
- l'accelerazione sviluppata dall'attuatore lineare sia A
- il disco abbia massa M e momento di inerzia J;
- gli attriti e le masse del sistema siano trascurabili.



Es. 2 - Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:
a) determinare le frequenze della forzante per cui il sistema viene eccitato in risonanza;
b) descrivere il comportamento in corrispondenza alle frequenze prima individuate.



Il sistema è costituito da:
- un primo disco, collegato al vincolo a terra da una molla di rigidezza K, libero di oscillare in direzione verticale;
- un secondo disco libero di ruotare attorno ad una cerniera posizionata nel suo centro di cui è nota la legge armonica del moto in direzione verticale;
- una massa libera di oscillare in direzione verticale.

Le masse, i momenti di inerzia, le dimensioni geometriche e le costanti delle molle sono quelle indicate nel disegno. Si supponga inoltre:
- che gli attriti siano trascurabili;
- che non vi sia strisciamento tra filo e dischi;
- che il filo sia inestensibile e di massa trascurabile;
- che il momento di inerzia baricentrico dei dischi sia pari a $mR^2/2$.

Es. 3 – Illustrare il teorema delle potenze e presentare brevemente un esempio applicativo dello stesso.

Es. 1: Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto O	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto O'	Punto a terra	Nota	Nota
Punto A	Circonferenza centrata in O'	?	?
Punto B	Parallela al terreno	?	?

La velocità angolare del disco

Tale velocità può essere determinata con il seguente procedimento:

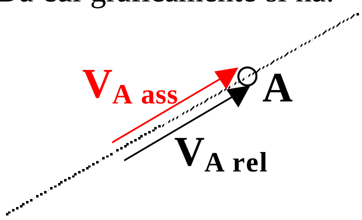
- si posiziona nel punto O una terna rotante solidale con l'attuatore lineare OA e si determina la velocità assoluta del punto A (nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (nota solo in direzione) e di quella relativa (completamente nota dai dati del problema);
- si posiziona nel punto A una terna traslante di moto circolare attorno ad O' e si ricava la velocità assoluta del punto B (nota in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione);
- nota la velocità del centro del disco B si risale alla sua velocità angolare nell'ipotesi di puro rotolamento.

Velocità assoluta di A

In riferimento alla terna mobile rotante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{A\ ass}$	=	$V_{A\ trasc}$	$V_{A\ rel}$
modulo	?		?	v
direzione	$\perp$ O'A		$\perp$ OA	// OA

Da cui graficamente si ha:



Ipotizzando che l'angolo formato tra l'asta OA e O'A sia di 90°, le velocità angolari delle due aste risultano essere:

- asta OA

$$\omega_{OA} = \frac{V_{Atrasc}}{OA} = 0$$

- asta O'A (verso orario)

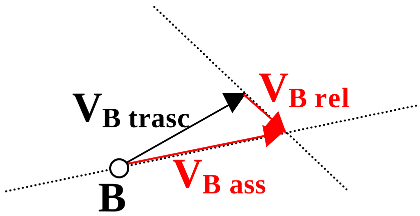
$$\omega_{O'A} = \frac{V_{Arel}}{O'A}$$

Velocità assoluta di B

In riferimento alla terna traslante sopra definita, in tabella si ottiene:

	$V_{B\,ass}$	=	$V_{B\,trasc}$	$V_{B\,rel}$
modulo	?		v	?
direzione	// suolo		⊥ O'A	⊥ AB

Da cui graficamente si ha:



E' ora possibile ricavare la velocità angolare dell'ultima asta:

- asta AB (verso orario)

$$\omega_{AB} = \frac{V_{Brel}}{AB}$$

Velocità angolare del disco

La velocità angolare del disco nell'ipotesi di puro rotolamento e detto R il suo diametro, è data da:

$$\omega_{disco} = \frac{V_{Bass}}{R} \quad \text{(verso orario)}$$

La accelerazione angolare del disco

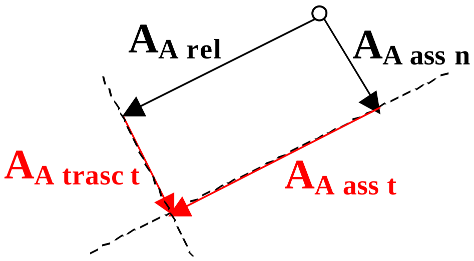
Tale accelerazione può essere determinata con il seguente procedimento:

- sfruttando la terna rotante posizionata in O si determina la accelerazione assoluta di A (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) come somma vettoriale di quella di trascinamento (scomposta nelle sue componenti normale, completamente nota, e tangenziale, nota solo in direzione) e di quella relativa (completamente nota);
- sfruttando la terna traslante posizionata in A si ricava la accelerazione assoluta di B (nota solo in direzione) come somma di quella di trascinamento (completamente nota) e di quella relativa (nota solo in direzione).
- nota la accelerazione del centro del disco B si risale alla sua accelarazione angolare nell'ipotesi di puro rotolamento.

Accelerazione assoluta di A

In riferimento alla terna mobile traslante sopra definita in tabella si ha:

	$A_{A\ ass\ n}$	$A_{A\ ass\ t}$	=	$A_{Atrasc\ n}$	$A_{A\ trasc\ t}$	$A_{A\ rel}$	A_{cor}
Modulo	$\omega^2_{O'A} O'A$	?		$\omega^2_{OA} OA$	?	A	$2w_{OA}v$
Direzione	// O'A verso O'	⊥ O'A		// OA verso O	⊥ OA	// OA	// OA



Da cui graficamente si ha:
L'esercizio poteva essere risolto sia nell'ipotesi di V=costante, e quindi accelerazione relativa nulla, sia nell'ipotesi di V variabile e quindi di accelerazione relativa non nulla. Per generalità si risolve l'esercizio in questo secondo modo ipotizzando la presenza di una accelerazione relativa A diretta verso sinistra.
Si noti che, nella particolare configurazione considerata la velocità angolare nulla dell'asta OA comporta l'annullamento sia dell'accelerazione complementare che di quello di trascinamento normale.
Sono ora note le accelerazioni angolari delle due aste:

- asta OA (verso orario)

$$\dot{\omega}_{OA} = \frac{A_{Atrasct}}{OA}$$

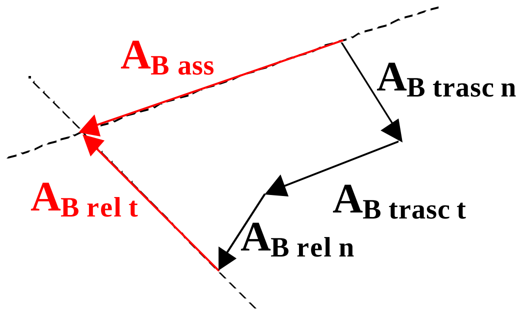
- asta O'A (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{O'A} = \frac{A_{Aasst}}{O'A}$$

Accelerazione assoluta di B

In riferimento alla terna traslante sopra definita in tabella si ha:

	$A_{B\ ass}$	=	$A_{B\ trasc\ n}$	$A_{B\ trasc\ t}$	$A_{B\ rel\ t}$	$A_{B\ rel\ t}$
Mod.	?		$\omega^2_{O'A} O'A$	$\dot{\omega}_{O'A} O'A$	?	$w^2_{AB} AB$
Dir.	// suolo		// O'A verso O'	⊥ O'A	⊥ AB	//AB verso A



E' ora possibile ricavare la accelerazione angolare dell'ultima asta:

- asta AB (verso antiorario)

$$\dot{\omega}_{AB} = \frac{A_{Brel}}{AB}$$

Accelerazione angolare del disco

La accelerazione angolare del disco nell'ipotesi di puro rotolamento e detto R il suo diametro, è data da:

- $\dot{\omega}_{disco} = \frac{A_{Bass}}{R}$ (verso antiorario)

La forza sviluppata dall'attuatore lineare

La forza necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella del disco:

$$\frac{dE_C}{dT} = M\vec{v}_B \times \vec{a}_B + J\vec{\omega}_{AB} \times \vec{\dot{\omega}}_{AB}$$

Potenza motrice

E' fornita dall'attuatore lineare per cui:

$$W_m = \vec{F} \times \vec{V}$$

Si sottolinea che la velocità da considerare è quella relativa tra le due parti in movimento che, nel caso particolare, essendo una delle due collegata a terra, coincide con quella assoluta.

Potenza resistente

E' dovuta alla variazione di quota del disco:

$$W_r = -M\vec{g} \times \vec{v}_B$$

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

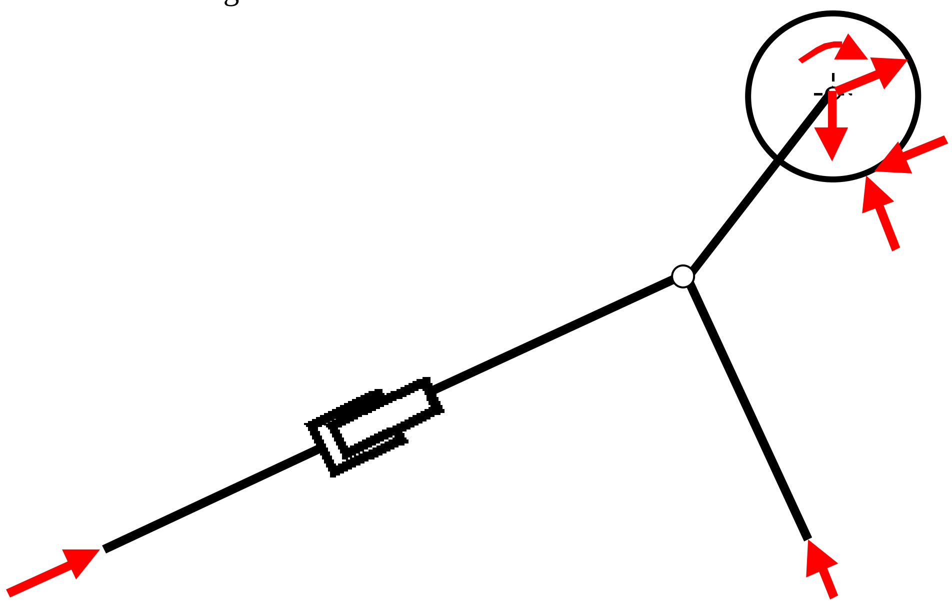
$$M\vec{v}_B \times \vec{a}_B + J\vec{\omega}_{AB} \times \dot{\vec{\omega}}_{AB} = \vec{F} \times \vec{V} + M\vec{g} \times \vec{v}_B$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita F.

Le reazioni vincolari nella cerniera O

Le considerazione da svolgere sul sistema sono le seguenti:
- tutte le aste sono scariche e quindi possono essere considerate delle bielle;
- l'attuatore lineare è privo di massa e quindi può essere considerato una biella.

Un procedimento per determinare le reazioni in O risulta quindi il seguente:
- spezzare il sistema isolando il disco e quindi determinare l'azione trasmessa dalla biella AB ad esempio imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto al punto di contatto del disco;
- sostituire alle cerniere O e O' le rispettive reazioni ed in A la forza calcolata e risolvere il sistema ad esempio imponendo l'equilibrio dei momenti rispetto ad O (ottenendo una relazione con come unica incognita la reazione in O') oppure rispetto ad O' (ottenendo una relazione che ha come unica incognita la reazione in O.



Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a tre gradi di libertà:

x_1 posizione verticale del baricentro del primo disco; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;

x_2 posizione verticale del baricentro della massa; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;

y posizione verticale del baricentro del secondo disco; l'origine è presa a partire dalla condizione di equilibrio statico, il verso è positivo verso il basso;

Determinare le frequenze della forzante per cui il sistema viene eccitato in risonanza;

Fondamentalmente si tratta di determinare le due frequenze proprie del sistema; per determinarle cominciamo con il ricavare le due equazioni di equilibrio dinamico per il sistema.

Metodo di Lagrange: energia cinetica del sistema

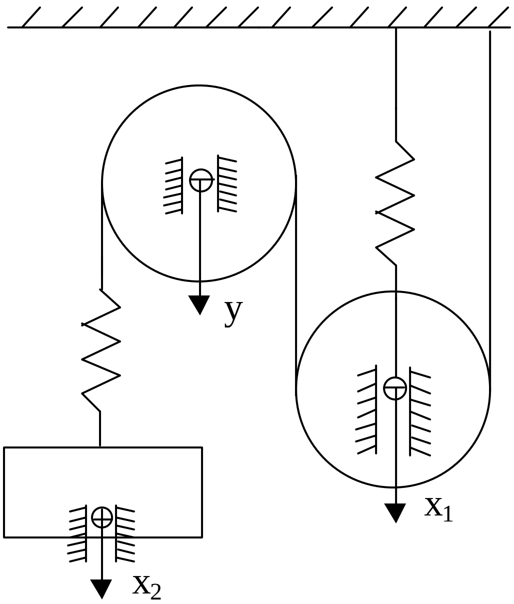
L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella dei due dischi e di quella della massa.

$$E_{c-disco1} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2$$

$$E_{c-disco2} = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_2^2$$

$$E_{c-massa} = \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2$$

Dove θ_1 e θ_2 rappresentano le oscillazioni angolare rispettivamente del primo e del secondo disco. Si tratta ora di esprimerle in funzione delle coordinate libere, operazione che eseguiamo applicando la sovrapposizione degli effetti:

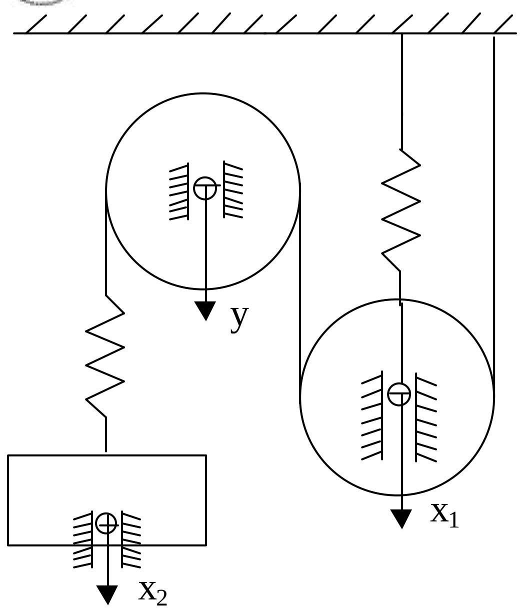


$$\dot{x}_1 \neq 0; \dot{x}_2 = 0; \dot{y} = 0;$$

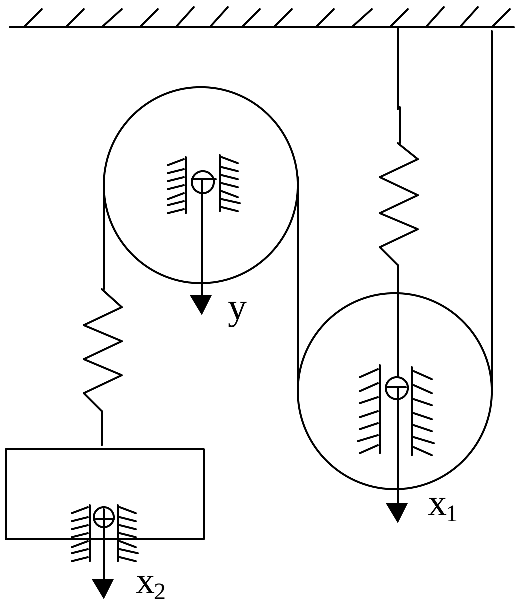
$$\Downarrow$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{R}$$

$$\dot{\theta}_2 = -\frac{2\dot{x}_1}{R}$$



$$\dot{x}_1 = 0; \dot{x}_2 \neq 0; \dot{y} = 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\theta}_1 = 0$$
$$\dot{\theta}_2 = 0$$



$$\dot{x}_1 = 0; \dot{x}_2 = 0; \dot{y} \neq 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\theta}_1 = 0$$
$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{y}}{R}$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{\dot{x}_1}{R}$$
$$\dot{\theta}_2 = \frac{\dot{y}}{R} - \frac{2\dot{x}_1}{R}$$

L'energia cinetica dei due dischi sarà quindi esprimibile come:

$$E_{c-disco1} = \frac{1}{2} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} J \frac{\dot{x}_1^2}{R^2} = \frac{3}{4} m\dot{x}_1^2$$
$$E_{c-disco2} = \frac{1}{2} m\dot{y}_2^2 + \frac{2J}{R^2}\dot{x}_1^2 + \frac{J}{2R^2}\dot{y}^2 - \frac{2}{R^2}\dot{x}_1\dot{y} = m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{4} m\dot{y}^2 - m\dot{x}_1\dot{y}$$

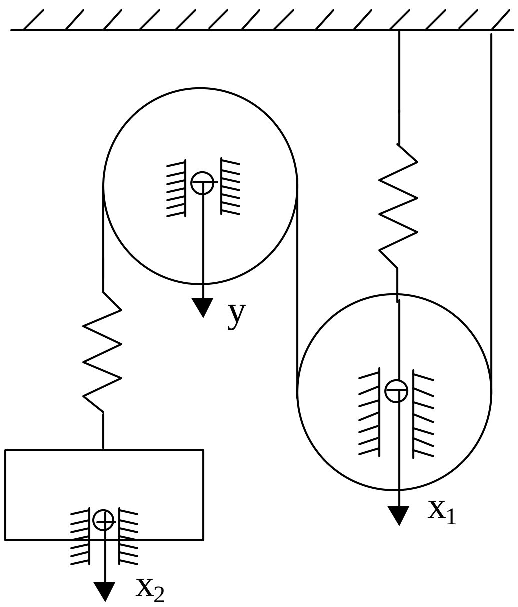
L'energia cinetica totale è:

$$E_c = \frac{7}{4} m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} M\dot{x}_2^2 + \frac{3}{4} m\dot{y}^2 - m\dot{x}_1\dot{y}$$

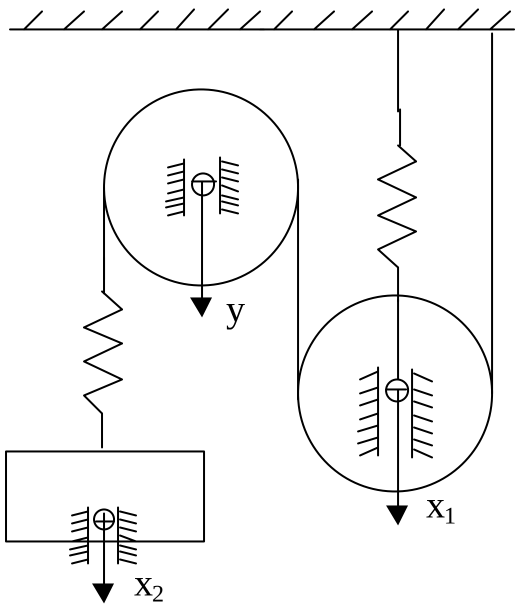
Metodo di Lagrange: energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema, avendo considerato come origine delle coordinate quella corrispondente alla configurazione di equilibrio statico del sistema, sarà pari alla sua componente elastica.

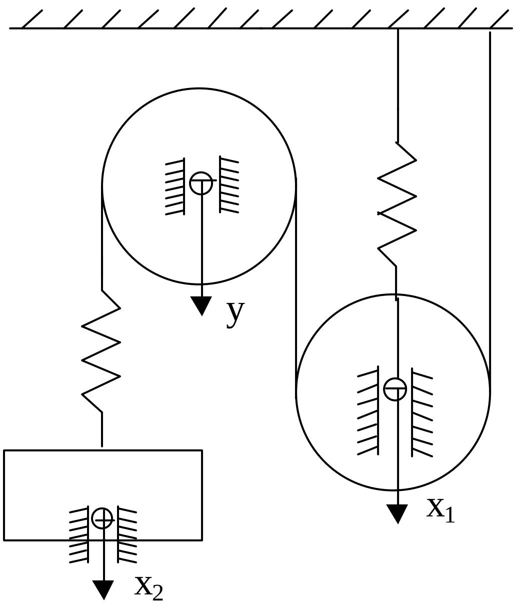
$$E_{p-molla} = \frac{1}{2} K\Delta l_1^2 + \frac{1}{2} K\Delta l_2^2$$



$$x_1 \neq 0; x_2 = 0; y = 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta l_1 = x_1$$
$$\Delta l_2 = 2x_1$$



$$x_1 = 0; x_2 \neq 0; y = 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta l_1 = 0$$
$$\Delta l_2 = x_2$$



$$x_1 = 0; x_2 = 0; y \neq 0;$$
$$\Downarrow$$
$$\Delta l_1 = 0$$
$$\Delta l_2 = -2y$$

Applicando la sovrapposizione degli effetti si ha:

$$\Delta l_1 = x_1$$
$$\Delta l_2 = 2x_1 + x_2 - 2y$$

L'energia potenziale totale è:

$$E_p = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}K(2x_1 + x_2 - 2y)^2$$

Equazioni differenziali

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x_1} + \frac{\partial E_p}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1} = \frac{7}{2}m\dot{x}_1 - m\dot{y}$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{7}{2}m\ddot{x}_1 - m\ddot{y}$$
$$\frac{\partial E_c}{\partial x_1} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial x_1} = Kx_1 + 2K(2x_1 + x_2 - 2y)$$

$$\frac{7}{2}m\ddot{x}_1 + Kx_1 + 2K(2x_1 + x_2 - 2y) - m\ddot{y} = 0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x_2} + \frac{\partial E_p}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2} = M\dot{x}_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}_2}\right) = M\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x_2} = K(2x_1 + x_2 - 2y)$$

$$M\ddot{x}_2 + K(2x_1 + x_2 - 2y) = 0$$

La matrice di massa è:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{7}{2}m & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

La matrice di rigidezza è:

$$K = \begin{bmatrix} 5K & 2K \\ 2K & K \end{bmatrix}$$

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\} = \{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]=0$$

ovvero di:

$$\det\begin{bmatrix} 5K-\frac{7}{2}\omega_0^2 m & 2K \\ 2K & K-\omega_0^2 m \end{bmatrix}$$

$$(5K-\frac{7}{2}\omega_0^2 m)(K-\omega_0^2 m)-4K^2=0$$

$$\frac{7}{2}\omega_0^4 m^2-\frac{17}{2}\omega_0^2 m+K^2=0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in ω_0^2, del tipo

$$a\omega_0^4+b\omega_0^2+c=0$$

che ammette due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le quattro frequenze proprie del sistema che sono, essendo le equazioni linearizzate indipendenti:

$$\omega_{01}^2=\frac{\frac{17}{4}mK+\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 m^2K^2-\frac{7}{2}m^2K^2}}{\frac{7}{2}m^2}=2{,}3\frac{K}{m}$$

$$\omega_{02}^2=\frac{\frac{17}{4}mK-\sqrt{\left(\frac{17}{4}\right)^2 m^2K^2-\frac{7}{2}m^2K^2}}{\frac{7}{2}m^2}=0{,}124\frac{K}{m}$$

Descrivere il comportamento in corrispondenza alle frequenze prima individuate.

Le equazioni di equilibrio dinamico che governano il comportamento del sistema sono:

$$\frac{7}{2}m\ddot{x}_1 + 5Kx_1 + 2Kx_2 = m\ddot{y} + 4Ky = (-m\Omega^2 + 4K)e^{i\Omega t}$$

$$M\ddot{x}_2 + 2K2x_1 + Kx_2 = 2Ky = 2Ke^{i\Omega t}$$

L'integrale del sistema di equazioni differenziali sopra riportato è dato dalla somma dell'integrale dell'omogenea associata (che descrive il comportamento del sistema non forzato) con un integrale particolare (che in pratica è quello che ci interessa in quanto stiamo cercando la soluzione a regime).
In termini generali si parte da una forma del tipo (sistema forzato):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f\}e^{i\Omega t}$$

che a regime ammetterà una soluzione del tipo

$$\{x(t)\} = \{x\}e^{i\Omega t}$$

dove il vettore delle ampiezze di vibrazione $\{x\}$ è soluzione di

$$\left([K] - w^2[M]\right)\{x\} = \{f\} \Rightarrow \{x\} = \left([K] - w^2[M]\right)^{-1}\{f\}$$

che può essere anche riscritta come

$$\{x\} = H(w)\{f\}$$

dove $H(w)$ è la *receptance matrix* del sistema, quadrata di ordine *N*, e ne costituisce il modello della sua risposta in frequenza. In riferimento a quanto sviluppato a lezione (lezione XXVIII sistemi vibranti a 2-n gradi di libertà), si può scrivere che:

$$h_{jk}(w) = \frac{x_j(w)}{f_k(w)} = h_{kj}(w) = \frac{x_k(w)}{f_j(w)} = \sum_{r=1}^{N} \frac{{}_rX_j \cdot {}_rX_k}{\overline{w}_r^2 - w^2}$$

da cui si nota come il sistema possa andare in risonanza, qualora la pulsazione della forzante w uguagli una delle due frequenze proprie del sistema vibrante.
Questo significa che sarà possibile studiare la risposta del sistema nell'intorno della prima frequenza propria considerando la risposta di un sistema che abbia massa modale pari a m_{11} e rigidezza pari a k_{11} introducendo un errore modesto; considerazioni analoghe valgono ovviamente per il comportamento del sistema nell'intorno della seconda frequenza propria.