Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

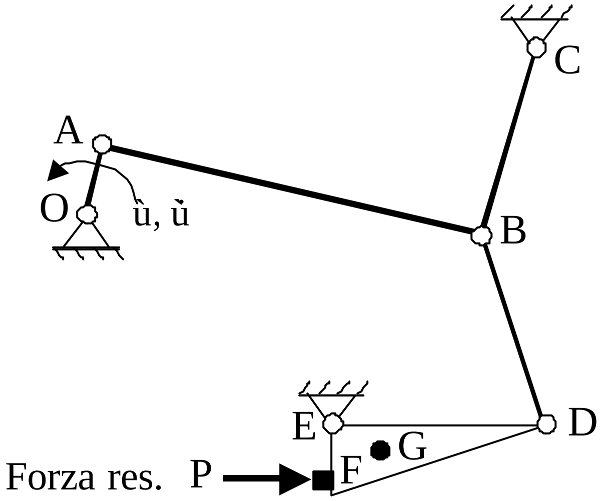
prof. A. Curami - Appello del 27 gennaio 1999

Es. 1 – Considerato il meccanismo nella configurazione rappresentata determinare:

- la velocità e l'accelerazione del punto F;
- la coppia motrice da applicare alla manovella OA per vincere la forza resistente P orizzontale applicata in F;
- le reazioni nella cerniera E.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

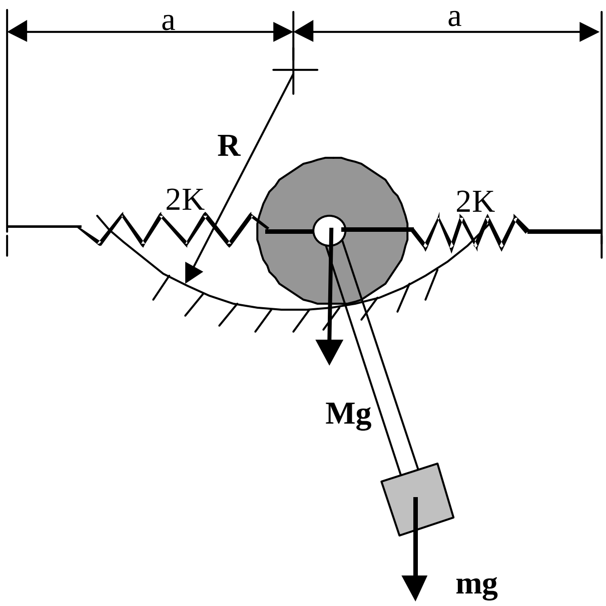
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità e l’accelerazione angolare della manovella OA siano ω e $d\omega/dt$ rispettivamente, entrambe dirette in verso antiorario;
- l’elemento DEF abbia massa M concentrata in G e J_G sia il suo momento di inerzia baricentrico;
- le masse delle aste e gli attriti siano trascurabili.



Es. 2 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema;
- determinare le frequenze proprie del sistema linearizzato;
- descrivere analiticamente la procedura per la determinazione della legge di moto.

A tal fine si ritengano note: la massa, il momento di inerzia baricentrico e il raggio del disco (M, J, r); la massa e il momento di inerzia baricentrico (si consideri solo il peso all’estremità trascurando quello dell’asta, m, j), la lunghezza del pendolo (l) e la rigidezze delle due molle. Si sottolinea che la massa m è fulcrata sul disco e quindi può oscillare rispetto allo stesso.



Es. 3 – Si parli della trasmissione ad ingranaggi in generale descrivendo in particolare le motivazioni che hanno portato alla scelta del profilo ad evolvente.

Soluzione proposta

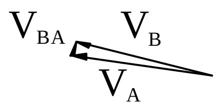
Esercizio 1

Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	**Traiettoria**	**Velocità**	**Accelerazione**
O	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	Nota	Nota
B	Circonferenza centrata in C	?	?
C	Punto a terra	Nulla	Nulla
D, F, G	Circonferenza centrata in E	?	?
E	Punto a terra	Nulla	Nulla

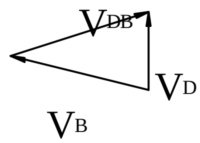
1° quesito
Si può osservare che il sistema è formato in sostanza da due quadrilateri articolati: OABC e CBDE; il secondo è mosso dal primo mediante la biella BC. Del quadrilatero OABC, si conoscono velocità ed accelerazione angolari della manovella OA, per cui è possibile risalire al moto di ciascuno dei suoi elementi, in particolare del punto B:

$\mathbf{V_B}$ =	$\mathbf{V_A}$ +	$\mathbf{V_{BA}}$
? (ω_{BC} BC) $\perp$ BC	ω_{OA} OA $\perp$ OA	? (ω_{BA} BA) $\perp$ BA



Nota la velocità di B, è possibile ricavare la velocità del punto D del quadrilatero CBDE:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_B}$ +	$\mathbf{V_{DB}}$
? (ω_{DE} DE) $\perp$ DE	ω_{BC} BC $\perp$ BC	? (ω_{DB} DB) $\perp$ DB



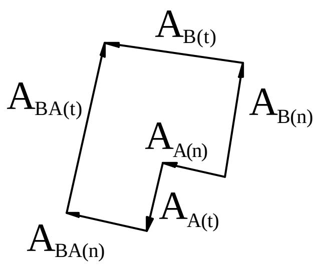
Dalle analisi precedenti, si ricavano le velocità angolari assolute di tutte le bielle del sistema:

$\omega_{BA} = V_{BA} / BA$
$\omega_{BC} = V_B / BC$

$\omega_{DB} = V_{DB} / DB$
$\omega_{DE} = V_D / DE$

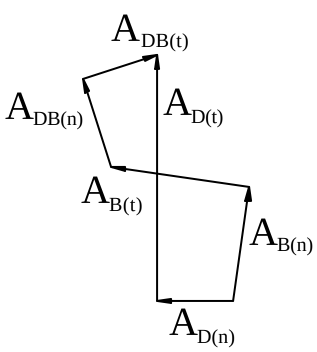
Quest'ultima è la velocità angolare di tutto il triangolo DEF attorno alla cerniera E, e può essere usata per valutare la velocità di qualunque suo punto.
Un procedimento analogo può essere ripetuto per valutare le accelerazioni, a partire da quella del punto B:

$\mathbf{A_{Bn}}$ +	$\mathbf{A_{Bt}}$ =	$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ +	$\mathbf{A_{BAn}}$ +	$\mathbf{A_{BAt}}$
ω^2_{BC} BC // BC verso C	? ($\dot\omega_{BC}$ BC) $\perp$ BC	ω^2_{OA} OA // OA verso O	$\dot\omega_{OA}$ OA $\perp$ OA	ω^2_{BA} BA // BA verso A	? ($\dot\omega_{BA}$ BA) $\perp$ BA



Nota l'accelerazione di B, si può calcolare quella del punto D:

$\mathbf{A_{Dn}}$ +	$\mathbf{A_{Dt}}$ =	$\mathbf{A_{Bn}}$ +	$\mathbf{A_{Bt}}$ +	$\mathbf{A_{DBn}}$ +	$\mathbf{A_{DBt}}$
ω^2_{DE} DE // DE verso E	? ($\dot\omega_{DE}$ DE) $\perp$ DE	ω^2_{BC} BC // BC verso C	$\dot\omega_{BC}$ BC $\perp$ BC	ω^2_{DB} DB // DB verso B	? ($\dot\omega_{DB}$ DB) $\perp$ DB



A questo punto, sono note le accelerazioni angolari di tutte bielle del sistema:

$\dot\omega_{BA} = A_{BAt} / BA$
$\dot\omega_{BC} = A_{Bt} / BC$
$\dot\omega_{DB} = A_{DBt} / DB$
$\dot\omega_{DE} = A_{Dt} / DE$

Infine, è possibile calcolare velocità ed accelerazione assolute di qualunque punto del triangolo DEF; in particolare, per il punto F:

$\mathbf{V_F} = \omega_{DE}\ EF\ \mathbf{t}$
$\mathbf{A_F} = \omega^2_{DE}\ EF\ \mathbf{n} + \dot{\omega}_{DE}\ EF\ \mathbf{t}$

essendo **t** il versore normale a **(E-F)** e **n** il versore ad esso parallelo ed equiverso. Per la dinamica del sistema, occorreranno in seguito anche velocità ed accelerazione del baricentro G del triangolo:

$\mathbf{V_G} = \omega_{DE}\ EG\ \mathbf{t}$
$\mathbf{A_G} = \omega^2_{DE}\ EG\ \mathbf{n} + \dot{\omega}_{DE}\ EG\ \mathbf{t}$

essendo **t** il versore normale a **(E-G)** e **n** il versore ad esso parallelo ed equiverso.

2° quesito
Per il calcolo della coppia da applicare alla manovella OA per realizzare il moto studiato, conviene usare un bilancio di potenze, che può essere scritto nella forma:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r - W_p$$

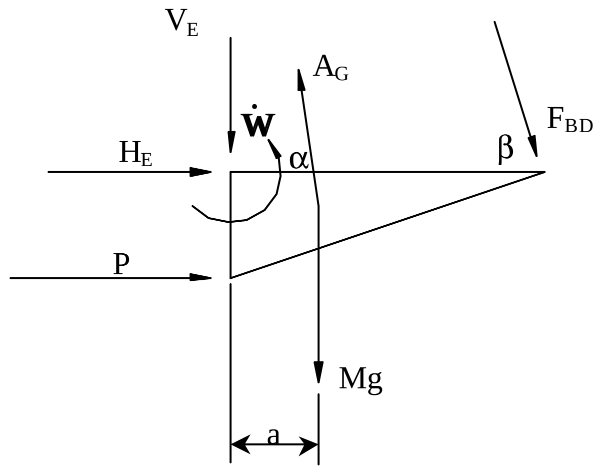
- l'unico elemento dotato di massa è il triangolo DEF, per cui il termine inerziale è dato da:
  $$\frac{dE_C}{dT} = M_G\ \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_G\ \mathbf{w_{DE}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{DE}}$$
- la potenza motrice è data dalla sola coppia motrice (incognita) agente sulla manovella OA:
  $W_m = M_m\ \omega_{OA}$
- le resistenze sono costituite dalla forza P applicata in F e dal peso del triangolo, applicato nel suo baricentro:
  $W_r = -\mathbf{P} \cdot \mathbf{V_F} - M\mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
- essendo trascurabili gli attriti, si ha:
  $W_p = 0$

Si ha quindi:

$$M_G\ \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_G\ \mathbf{w_{DE}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{DE}} = M_m\ \omega_{OA} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{V_F} + M\mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$$

equazione in cui l'unica incognita è M_m, che può quindi essere ricavata.

3° quesito
Per calcolare la reazione vincolare della cerniera occorre considerare il triangolo DEF separatamente dal resto del sistema, evidenziando appunto la reazione in E e l'azione trasmessa dalla biella BD (la cui direzione è nota, ed è parallela alla biella BD stessa essendo questa un'asta scarica).
Avendo tre sole incognite (V_E, H_E, F_{BD}), sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio dinamico applicate al triangolo:



$\Sigma F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_E + P + F_{BD} \cos\alpha + M A_G \cos\beta = 0$

$\Sigma F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad V_E + Mg + M A_G \sin\alpha + F_{BD} \sin\beta = 0$

$\Sigma M_E = 0 \quad \Rightarrow \quad P\,EF - J_G\,\dot{\omega} - a\,M A_G \sin\alpha - a\,Mg - DE\,F_{BD} \sin\beta = 0$

Si tratta di un sistema di tre equazioni lineare nelle tre incognite V_E, H_E, F_{BD}, per cui il problema risulta determinato.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:

α: rotazione assoluta del disco intorno al suo centro (positiva se oraria)

β: rotazione assoluta del pendolo intorno al fulcro (positiva se antioraria)

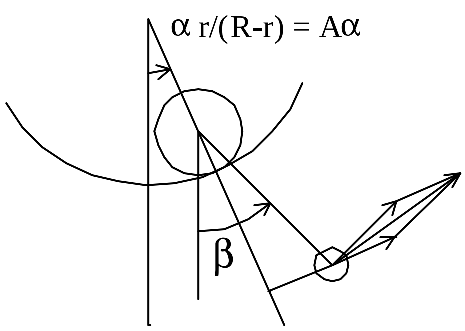
Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica

L'energia cinetica del sistema è data dai due contributi del disco e del pendolo. Per quanto riguarda il disco, l'energia cinetica è data a sua volta dalla somma dei contributi rotazionale e traslazionale:

$$E_{Cd} = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M (r\dot{\alpha})^2$$

Anche l'energia cinetica del pendolo è data dalla somma dei contributi rotazionale e traslazionale; nel calcolo di quest'ultimo occorre tenere conto del moto di trascinamento imposto al pendolo dal disco, come si osserva in figura. Ponendo $A = r / (R-r)$, si ottiene:



$$E_{Cp} = \frac{1}{2} j\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m[(r\dot{\alpha})^2 + (L\dot{\beta})^2 + 2\,Lr\;\dot{\alpha}\;\dot{\beta}\;\cos(\beta-A\alpha)]$$

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$E_C = \frac{1}{2} J\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} M(r\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} j\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} m[(r\dot{\alpha})^2 + (L\dot{\beta})^2 + 2\,Lr\;\dot{\alpha}\;\dot{\beta}\;\cos(\beta-A\alpha)]$$

Calcolo dell'energia potenziale

L'energia potenziale può essere suddivisa nei due contributi dovuti alla deformazione delle molle (che supporremo essere solamente in direzione orizzontale) e all'innalzamento dei baricentri dei due corpi. Per quanto riguarda il potenziale delle forze elastiche:

$$V_M = 2\,\frac{1}{2}\,(2K)\,[(R\text{-}r)\sin A\alpha]^2$$

Il potenziale delle forze peso è dato invece da:

$$V_P = Mg\,(R\text{-}r)\,(1-\cos A\alpha) + mg\,[(R\text{-}r)\,(1\text{-}\cos A\alpha) + L\,(1-\cos\beta)]$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$V = 2K(R\text{-}r)^2(\sin A\alpha)^2 + (M+m)g\,(R\text{-}r)\,(1-\cos A\alpha) + mg\,L\,(1-\cos\beta)$$

Equazioni di moto non lineari

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\alpha} + \frac{\partial V}{\partial\alpha} = 0$$

dove:

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\alpha}} = J\dot{\alpha} + Mr^2\dot{\alpha} + m[r^2\dot{\alpha} + Lr\;\dot{\beta}\;\cos(\beta-A\alpha)] = (J + Mr^2 + mr^2)\,\dot{\alpha} + m\,Lr\;\dot{\beta}\;\cos(\beta-A\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\alpha}}\right) = (J + Mr^2 + mr^2)\,\ddot{\alpha} + m\,Lr\,[\,\ddot{\beta}\cos(\beta-A\alpha) - \dot{\beta}\;\sin(\beta-A\alpha)\cdot(\dot{\beta}-A\dot{\alpha})]$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\alpha} = Lr\;\dot{\alpha}\;\dot{\beta}\;A\sin(\beta-A\alpha)$$

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = 4K(R\text{-}r)^2\,A\sin A\alpha\,\cos A\alpha + g(M+m)\,(R\text{-}r)\,A\sin A\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\beta} + \frac{\partial V}{\partial\beta} = 0$$

dove:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot\beta} = j\dot\beta + m[L^2\dot\beta + Lr\,\dot\alpha\,\cos(\beta-A\alpha)] = (j + mL^2)\dot\beta + m\,Lr\,\dot\alpha\,\cos(\beta-A\alpha)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot\beta}\right) = (j + mL^2)\ddot\beta + m\,Lr\,[\ddot\alpha\,\cos(\beta-A\alpha) - \dot\alpha\sin(\beta-A\alpha)\cdot(\dot\beta - A\dot\alpha)]$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \beta} = -Lr\,\dot\alpha\,\dot\beta\,\sin(\beta-A\alpha)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = mg\,L\,\sin\beta$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, che può essere risolto in generale con metodi numerici.

Linearizzazione del sistema e calcolo delle frequenze proprie

Per calcolare le frequenze proprie del sistema occorre procedere alla sua linearizzazione nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile. Questa può essere trovata annullando le derivate prime dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = 2K\,(R-r)^2\,A\,\sin 2A\alpha + g\,(M+m)\,(R-r)\,A\,\sin A\alpha = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = mgL\,\sin\beta = 0$$

Dalla seconda si ricava $\beta = 0$. Dalla prima si ricavano le due soluzioni:

$$\sin A\alpha = 0$$

$$\cos A\alpha = -\frac{(M+m)g}{4K(R-r)}$$

La seconda corrisponde a posizioni del disco individuate da un angolo al centro maggiore di $\pi/2$, che quindi non rispettano l'equilibrio. La posizione di equilibrio stabile intorno alla quale linearizzare il sistema è dunque data da $\alpha = \beta = 0$.

In questo caso, sia l'energia cinetica che quella potenziale sono funzioni non quadratiche nelle variabili del problema: per renderle tali, e quindi per ottenere equazioni lineari, occorre procedere al loro sviluppo in serie Taylor, arrestato agli infinitesimi di secondo ordine.

$$V = V(\alpha,\beta) \cong V\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right|_{0,0}\alpha + \left.\frac{\partial V}{\partial \beta}\right|_{0,0}\beta + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right|_{0,0}\frac{\beta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\partial\beta}\right|_{0,0}\alpha\beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0} = [4K(R-r)^2A^2\cos 2A\alpha + g(M+m)(R-r)A^2\cos A\alpha]|_{0,0} = 4K(R-r)^2A^2 + g(M+m)(R-r)A^2 = K_{\alpha\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right|_{0,0} = [mgL\cos\beta]|_{0,0} = mgL = K_{\beta\beta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{0,0} = 0$$

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2}(J + Mr^2 + mr^2)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(j + mL^2)\dot{\beta}^2 + mLr\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}$$

Derivando le espressioni nel modo già indicato si ottengono le seguenti equazioni:

$(J + Mr^2 + mr^2)\ddot{\alpha} + mrL\ddot{\beta} + A^2 (R-r) [4K(R-r) + (M+m)g]\,\alpha = 0$
$(j + mL^2)\ddot{\beta} + mrL\ddot{\alpha} + mgL\,\beta = 0$

Si tratta di un sistema differenziale omogeneo, lineare nelle incognite $\alpha(t)$ e $\beta(t)$. Il sistema può essere espresso nella forma matriciale:

$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$

essendo **M** e **K** le matrici di massa e di rigidezza del sistema. Le frequenze proprie del sistema si trovano risolvendo l'equazione algebrica di secondo grado in ω^2:

$\det(\mathbf{K} - \omega^2\,\mathbf{M}) = 0$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

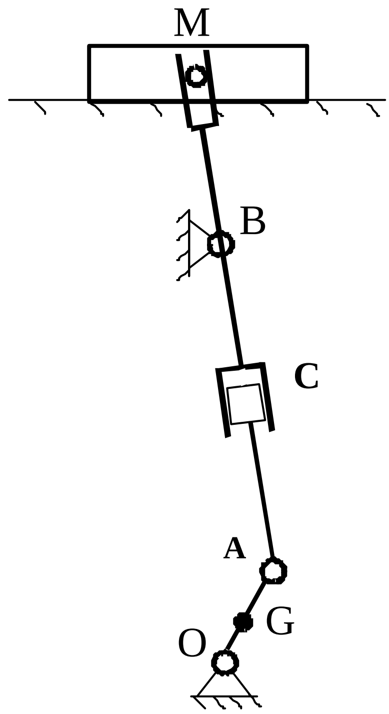
prof. A. Curami – Appello del 24 febbraio 1999

Es. 1 – Dato il meccanismo in figura si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione assoluta della massa M;
- la pressione all'interno del cilindro C di superficie s;
- le reazioni nella cerniera O.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

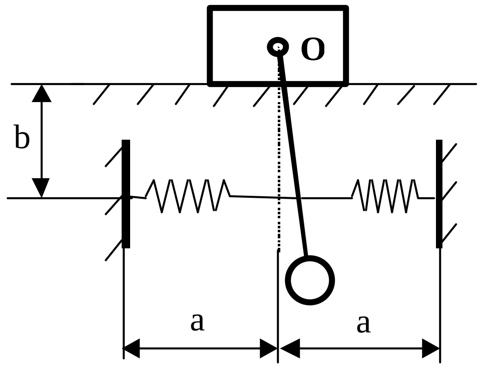
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- sia ω (costante e diretta in verso antiorario) la velocità della manovella OA, la massa 2m e il momento di inerzia baricentrico J;
- le masse delle aste e gli attriti siano trascurabili;
- il pistone sia puntiforme con massa m.



Es. 2 – Dato il sistema in figura, operante nel piano verticale e completamente privo di attriti, si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema;
- scrivere le stesse equazioni linearizzandole attorno alla posizione di equilibrio;
- descrivere l'andamento temporale della reazione orizzontale nella cerniera O.

A tal fine si ritengano note: la massa M del parallelepipedo che scivola sul piano; la massa, il momento di inerzia baricentrico e il raggio della massa oscillante (m, j, r); la lunghezza l dell'asta, la rigidezza 2K delle due molle; la geometria del sistema.



Es. 3 – Si parli delle trasmissioni a cinghie trapezoidali spiegando tramite uno sviluppo analitico come avviene la trasmissione di coppia; si concluda con un confronto critico tra l'utilizzo di cinghie piane, trapezoidali e dentate.

Soluzione proposta

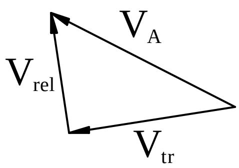
Esercizio 1

Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	**Traiettoria**	**Velocità**	**Accelerazione**
O	Punto a terra	Nulla	Nulla
A, G	Circonferenza centrata in O	Nota	Nota
B	Punto a terra	Nulla	Nulla
C	?	?	?
M	Parallela al piano π	?	?

1° quesito
Per studiare il moto di M, occorre dapprima studiare il moto dell'elemento BC, all'interno del quale scorre il pistone CA. Il moto del punto A è rotatorio uniforme intorno alla cerniera O. Conviene porre un riferimento rotante solidalmente a BC, con origine in B, ed esprimere la velocità del punto A (nota) nelle sue componenti relativa e di trascinamento nel sistema di riferimento scelto. Si ha:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
ω_{OA} OA $\perp$ OA	? // BA	? (ω_{BC} BA) $\perp$ BA

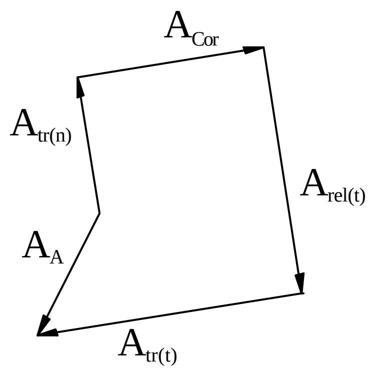


Si può quindi ricavare la velocità angolare di BC:

$\omega_{BC} = V_{tr}$ / BA verso orario

Lo stesso riferimento può essere utilizzato per il calcolo delle accelerazioni:

$\mathbf{A_A}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,n}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,t}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2_{OA} OA // OA verso O	ω^2_{BC} AB // AB verso B	?($\dot{\omega}_{BC}$ AB) $\perp$ AB	0 /	? //BA	2 ω_{BC} $V_{rel(A)}$ $\perp$ AB

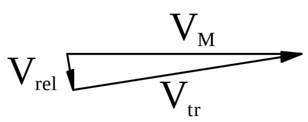


Si ricava quindi l'accelerazione angolare di BC:

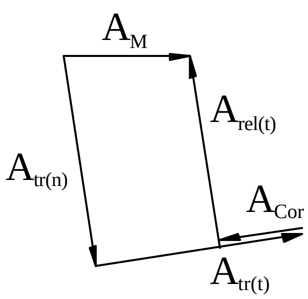
$\dot{\omega}_{BC} = A_{tr\,t}$ / AB verso orario

Per studiare velocità ed accelerazione di M, è ancora utile lo stesso riferimento usato in precedenza, di cui ora conosciamo velocità ed accelerazione angolari:

$\mathbf{V_M}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
?	?	ω_{BC} MB
// π	// MB	$\perp$ MB

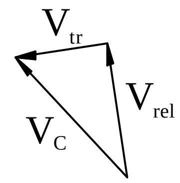


$\mathbf{A_M}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,n}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,t}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
?	ω^2_{BC} BM	$\dot{\omega}_{BC}$ BM	0	?	2 ω_{BC} $V_{rel(M)}$
// π	// MB verso B	$\perp$ BM	/	//BM	$\perp$ BM

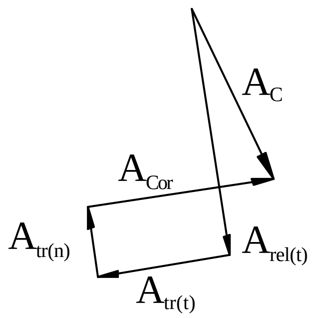


Per il calcolo della dinamica del sistema saranno necessarie anche velocità ed accelerazione assolute del pistone C, che possono essere valutate ricorrendo ancora al riferimento rotante con origine in B e tenendo presente che C ed A appartengono alla stessa asta:

$\mathbf{V_C}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
?	V_{rel}	ω_{BC} BC
?	// BC	⊥ BC



$\mathbf{A_C}$ =	$\mathbf{A_{tr\ n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\ t}}$ +	$\mathbf{A_{rel\ n}}$ +	$\mathbf{A_{rel\ t}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
?	ω^2_{BC} BC	$\dot{\omega}_{BC}$ BC	0	$A_{rel(A)}$	2 ω_{BC} V_{rel}
?	// BC verso B	⊥ BC	/	//BC	⊥ BC



2° quesito

Per il calcolo della pressione nel cilindro C, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

- poiché la velocità angolare della manovella OA è costante, l'energia cinetica di quest'ultima è costante; le variazioni di energia cinetica sono quindi legate al moto della massa M e del pistone C (quest'ultimo, essendo puntiforme, ha solo energia cinetica traslazionale):
  $$\frac{dE_C}{dT} = m\, \mathbf{V_C} \cdot \mathbf{A_C} + M\, \mathbf{V_M} \cdot \mathbf{A_M}$$
- La potenza motrice è data da:
  $W_m = -\, p\, s\, V_{rel(C)}$
  Il segno negativo è dovuto al fatto che la velocità relativa del pistone rispetto al cilindro tende a diminuire il volume della camera, per cui la forza di pressione esercita un lavoro resistente; nel caso in cui si dovesse ottenere un valore negativo di pressione, si potrebbe pensare che il cilindro sia in realtà a doppio effetto, capace cioè di esercitare una forza in entrambi i versi del moto relativo cilindro – pistone
- La potenza resistente è legata alle forze peso della manovella OA e del pistone C:
  $W_r = -\, m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_C} - 2m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
  Si sottolinea che nell'espressione della potenza motrice compare la velocità di C relativa al sistema rotante con BC, mentre nell'espressione delle potenze inerziali e resistenti la velocità di C è la velocità assoluta

Si ha quindi:

$m\,\mathbf{V_C} \cdot \mathbf{A_C} + M\,\mathbf{V_M} \cdot \mathbf{A_M} = -\,p\,s\,V_{rel(C)} + m\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{V_C} + 2m\,\mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$

3° quesito

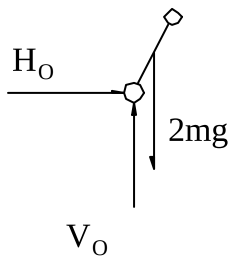
Per il calcolo della reazione vincolare in O, si possono scrivere le equazioni di momento:

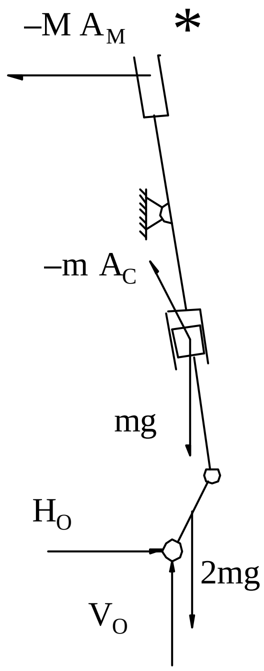
- della manovella OA intorno ad A
- dell’intero sistema, esclusa la massa M, intorno a B

Si sottolinea che le forze di pressione nel cilindro non compaiono nelle equazioni di equilibrio in quanto si tratta di forze interne al sistema.

$\Sigma M_A^{OA} = 0$

$\Sigma M_A^{BCAO} = 0$





$\mathbf{V_O} \times \mathbf{(O\text{-}A)} + \mathbf{H_O} \times \mathbf{(O\text{-}A)} + 2m\,\mathbf{g} \times \mathbf{(G\text{-}A)} = \mathbf{0}$

$-\,M\,\mathbf{A_M} \times \mathbf{(M\text{-}B)} - m\,\mathbf{A_C} \times \mathbf{(C\text{-}B)} + m\,\mathbf{g} \times \mathbf{(C\text{-}B)} + 2m\,\mathbf{g} \times \mathbf{(G\text{-}B)} + (\mathbf{V_O} + \mathbf{H_O}) \times \mathbf{(O\text{-}B)} = \mathbf{0}$

Si tratta di un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite V_O, H_O, per cui il quesito posto è risolto.

(*) Ai fini dell’equilibrio, si considera la forza “-M A_M” normale alla guida essendo questa liscia.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:

x: spostamento orizzontale del punto O (positivo se verso destra)

θ: rotazione assoluta del pendolo intorno al fulcro (positiva se antioraria)

Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Energia cinetica

L’energia cinetica della massa M è calcolabile in maniera semplice. Per quanto riguarda il pendolo, oltre al termine rotazionale, occorre notare che il termine traslazionale risente del trascinamento imposto dalla massa M; la velocità del pendolo è cioè la somma di un vettore orizzontale di modulo $\dot{x}$ e di uno inclinato di θ e avente modulo $L\dot{\theta}$. Si ha quindi:

$$E_C = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} j \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m [\dot{x}^2 + (L\dot{\theta})^2 + 2L\,\dot{\theta}\,\dot{x}\,\cos\theta]$$

Energia potenziale
Le variazioni di energia potenziale del sistema sono dovute alla deformazione delle molle ed all'innalzamento del baricentro del pendolo. Per il termine elastico, assumiamo che la deformazione delle molle avvenga soltanto in direzione orizzontale:

$$V_M = 2\,[\frac{1}{2}\,2K\,(x + b\sin\theta)^2]$$

Per quanto riguarda il termine legato al peso del pendolo:

$$V_P = mgL\,(1-\cos\theta)$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$V = 2K\,(x + b\sin\theta)^2 + mgL\,(1-\cos\theta)$$

Equazioni di moto non lineari
Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\,\dot{x} + mL\,\dot{\theta}\,\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (M+m)\,\ddot{x} + mL\,(\ddot{\theta}\,\cos\theta - \dot{\theta}^2\,\sin\theta)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4K\,(x + b\sin\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (j+mL^2)\,\dot{\theta}^2 + mL\,\dot{x}\,\cos\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (j+mL^2)\,\ddot{\theta} + mL\,(\ddot{x}\,\cos\theta - \dot{x}^2\,\sin\theta)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -\,mL\,\dot{\theta}\,\dot{x}\,\sin\theta$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 4Kb\,(x + b\sin\theta)\cos\theta + mgL\,\sin\theta$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite x(t) e θ(t), che può essere risolto in generale con metodi numerici.

Linearizzazione del sistema

Per calcolare le frequenze proprie del sistema occorre procedere alla sua linearizzazione nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile. Questa può essere trovata annullando le derivate prime dell'energia potenziale:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 4K\,(x + b\sin\theta) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 4Kb\,(x + b\sin\theta)\cos\theta + mgL\sin\theta = 0$$

Risolvendo il sistema si ottiene la posizione di equilibrio data da x = 0, θ = 0.

In questo caso, sia l'energia cinetica che quella potenziale sono funzioni non quadratiche nelle variabili del problema: per renderle tali, e quindi per ottenere equazioni lineari, occorre procedere al loro sviluppo in serie Taylor, arrestato agli infinitesimi di secondo ordine.

$$V = V(x,\theta) \cong V\big|_{0,0} + \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{0,0} x + \frac{\partial V}{\partial \theta}\bigg|_{0,0} \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} \frac{x^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\bigg|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\bigg|_{0,0} x\theta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} = [4K]\|_{0,0} = 4K = K_{xx}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\bigg|_{0,0} = [4Kb\,(-(x + b\sin\theta)\sin\theta + b\cos^2\theta) + mgL\cos\theta]\|_{0,0} = 4Kb^2 + mgL = K_{\theta\theta}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\bigg|_{0,0} = [4Kb\cos\theta]\|_{0,0} = 4Kb = K_{x\theta}$$

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} j\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\,[\,\dot{x}^2 + (L\dot{\theta})^2 + 2L\,\dot{\theta}\,\dot{x}\,]$$

Derivando le espressioni nel modo già indicato si ottengono le seguenti equazioni:

$(M+m)\,\ddot{x} + mL\,\ddot{\theta} + 4K\,(x + b\theta) = 0$

$(mL^2 + j)\,\ddot{\theta} + mL\,\ddot{x} + 4Kb\,(x + b\theta) + mgL\,\theta = 0$

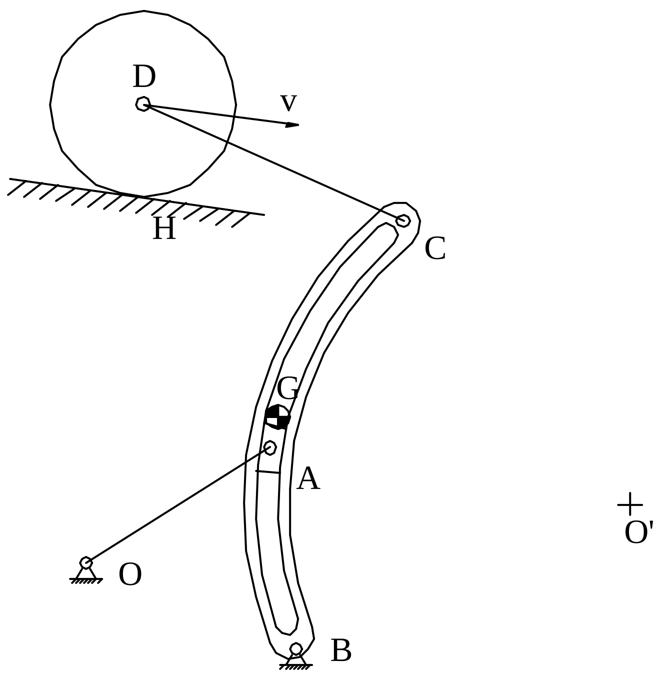
Si tratta di un sistema differenziale omogeneo, lineare nelle incognite $x(t)$ e $\theta(t)$.

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

prof. A. Curami – Prova in itinere del 29 aprile 1999

Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:
- la velocità e l'accelerazione assoluta del punto A;
- la coppia M_m che deve essere applicata alla manovella OA per garantire il moto;
- le reazioni di contatto tra il disco ed il piano di appoggio;
- il tipo di movimento del disco in funzione del coefficiente di attrito.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità del disco sia **v** costante nel verso indicato;
- il glifo abbia massa M_G e momento di inerzia baricentrico J_G con baricentro in G;
- il disco abbia massa M_D e momento di inerzia baricentrico J_D
- le masse degli altri elementi e gli attriti nelle cerniere siano trascurabili;
- i coefficienti di attrito tra disco e appoggio siano f_s (statico), f_d (dinamico) e f_v (volvente).

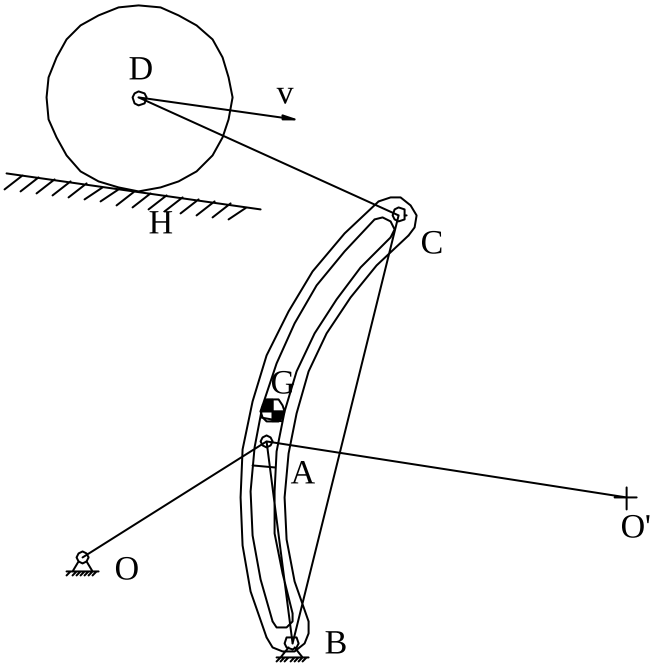


Soluzione proposta

Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

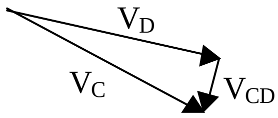
Punto	Traiettoria	Velocità	Accelerazione
A	Circonferenza centrata in O	?	?
B	Punto a terra	Nulla	Nulla
C	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela al piano	Nota: **v** (cost.)	Nulla
O	Punto a terra	Nulla	Nulla



1° quesito: velocità e accelerazione assoluta di A

Il moto di A, di cui è nota la traiettoria, è imposto dal moto del glifo; il moto di quest'ultimo è a sua volta determinato da quello del disco con centro D. Occorre quindi studiare dapprima il movimento del glifo. A questo scopo, si consideri una terna traslante con origine nel centro D del disco, il cui moto è un dato del problema, ed si esprima la velocità di C come somma vettoriale della velocità assoluta di D (trascinamento) e di quella relativa di C rispetto a D:

$\mathbf{V_C}$ =	$\mathbf{V_D}$ +	$\mathbf{V_{CD}}$
? (ω_{BC} BC) $\perp$ BC	v // piano	? (ω_{CD} CD) $\perp$ CD

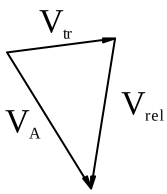


Avendo ricavato graficamente $\mathbf{V_C}$ e $\mathbf{V_{CD}}$, è possibile calcolare le velocità di rotazione assolute del glifo BC e della biella CD:

$\omega_{BC} = V_C$ / BC verso orario
$\omega_{CD} = V_{CD}$ / CD verso orario

Conoscendo la velocità di C, è possibile ricavare la velocità di qualunque punto del glifo: questo fatto permette di passare al calcolo della velocità assoluta di A. A questo scopo, si consideri una terna rotante solidale con il glifo BC e avente origine in B: la velocità assoluta di A può essere scomposta come segue (O': centro di curvatura del glifo):

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{tr}}$ +	$\mathbf{V_{rel}}$
? (ω_{AO} AO) $\perp$ AO	ω_{BC} BA $\perp$ BA	? ($\omega_{AO'}$ AO') $\perp$ AO'

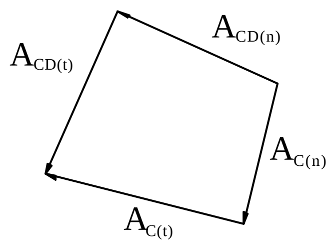


Avendo ricavato graficamente $\mathbf{V_A}$ e $\mathbf{V_{rel(A)}}$, è possibile calcolare:

- la velocità di rotazione assoluta dell'asta OA: $\omega_{AO} = V_A$ / AO verso orario
- la velocità di rotazione relativa del segmento AO' nel riferimento definito in precedenza: $\omega_{AO'} = V_{AO'}$ / AO' verso antiorario

I riferimenti mobili e la procedura usati per il calcolo di $\mathbf{V_A}$ sono validi anche per il calcolo dell'accelerazione $\mathbf{A_A}$. Considerato il riferimento traslante con origine in D, l'accelerazione assoluta di C (la cui componente normale è nota, conoscendo la velocità angolare del glifo) può essere espressa come somma dell'accelerazione di D (nulla per ipotesi, poiché $\mathbf{V_D}$ è costante) e dell'accelerazione relativa di C rispetto a D; anche la componente normale di quest'ultima è nota, poiché è già stata calcolata la velocità angolare della biella DC. Si noti che, avendo assunto un riferimento traslante, l'accelerazione complementare è nulla.

$\mathbf{A_{Cn}}$ +	$\mathbf{A_{C\,t}}$ =	$\mathbf{A_{D}}$ +	$\mathbf{A_{CDn}}$ +	$\mathbf{A_{CDt}}$
ω^2_{BC} BC // BC verso C	? ($\dot\omega_{BC}$ BC) $\perp$ BC	0 /	ω^2_{CD} CD // CD verso D	? ($\dot\omega_{CD}$ CD) $\perp$ CD



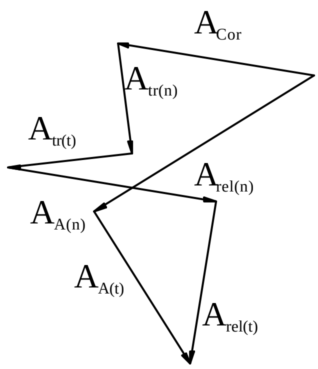
Dal grafico è a questo punto possibile calcolare le accelerazioni angolari di DC e del glifo BC:

$\dot\omega_{CD} = A_{CDt}/CD$ verso orario
$\dot\omega_{BC} = A_{BCt}/BC$ verso antiorario

Considerando ora il riferimento rotante solidale al glifo ed avente origine nel punto B, è possibile studiare l'accelerazione assoluta di A; va ricordato che:

- trattandosi di un riferimento rotante, l'accelerazione complementare non è nulla
- la traiettoria descritta da A nel riferimento relativo è nota, ma non è rettilinea (circonferenza centrata in O'), per cui sarà necessario scomporre il termine di accelerazione relativa nelle sue componenti normale e tangenziale rispetto alla traiettoria

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,n}}$ +	$\mathbf{A_{rel\,t}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2_{OA} OA // OA verso O	?($\dot\omega_{OA}$ OA) $\perp$ OA	ω^2_{AB} AB // AB verso B	$\dot\omega_{BC}$ AB $\perp$ AB	$\omega^2_{AO'}$ AO' //AO' verso O'	?($\dot\omega_{AO'}$ AO') $\perp$ AO'	2 ω_{BC} $V_{rel(A)}$ // AO'



A questo punto sono note velocità ed accelerazione assolute di A, in modulo, direzione e verso.
È poi possibile calcolare velocità ed accelerazione del baricentro G del glifo, che serviranno in seguito per lo studio della dinamica del sistema:

- $\mathbf{V_G} = \omega_{BC}\,GB\,\mathbf{n}$
- $\mathbf{A_G} = \omega^2_{BC}\,GB\,\mathbf{t} + \dot\omega_{BC}\,GB\,\mathbf{n}$

essendo **n** il versore normale a **(B-G)** e **t** il versore ad esso parallelo ed equiverso.

2° quesito: la coppia motrice applicata alla manovella OA

Per il calcolo della coppia motrice agente sulla manovella OA per garantire il moto studiato, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

- poiché la velocità del punto D è costante, e con essa la velocità angolare del disco, l'energia cinetica di quest'ultimo è costante; si ha quindi:
  $$\frac{dE_C}{dT} = M_G\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_G\, \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}}$$
- La potenza motrice è data da:
  $W_m = M_m\, \omega_{OA}$
- La potenza resistente è legata alle forze peso:
  $W_{rp} = -\, M_D\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} - M_G\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
  È inoltre presente l'attrito volvente (coefficiente f_v): indicando con M_v il momento resistente legato all'attrito volvente, con la componente normale al piano scambiata tra quest'ultimo e il disco, con R il raggio del disco, si ha:
  $W_{rv} = M_v\, \omega_{disco} = N\, u\, V_D / R = N\, f_v\, V_D$

Si ha quindi:

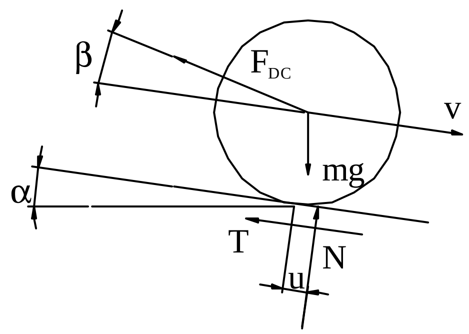
$$M_G\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_G\, \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} = M_m\, \omega_{OA} + M_D\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + M_G\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G} - N\, f_v\, V_D$$

In questa relazione, tutte le grandezze cinematiche sono state calcolate precedentemente; si hanno però due incognite: M_m e N. Occorre perciò calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto fra piano e disco; tale calcolo è oggetto della richiesta successiva.

3° quesito: le reazioni di contatto tra disco e piano di appoggio

Si isoli il disco dal resto del sistema: si evidenziano così, oltre alle reazioni vincolari N e T (rispettivamente normale e tangente al piano d'appoggio), la forza trasmessa dalla biella DC. Poiché DC è un'asta scarica, l'azione da essa esercitata ha direzione nota (parallela a DC), mentre è incognito il solo modulo. Avendo tre sole incognite (N, T, F_{DC}), sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio dinamico applicate al disco:

$$\Sigma F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad N - M_D\, g \cos(\alpha) + F_{DC} \sin(\beta) = 0$$
$$\Sigma F_T = 0 \quad \Rightarrow \quad T - M_D\, g \sin(\alpha) + F_{DC} \cos(\beta) = 0$$
$$\Sigma M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad T\, R - N\, f_v\, R = 0$$



Si tratta di un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite N, T, F_{DC}, risolto il quale è possibile anche trovare la coppia M_m richiesta al punto precedente.

4° quesito: il movimento del disco in funzione del coefficiente d'attrito

Tutto lo svolgimento riportato è valido nell'ipotesi che il disco rotoli senza strisciare. Questo è vero quando le azioni T ed N calcolate al punto precedente soddisfano la seguente relazione:

$T \leq f_s N$

essendo f_s il coefficiente di attrito statico fra disco e piano. Nel caso in esame, l'equilibrio alla rotazione del disco impone che $T = N\ f_v$, per cui la condizione di rotolamento senza strisciamento diventa:

$f_v \leq f_s$

solitamente ampiamente verificata.
Se invece le relazioni non sono verificate, si ha uno strisciamento fra disco e piano. In tal caso, si perde il vincolo cinematico per cui il punto di contatto del disco col piano è fermo (il sistema acquista un grado di libertà in più), mentre si ha la relazione:

$T = f_d N$

che determina la dinamica del disco.
Si osserva che, nel caso $f_s = f_d = 0$, non esiste azione tangente al piano, e così l'azione N, per rispettare l'equilibrio alla rotazione del disco, deve passare per il suo centro.

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

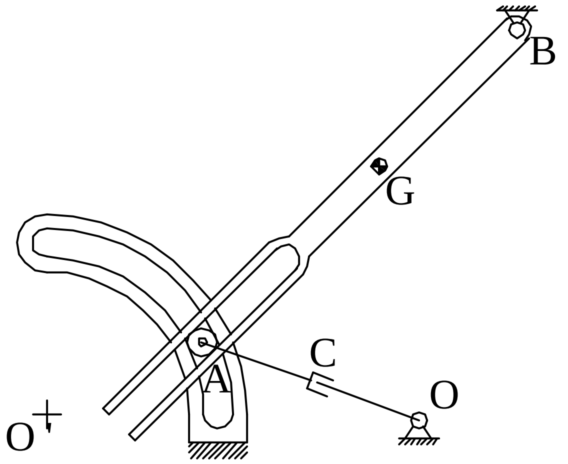
prof. A. Curami – Compitino del 6 giugno 1999

Es. 1 – Dato il meccanismo in figura si determini, per la configurazione rappresentata:

- velocità ed accelerazione angolari della guida incernierata in B;
- la pressione all'interno del cilindro C;
- la reazione vincolare in B.

Si supponga che:

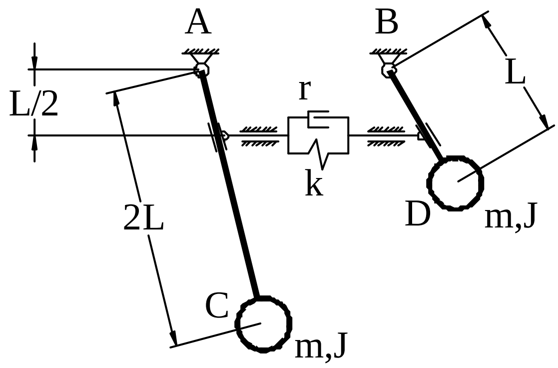
- l'attuatore C abbia una velocità di allungamento costante e pari a V (A si allontana da O);
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- il cilindro C abbia sezione S;
- la guida incernierata in B abbia massa M e momento d'inerzia baricentrico J;
- le masse degli altri elementi e gli attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Dato il sistema in figura, operante nel piano verticale:

- scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio per il sistema;
- scrivere le equazioni differenziali linearizzate del sistema nell'intorno di una configurazione di equilibrio stabile;
- determinare le frequenze proprie del sistema libero non smorzato;
- descrivere come la presenza dello smorzatore modifica le frequenze proprie del sistema e l'equazione del moto dello stesso

Si ritengano note: la lunghezza delle aste (la cui massa sia trascurabile), massa m e momento d'inerzia baricentrico J dei dischi C e D e la lunghezza indeformata della molla, pari ad AB .



Es. 3 – Descrivere i principi di funzionamento dei freni confrontando in particolare quelli a ceppi e quelli a disco

Soluzione proposta

Esercizio 1

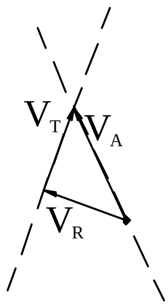
Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	**Traiettoria**	**Velocità**	**Accelerazione**
O, O'	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O'	?	?
B	Punto a terra	Nulla	Nulla

È inoltre nota la velocità di allungamento dell'attuatore C, cioè, in un sistema rotante centrato in O e solidale con l'attuatore, la velocità relativa di A.

1° quesito
Il moto del cedente incernierato in B è imposto dal punto A; conviene allora studiare il moto di quest'ultimo, in un riferimento con origine in O, rotante con l'attuatore C. In questo riferimento, la velocità di A può essere scomposta come segue:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
? ($\omega_{AO'}$ AO')	v	? (ω_{AO} AO)
$\perp$ AO'	// OA	$\perp$ OA

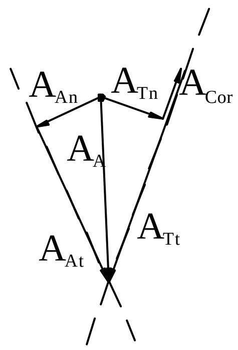


Dal grafico, noti i moduli di $\mathbf{V_A}$ e $\mathbf{V_{tr}}$, si ricavano i valori delle velocità angolari del segmento AO' e dell'attuatore:

$\omega_{AO'} = V_A / AO'$
$\omega_{AO} = V_{tr} / AO$

Passando all'accelerazione del punto A, questa può essere espressa come segue (essendo la velocità di allungamento dell'attuatore costante per ipotesi, l'accelerazione relativa del punto A è nulla):

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
$\omega^2_{AO'}$ AO'	?($\dot{\omega}_{AO'}$ AO')	ω^2_{AO} AO	?($\dot{\omega}_{AO}$ AO)	0	2 ω_{AO} V_{rel}
// AO'	$\perp$ AO'	// AO	$\perp$ AO	/	$\perp$ AO
verso O'		verso O			

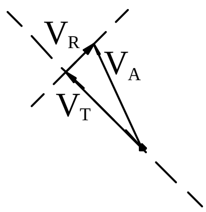


Sono note a questo punto le accelerazioni angolari del segmento AO' e dell'attuatore:

$\dot{\omega}_{AO'} = A_{At}$ / AO'
$\dot{\omega}_{AO} = A_{trt}$ / AO (verso orario)

Conoscendo il moto di A, è ora possibile studiare il moto della guida incernierata in B. A questo scopo si può studiare il moto di A nel riferimento centrato in B e rotante solidalmente con la guida, in modo da ricavarne velocità ed accelerazione angolari:

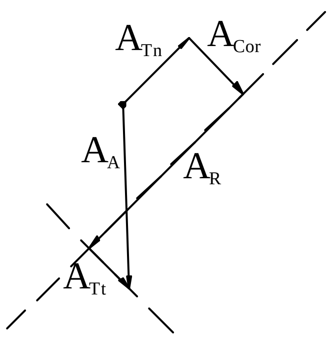
$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
$\omega_{AO'}$ AO'	?	? (ω_{AB} AB)
$\perp$ AO'	// AB	$\perp$ AB



Si ricava dunque:

$\omega_{AB} = V_{tr}$ / AB

$\mathbf{A_A}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
nota	ω^2_{AB} AB	?($\dot{\omega}_{AB}$ AB)	?	2 ω_{AB} V_{rel}
nota	// AB	$\perp$ AB	// AB	$\perp$ AB
	verso B			



Si ricava inoltre:

$\dot{\omega}_{AB} = A_{trt} / AB$

ω_{AB} e $\dot{\omega}_{AB}$ erano le richieste del primo quesito.

2° quesito
Per il calcolo della pressione nel cilindro C, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r - W_p$$

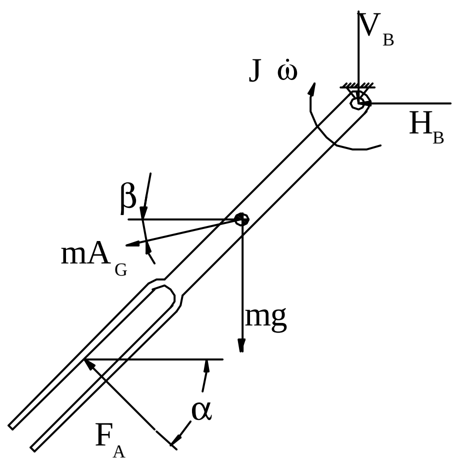
- l'unico elemento a contribuire all'energia cinetica del sistema è il cedente incernierato in B:
  $$\frac{dE_C}{dT} = M\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J\, \mathbf{w_{AB}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{AB}}$$
  dove velocità ed accelerazione di G possono essere ricavate facilmente conoscendo ω_{AB} e $\dot{\omega}_{AB}$
- La potenza motrice è data dalla forza di pressione nell'attuatore:
  $W_m = p\, S\, V$
  dove V è uno dei dati del problema
- La potenza resistente è legata al peso del cedente:
  $W_r = -M\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
- La potenza perduta è nulla per l'ipotesi di attriti trascurabili:
  $W_p = 0$

Si ha quindi:

$$M\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J\, \mathbf{w_{AB}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{AB}} = p\, S\, V + M\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$$

che è un'equazione lineare nella sola incognita p, che può quindi essere ricavata.

3° quesito
Per il calcolo della reazione in B, si possono scrivere le tre equazioni di equilibrio dinamico del cedente:



$\Sigma F_H = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B + mA_G \cos\beta + F_A \cos\alpha = 0$

$\Sigma F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B + mg + mA_G \sin\beta - F_A \sin\alpha = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad J\dot{\omega} + mA_{G(tan)}\, BG - mg \sin\gamma + F_A\, AB = 0$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite H_B, V_B, F_A, che possono quindi essere ricavate.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:
α: rotazione assoluta del pendolo incernierato in A (positiva se oraria)
β: rotazione assoluta del pendolo incernierato in B (positiva se oraria)
Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica
Ciascun pendolo contribuisce all'energia cinetica del sistema con un contributo traslazionale ed un rotazionale:

$$E_C = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m(2L\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\beta})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(4mL^2 + J)\,\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(mL^2 + J)\,\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2}J_1\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\beta}^2$$

Calcolo dell'energia potenziale
L'allungamento del gruppo molla – smorzatore è dato da:

$$\Delta L = \frac{1}{2}L\,(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)$$

da cui la variazione di energia potenziale della molla è data da:

$$V_K = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{2}L\,(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)\right)^2 = \frac{1}{2}\,k\,\frac{L^2}{4}(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)^2$$

Per quanto riguarda le forze peso, occorre tenere conto dell'innalzamento dei baricentri:

$$V_P = mg\,(2L\,(1-\cos\alpha) + L\,(1-\cos\beta))$$

L'energia potenziale totale è data quindi da:

$$V = \frac{1}{2}k\,\frac{L^2}{4}(\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha)^2 + mg\,(2L\,(1-\cos\alpha) + L\,(1-\cos\beta))$$

Calcolo del termine dissipativo
La velocità di allungamento dell'elemento smorzante è data da:

$$\Delta\dot{L} = \frac{1}{2}L\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\dot{\beta} - \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot{\alpha}\right)$$

per cui la funzione dissipativa è data da:

$$D = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\dot\beta - \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4}\left((1+tg^2\beta)\dot\beta - (1+tg^2\alpha)\dot\alpha\right)^2$$

Equazioni di moto non lineari
Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale, e della funzione dissipativa del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot\alpha}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\alpha} + \frac{\partial D}{\partial\dot\alpha} + \frac{\partial V}{\partial\alpha} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot\beta}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\beta} + \frac{\partial D}{\partial\dot\beta} + \frac{\partial V}{\partial\beta} = 0$$

$$J_1\ \ddot\alpha + r\frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\dot\beta - \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot\alpha\right)\left(-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + k\frac{L^2}{4}(tg\beta - tg\alpha)\left(-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + mg\ 2L\ \sin\alpha = 0$$
$$J_2\ \ddot\beta + r\frac{L^2}{4}\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\dot\beta - \frac{1}{\cos^2\alpha}\dot\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right) + k\frac{L^2}{4}(tg\beta - tg\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right) + mg\ L\ \sin\beta = 0$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, che può essere risolto in generale con metodi numerici.

Linearizzazione del sistema
Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). Si ha:

$$\frac{\partial V}{\partial\alpha} = k\frac{L^2}{4}(tg\beta - tg\alpha)\left(-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right) + mg\ 2L\ \sin\alpha$$
$$\frac{\partial V}{\partial\beta} = k\frac{L^2}{4}(tg\beta - tg\alpha)\left(\frac{1}{\cos^2\beta}\right) + mg\ L\ \sin\beta$$

Si osserva che tali derivate si annullano per $\alpha = \beta = 0$; per verificare che la configurazione trovata sia di equilibrio stabile deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{L^2}{4} + 2\ mg\ L > 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad k\frac{L^2}{4} + mg\ L > 0$$
$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha^2}\right|_{0,0}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\beta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad \left(k\frac{L^2}{4} + 2\ mg\ L\right)\left(k\frac{L^2}{4} + mg\ L\right) - \left(-k\frac{L^2}{4}\right)^2 > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile. Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche che non siano quadratiche nelle variabili del problema (in questo caso l'energia potenziale e la funzione

dissipativa), arrestando lo sviluppo ai termini di secondo ordine e supponendo piccoli gli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio.
Avremo:

$$V = V(\alpha,\beta) \cong V\big|_{0,0} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\bigg|_{0,0}\alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta}\bigg|_{0,0}\beta + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\bigg|_{0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\bigg|_{0,0}\frac{\beta^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{0,0}\alpha\beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$V \cong \frac{1}{2}\ k\ \frac{L^2}{4}(\beta - \alpha)^2 + \frac{1}{2} mg\ (2L\alpha^2 + L\beta^2)$$

Per quanto riguarda la funzione dissipativa, occorre osservare che essa è funzione di α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, e che nella configurazione di equilibrio queste variabili sono nulle:

$$\begin{aligned}
D = D(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) \cong D\big|_{0,0,0,0} &+ \frac{\partial D}{\partial \alpha}\bigg|_{0,0,0,0}\alpha + \frac{\partial D}{\partial \beta}\bigg|_{0,0,0,0}\beta + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}}\bigg|_{0,0,0,0}\dot{\alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}}\bigg|_{0,0,0,0}\dot{\beta} + \\
&+ \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha^2}\bigg|_{0,0,0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \beta^2}\bigg|_{0,0,0,0}\frac{\beta^2}{2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha \partial \beta}\bigg|_{0,0,0,0}\alpha\beta + \\
&+ \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha \partial \dot{\beta}}\bigg|_{0,0,0,0}\alpha\dot{\beta} + \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\alpha} \partial \beta}\bigg|_{0,0,0,0}\dot{\alpha}\beta + \frac{\partial^2 D}{\partial \alpha \partial \dot{\alpha}}\bigg|_{0,0,0,0}\alpha\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 D}{\partial \beta \partial \dot{\beta}}\bigg|_{0,0,0,0}\beta\dot{\beta} + \\
&+ \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\alpha}^2}\bigg|_{0,0,0,0}\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\beta}^2}\bigg|_{0,0,0,0}\frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{\alpha} \partial \dot{\beta}}\bigg|_{0,0,0,0}\dot{\alpha}\dot{\beta}
\end{aligned}$$

Di tutti i termini dello sviluppo, occorre innanzitutto notare che gli unici utili ai fini delle equazioni di Lagrange sono quelli che presentano $\dot{\alpha}$ o $\dot{\beta}$ almeno al primo ordine, poiché gli altri scompaiono a causa delle derivazioni rispetto a $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$.

$$D = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4}((1 + tg^2\beta)\dot{\beta} - (1 + tg^2\alpha)\dot{\alpha})^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4} 2((1 + tg^2\beta)\dot{\beta} - (1 + tg^2\alpha)\dot{\alpha})\cdot 2tg\alpha\cdot(1 + tg^2\alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4} 2((1 + tg^2\beta)\dot{\beta} - (1 + tg^2\alpha)\dot{\alpha})\cdot 2tg\beta\cdot(1 + tg^2\beta)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4} 2((1 + tg^2\beta)\dot{\beta} - (1 + tg^2\alpha)\dot{\alpha})(1 + tg^2\alpha)$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = \frac{1}{2}\ r\ \frac{L^2}{4} 2((1 + tg^2\beta)\dot{\beta} - (1 + tg^2\alpha)\dot{\alpha})(1 + tg^2\beta)$$

Tutte queste derivate sono nulle nella configurazione di equilibrio; si può osservare inoltre che le uniche derivate seconde non nulle sono quelle che moltiplicano i termini in $\dot{\alpha}^2$, $\dot{\beta}^2$, $\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}$; in definitiva, lo sviluppo di Taylor della funzione dissipativa arrestato agli infinitesimi di secondo ordine è dato da:

$$D \cong \frac{1}{2}\, r\, \frac{L^2}{4}\, (\dot{\beta} - \dot{\alpha})^2$$

Gli sviluppi di V e D sono forme quadratiche che, derivate, daranno luogo a equazioni lineari:

$$J_1\, \ddot{\alpha} + r\frac{L^2}{4}\, (\dot{\beta} - \dot{\alpha})(-1) + k\frac{L^2}{4}(\beta - \alpha)(-1) + mg\, 2L\, \alpha = 0$$

$$J_2\, \ddot{\beta} + r\frac{L^2}{4}(\dot{\beta} - \dot{\alpha}) + k\frac{L^2}{4}(\beta - \alpha) + mg\, L\, \beta = 0$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} rL^2/4 & -rL^2/4 \\ -rL^2/4 & rL^2/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} kL^2/4 + 2Lmg & -kL^2/4 \\ -kL^2/4 & kL^2/4 + Lmg \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mettendo in evidenza le matrici di massa, smorzamento, rigidezza che verranno utilizzate nel calcolo delle frequenze proprie.

Calcolo delle frequenze proprie del sistema libero non smorzato

Il sistema libero non smorzato viene descritto dal sistema di equazioni precedente, avendo annullato la matrice di smorzamento; la soluzione in questo caso è armonica pura, cioè del tipo $X = X_0\, e^{i\Omega t}$; sostituendo questo tipo di soluzione nel sistema, si trova che, per avere soluzioni diverse dalla banale ($X_0 = 0$), occorre che Ω sia uno degli autovalori della matrice $-\Omega^2\, [M] + [K]$:

$$\det(-\Omega^2\, [M] + [K]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\Omega^2 J_1 + kL^2/4 + 2Lmg & -kL^2/4 \\ -kL^2/4 & -\Omega^2 J_2 + kL^2/4 + Lmg \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(-\Omega^2\, J_1 + kL^2/4 + 2Lmg)(-\Omega^2\, J_2 + kL^2/4 + Lmg) - (-kL^2/4)^2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in Ω^2, che ammetterà due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le due frequenze proprie del sistema libero non smorzato.

Calcolo delle frequenze proprie del sistema smorzato

In questo caso la soluzione del sistema non è armonica pura, ma in generale sarà del tipo $X = X_0\, e^{\lambda t}$ con λ complesso. L'equazione algebrica da risolvere sarà in questo caso:

$$\det(\lambda^2\, [M] + \lambda\, [D] + [K]) = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di quarto grado in λ, che ammetterà quattro soluzioni complesse, coniugate a due a due, con parti reali negative (altrimenti il sistema sarebbe dinamicamente instabile); le parti immaginarie saranno le frequenze proprie del sistema smorzato.

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

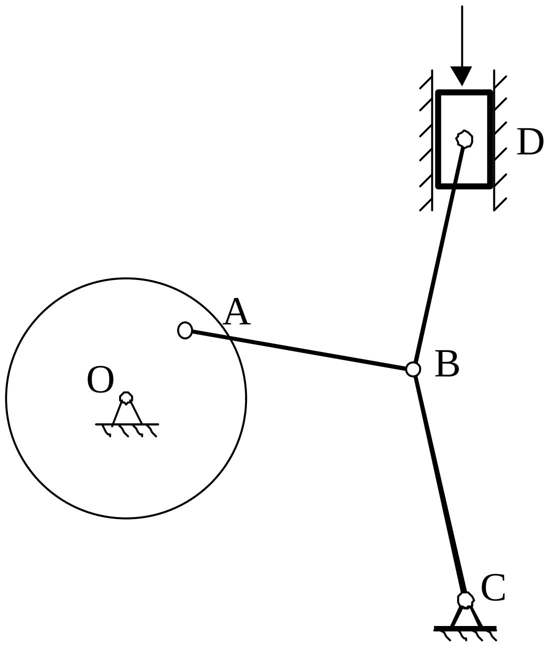
prof. A. Curami – Appello del 23 giugno 1999

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione assoluta del pistone D;
- la coppia motrice applicata al disco incernierato in O;
- le reazioni nella cerniera C.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

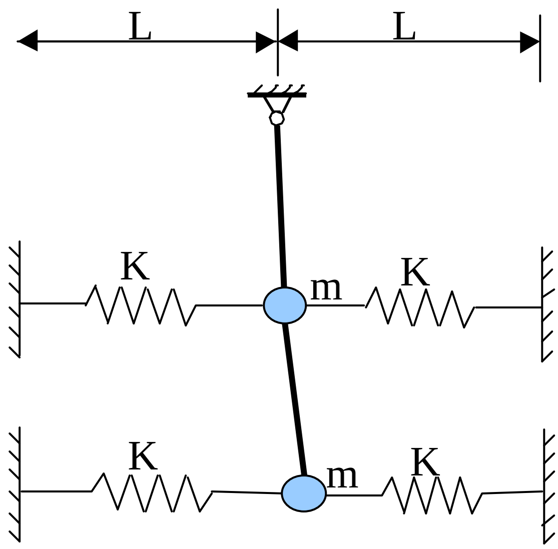
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare del motore sia ω=costante e diretta in verso antiorario;
- il volano abbia massa M e momento di inerzia rispetto al baricentro O pari a J;
- le masse delle aste e gli attriti siano trascurabili;
- il pistone sia puntiforme con massa m e caricato dalla forza F indicata.



Es. 2 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio del sistema;
- linearizzare le precedenti reazioni nell'intorno della posizione di equilibrio;
- determinare le frequenze proprie del sistema linearizzato;
- discutere le variazioni delle frequenze proprie del sistema al variare dei valori di k e di m

A tal fine si ritengano note: la massa m delle due sfere considerate puntiformi, la costante elastica K delle molle e le dimensioni del sistema riportate in figura. Si supponga inoltre che la lunghezza delle molle indeformate sia pari ad L e si ipotizzi che nel loro spostamento si mantengano orizzontali.



Es. 3 - Fondazione rigida e fondazione sospesa: si confrontino criticamente le due soluzioni giustificandone le specifiche caratteristiche.

Soluzione proposta

Esercizio 1

Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

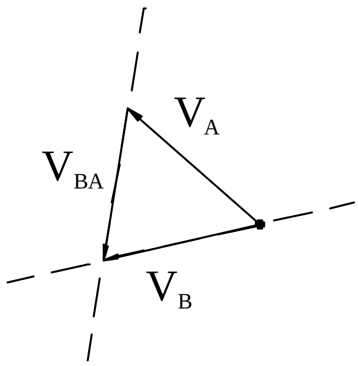
Punto	Traiettoria	Velocità	Accelerazione
O, C	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	ω OA	Nota
B	Circonferenza centrata in C	?	?
D	Parallela alla guida (rettilinea verticale)	?	?

Il punto A si muove con velocità costante lungo una circonferenza centrata in O, per cui la sua accelerazione ha la sola componente normale diretta verso O con modulo ω^2 OA.

1° quesito

Il sistema è composto dal quadrilatero articolato OABC e dalla biella DB; per studiare il moto di D, occorre dapprima calcolare velocità ed accelerazione del punto B. La velocità di quest'ultimo può essere scomposta nel modo seguente, riferendosi ad una terna traslante di moto circolare uniforme con origine in A:

$\mathbf{V_B}$ =	$\mathbf{V_A}$ +	$\mathbf{V_{BA}}$
? (ω_{BC} BC) $\perp$ BC	ω OA $\perp$ OA	? (ω_{AB} AB) $\perp$ BA

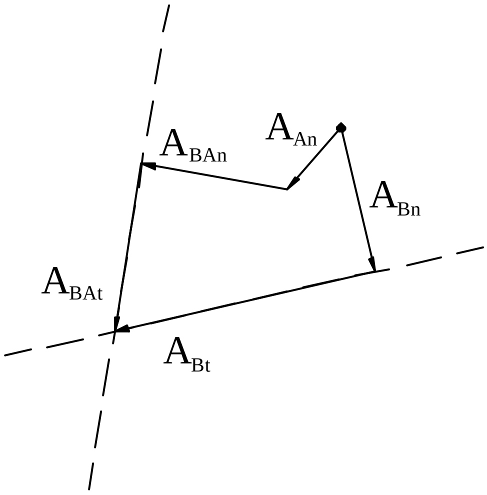


Dal grafico, noti i moduli di $\mathbf{V_B}$ e $\mathbf{V_{BA}}$, si ricavano i valori delle velocità angolari delle bielle BC e BA:

$\omega_{BC} = V_B$ / BC (verso antiorario)
$\omega_{AB} = V_{BA}$ / AB (verso orario)

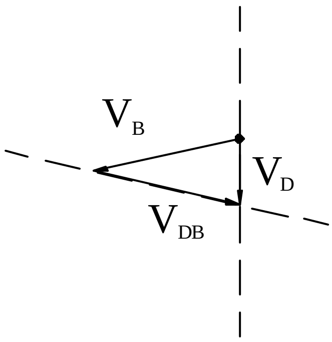
Riferendosi alla stessa terna traslante con origine in A, si può calcolare l'accelerazione assoluta di B; essendo nulla la velocità angolare del sistema di riferimento, è nulla l'accelerazione complementare:

$\mathbf{A_{Bn}}$ +	$\mathbf{A_{Bt}}$ =	$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ +	$\mathbf{A_{BAn}}$ +	$\mathbf{A_{BAt}}$
ω^2_{BC} BC // BC verso C	?($\dot{\omega}_{BC}$ BC) ⊥ BC	ω^2 AO // AO verso O	0 /	ω^2_{AB} AB // BA verso A	? ⊥ BA



Conoscendo velocità ed accelerazione di B, è ora possibile studiare il moto del pistone D. A questo scopo, si può assumere un riferimento traslante con l'origine nel punto B; la velocità di D può essere scomposta allora come segue:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_B}$ +	$\mathbf{V_{DB}}$
? // guida	nota ⊥ BC	? (ω_{DB} DB) ⊥ DB

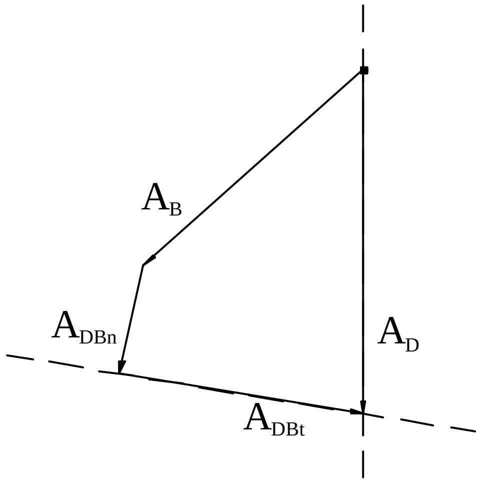


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{DB}}$, si ricava il valore della velocità angolare della biella DB:

$\omega_{DB} = V_{DB} / DB$ (verso antiorario)

Riferendosi alla stessa terna traslante con origine in B, si può calcolare l'accelerazione assoluta di D; essendo nulla la velocità angolare del sistema di riferimento, è nulla l'accelerazione complementare:

$\mathbf{A_D}$ =	$\mathbf{A_B}$ +	$\mathbf{A_{DBn}}$ +	$\mathbf{A_{DBt}}$
? // guida	nota nota	ω^2_{DB} DB // BD verso B	? ⊥ BD



2° quesito

Per il calcolo della coppia motrice, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r - W_p$$

- essendo costante la velocità del motore, l'energia cinetica del volano è costante; l'unico elemento la cui energia cinetica varia nel tempo è dunque il pistone:
  $\frac{dE_C}{dT} = m\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D}$
- La potenza motrice è data da:
  $W_m = C\,\omega$
  dove ω è uno dei dati del problema
- La potenza resistente è legata al peso del pistone ed alla forza ad esso applicata:
  $W_r = -(m\mathbf{g} + \mathbf{F}) \cdot \mathbf{V_G}$
- La potenza perduta è nulla per l'ipotesi di attriti trascurabili:
  $W_p = 0$

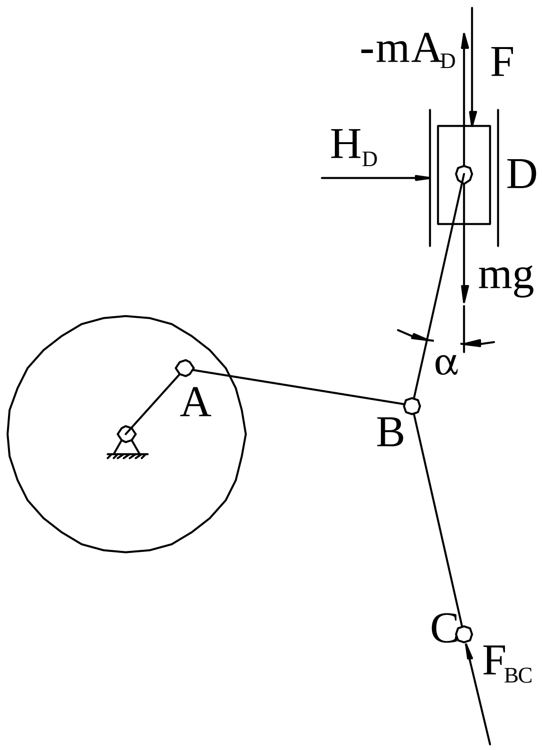
Si ha quindi:

$$m\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} = C\,\omega + (m\mathbf{g} + \mathbf{F}) \cdot \mathbf{V_G}$$

che è un'equazione lineare nella sola incognita C, che può quindi essere ricavata.

3° quesito

Si può innanzitutto osservare che l'asta BC è una biella, per cui della reazione vincolare F_{BC} in C è nota la direzione (parallela alla biella BC). Per procedere al calcolo della reazione richiesta, si può evidenziare la reazione vincolare in D (che presenta la sola componente orizzontale grazie all'ipotesi di assenza di attrito) e scrivere un'equazione di momento della biella BD intorno a B e un'equazione di momento del sottosistema DBCA intorno ad A:



$\Sigma\ \mathbf{M}_B^{DB} = 0 \quad \Rightarrow \quad (F + mg - mA_D)\sin\alpha + H_D \cos\alpha = 0$

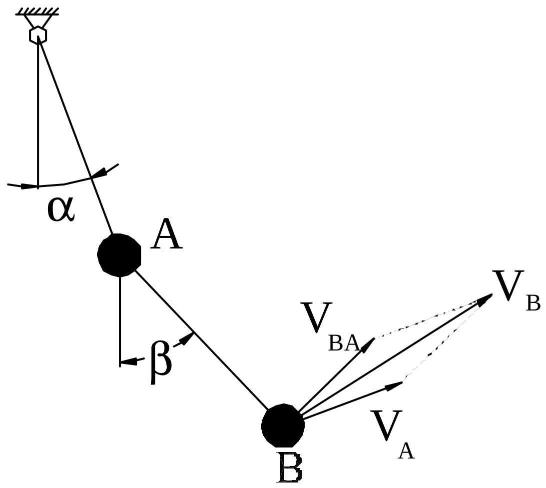
$\Sigma\ \mathbf{M}_B^{DBCA} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\mathbf{A_D} + \mathbf{H_D}) \times \mathbf{(D\text{-}A)} + \mathbf{F_{BC}} \times \mathbf{(C\text{-}A)} = \mathbf{0}$

Si tratta di un sistema di due equazioni nelle due incognite F_{BC}, H_D, che possono quindi essere ricavate.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:
α: rotazione assoluta del pendolo superiore (positiva se antioraria)
β: rotazione assoluta del pendolo inferiore (positiva se antioraria)
Per entrambe le coordinate libere si assume come origine quella con i pendoli verticali.
Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica



Per quanto riguarda il pendolo A, l'energia cinetica è data semplicemente da:

$$E_{cA} = \frac{1}{2} m (L\dot{\alpha})^2$$

Per valutare l'energia cinetica del pendolo B, occorre calcolare la velocità di quest'ultimo come somma della velocità del pendolo A (di trascinamento) e della velocità del pendolo B rispetto ad A (relativa):

$$(V_B)^2 = L^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta} \cos(\beta-\alpha)\right)$$

$$E_{cB} = \frac{1}{2} m L^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + 2\dot{\alpha}\,\dot{\beta} \cos(\beta-\alpha)\right)$$

L'energia potenziale complessiva è data quindi da:

$$E_c = m L^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m L^2 \dot{\beta}^2 + m L^2 \dot{\alpha}\,\dot{\beta} \cos(\beta-\alpha))$$

Calcolo dell'energia potenziale

Trascurando la deformazione delle molle dovuta agli spostamenti verticali dei punti A e B, si ha:

$$V_{kA} = 2 \left(\frac{1}{2} k (L \sin\alpha)^2\right) = kL^2 \sin^2\alpha$$

$$V_{kB} = 2 \left(\frac{1}{2} k (L (\sin\alpha + \sin\beta))^2\right) = kL^2 (\sin\alpha + \sin\beta)^2$$

Occorre poi tenere conto della variazione di energia potenziale legata all'innalzamento dei pendoli:

$$V_g = mgL (1 - \cos\alpha) + mgL ((1 - \cos\alpha) + (1 - \cos\beta))$$

L'energia potenziale del sistema in una generica configurazione è data quindi da:

$$V = kL^2 \sin^2\alpha + kL^2 (\sin\alpha + \sin\beta)^2 + 2mgL (1 - \cos\alpha) + mgL (1 - \cos\beta)$$

Equazioni di moto non lineari

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

Sviluppando i vari termini si ha:

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot\alpha} = 2mL^2\dot\alpha + m\,L^2\dot\beta\,\cos(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot\beta} = m\,L^2\dot\beta + m\,L^2\dot\alpha\,\cos(\beta-\alpha))$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \alpha} = m\,L^2\dot\alpha\,\dot\beta\,\sin(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \beta} = -\,m\,L^2\dot\alpha\,\dot\beta\,\sin(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = kL^2\,2\sin\alpha\,\cos\alpha + kL^2\,2(\sin\alpha + \sin\beta)\cos\alpha + 2mgL\,\sin\alpha$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = kL^2\,2(\sin\alpha + \sin\beta)\cos\beta + mgL\,\sin\beta$$

Il sistema di equazioni differenziali è dunque il seguente:

$$2mL^2\ddot\alpha + mL^2(\ddot\beta\,\cos(\beta-\alpha) - \dot\beta\sin(\beta-\alpha)\cdot(\dot\beta-\dot\alpha)) - mL^2\dot\alpha\,\dot\beta\sin(\beta-\alpha) + kL^2\,2\sin\alpha\,\cos\alpha +$$
$$+ kL^2\,2(\sin\alpha + \sin\beta)\cos\alpha + 2mgL\,\sin\alpha = 0$$

$$mL^2\ddot\beta + mL^2(\ddot\alpha\cos(\beta-\alpha) - \dot\alpha\sin(\beta-\alpha)\cdot(\dot\beta-\dot\alpha)) + mL^2\dot\alpha\,\dot\beta\,\sin(\beta-\alpha) + kL^2\,2(\sin\alpha + \sin\beta)\cos\beta +$$
$$+ mgL\,\sin\beta = 0$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, che può essere risolto in generale con metodi numerici.

Linearizzazione del sistema

Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). Si può osservare che le derivate prime di V si annullano per $\alpha = \beta = 0$; per verificare che la configurazione trovata sia di equilibrio stabile, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 4\,kL^2 + 2\,mgL > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right|_{0,0} > 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\,kL^2 + mgL > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0}\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha\partial\beta}\right|_{0,0}\right)^2 > 0 \qquad \Rightarrow \qquad (4\,kL^2 + 2\,mgL)\,(2\,kL^2 + mgL) - (2\,kL^2)^2 > 0$$

Tali condizioni sono tutte verificate, per cui l'equilibrio nella configurazione trovata è stabile.
Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor dell'energia cinetica e potenziale (che non sono forme quadratiche nelle variabili del problema), arrestando lo sviluppo ai termini di secondo ordine e supponendo piccoli gli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio.
Iniziando dall'energia potenziale, avremo:

$$V = V(\alpha,\beta) \cong V\Big|_{0,0} + \frac{\partial V}{\partial \alpha}\Big|_{0,0}\alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta}\Big|_{0,0}\beta + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\Big|_{0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\Big|_{0,0}\frac{\beta^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha \partial \beta}\Big|_{0,0}\alpha\beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$V \cong (4\,kL^2 + 2\,mgL)\,\frac{1}{2}\,\alpha^2 + (2\,kL^2 + mgL)\,\frac{1}{2}\,\beta^2 + (2\,kL^2)\,\alpha\beta$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, occorre osservare che essa è funzione di α, β, $\dot{\alpha}$, $\dot{\beta}$, e che nella configurazione di equilibrio queste variabili sono nulle:

$$\begin{aligned} E_c = E_c(\alpha,\beta,\dot{\alpha},\dot{\beta}) \cong E_c\Big|_{0,0,0,0} &+ \frac{\partial E_c}{\partial \alpha}\Big|_{0,0,0,0}\alpha + \frac{\partial E_c}{\partial \beta}\Big|_{0,0,0,0}\beta + \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\alpha} + \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\beta} + \\ &+ \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha^2}\Big|_{0,0,0,0}\frac{\alpha^2}{2} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \beta^2}\Big|_{0,0,0,0}\frac{\beta^2}{2} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha \partial \beta}\Big|_{0,0,0,0}\alpha\beta + \\ &+ \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha \partial \dot{\beta}}\Big|_{0,0,0,0}\alpha\dot{\beta} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\alpha} \partial \beta}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\alpha}\beta + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \alpha \partial \dot{\alpha}}\Big|_{0,0,0,0}\alpha\dot{\alpha} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \beta \partial \dot{\beta}}\Big|_{0,0,0,0}\beta\dot{\beta} + \\ &+ \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\alpha}^2}\Big|_{0,0,0,0}\frac{\dot{\alpha}^2}{2} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\beta}^2}\Big|_{0,0,0,0}\frac{\dot{\beta}^2}{2} + \frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\alpha} \partial \dot{\beta}}\Big|_{0,0,0,0}\dot{\alpha}\dot{\beta} \end{aligned}$$

Di tutti i termini dello sviluppo, occorre innanzitutto notare che gli unici utili ai fini delle equazioni di Lagrange sono quelli che presentano $\dot{\alpha}$ o $\dot{\beta}$ almeno al primo ordine, poiché gli altri scompaiono a causa delle derivazioni rispetto a $\dot{\alpha}$ e $\dot{\beta}$. Tutte le derivate prime dell'energia cinetica (vedi sopra) sono nulle nella configurazione di equilibrio; si può osservare inoltre che le uniche derivate seconde non nulle sono quelle che moltiplicano i termini in $\dot{\alpha}^2$, $\dot{\beta}^2$, $\dot{\alpha}\cdot\dot{\beta}$; in definitiva, lo sviluppo di Taylor dell'energia cinetica arrestato agli infinitesimi di secondo ordine è dato da:

$$E_c \cong 2mL^2\,\frac{1}{2}\,\dot{\alpha}^2 + mL^2\,\frac{1}{2}\,\dot{\beta}^2 + mL^2\,\dot{\alpha}\,\dot{\beta}$$

A questo punto, nelle ipotesi assunte (piccoli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio stabile), l'energia cinetica e potenziale sono approssimate con forme quadratiche che, derivate, daranno luogo a equazioni lineari:

$$2mL^2\,\ddot{\alpha} + mL^2\,\ddot{\beta} + (4\,kL^2 + 2\,mgL)\alpha + (2\,kL^2)\beta = 0$$
$$mL^2\,\ddot{\alpha} + mL^2\,\ddot{\beta} + (2\,kL^2)\alpha + (2\,kL^2 + mgL)\,\beta = 0$$

Il sistema può essere scritto in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} 2mL^2 & mL^2 \\ mL^2 & mL^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 4kL^2 + 2mgL & 2kL^2 \\ 2kL^2 & 2kL^2 + mgL \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mettendo in evidenza le matrici di massa e rigidezza che verranno utilizzate nel calcolo delle frequenze proprie.

Calcolo delle frequenze proprie del sistema

Essendo le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, gli autovalori del sistema saranno immaginari puri; cerchiamo allora soluzioni del tipo $X = X_0 e^{i\Omega t}$. Sostituendo nel sistema, si trova che, per avere soluzioni diverse dalla banale ($X_0 = 0$), occorre che Ω sia uno degli autovalori della matrice $-\Omega^2 [M] + [K]$:

$$\det(-\Omega^2 [M] + [K]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\Omega^2 2mL^2 + 4kL^2 + 2mgL & 2kL^2 \\ 2kL^2 & -\Omega^2 mL^2 + 2kL^2 + mgL \end{bmatrix}\right) = 0$$

$$(-\Omega^2\, 2mL^2 + 4kL^2 + 2mgL)(-\Omega^2\, mL^2 + 2kL^2 + mgL) - (2kL^2)^2 = 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in Ω^2, che ammetterà due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le due frequenze proprie del sistema libero non smorzato.

Meccanica applicata alle macchine – Allievi Aerospaziali

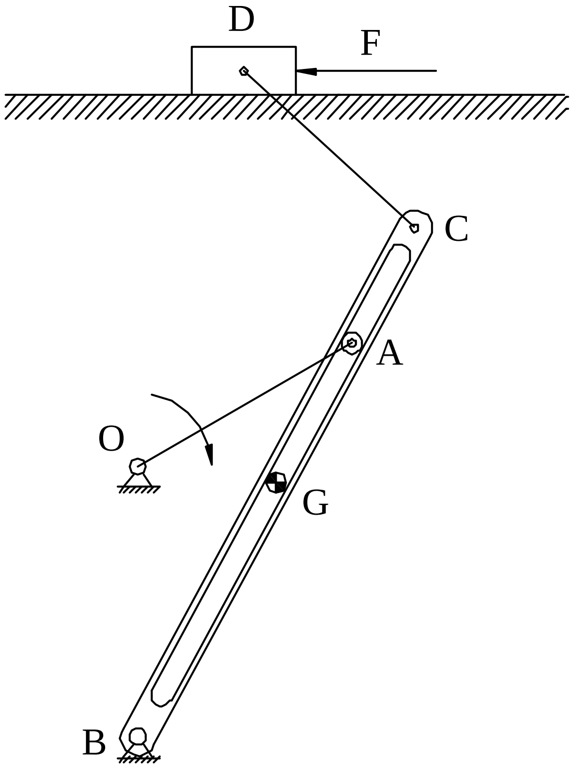
Prof. A. Curami – Appello del 7 luglio 1999

Es. 1 – Considerato il meccanismo in figura, si determini, per la configurazione rappresentata:

- velocità ed accelerazione assolute del punto D;
- la coppia da applicare alla manovella OA;
- le reazioni vincolari in B.

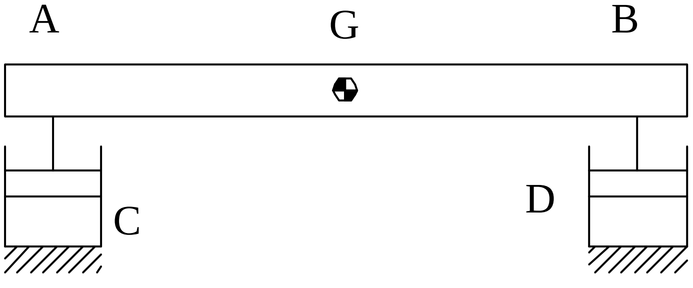
Nello svolgimento si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare della manovella OA sia ω=costante e diretta in verso orario;
- il glifo BC abbia massa M e momento di inerzia rispetto al baricentro G pari a J;
- la slitta D sia puntiforme con massa m;
- il coefficiente di attrito radente fra slitta e piano sia f;
- le masse degli altri elementi e gli altri attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Nel sistema in figura, operante nel piano verticale, la trave AB ha massa m e momento d'inerzia baricentrico J; tale trave è sospesa su due molle pneumatiche identiche, contenenti un gas le cui trasformazioni sono descritte da una politropica di indice k (pV^k = costante). Dopo aver trovato la posizione di equilibrio statico del sistema soggetto a gravità, e dopo aver linearizzato il comportamento delle molle nell'intorno di tale posizione, si calcolino le frequenze proprie del sistema. Sono dati:

- il volume V_0 dei cilindri con gas a pressione atmosferica;
- la superficie S degli stantuffi;
- la lunghezza 2L dell'asta, assimilandola pari alla distanza fra gli attacchi delle molle pneumatiche.



Es. 3 – Principi di funzionamento dei rotismi epicicloidali e loro applicazioni.

Soluzione proposta

Esercizio 1

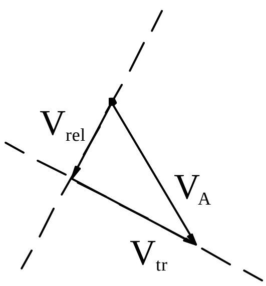
Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	Traiettoria	Velocità	Accelerazione
O, B	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	ω OA	Nota
C	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela al piano π	?	?

Il punto A si muove con velocità costante lungo una circonferenza centrata in O, per cui la sua accelerazione ha la sola componente normale diretta verso O con modulo ω^2 OA.

1° quesito
Il sistema è composto da un meccanismo a glifo oscillante (manovella OA, glifo BC), che aziona la slitta D mediante un manovellismo non centrato. Occorre quindi studiare dapprima il meccanismo a glifo, calcolandone in particolare velocità ed accelerazione angolari. A questo scopo, conviene scomporre velocità ed accelerazione assolute del punto A (note) in un sistema di riferimento rotante solidale con il glifo ed avente origine in B. Per quanto riguarda la velocità:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
ω OA $\perp$ OA	? // BC	? (ω_{BC} BA) $\perp$ BA

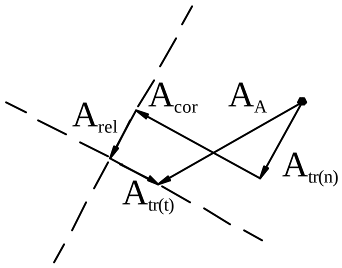


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{tr}}$, si ricava il valore della velocità angolare del glifo BC:

$\omega_{BC} = V_{tr}$ / BA verso orario

Passando alle accelerazioni:

$\mathbf{A_A}$ =	$\mathbf{A_{tr(t)}}$ +	$\mathbf{A_{tr(n)}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2 OA // OA verso O	?($\dot{\omega}_{BC}$ BA) $\perp$ BA	ω^2_{BC} BA // BA verso B	? // BC	$2\omega_{BC}$ V_{rel} $\perp$ BA



Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{A_{tr(t)}}$, si ricava il valore dell'accelerazione angolare del glifo BC:

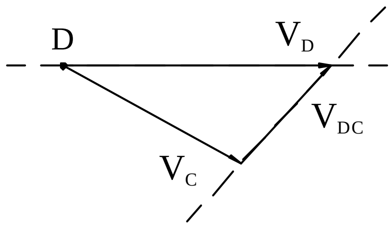
$\dot{\omega}_{BC} = A_{tr(t)} / BA$ verso orario

Note a questo punto velocità ed accelerazione angolari del glifo, sono note velocità ed accelerazione di qualsiasi punto dello stesso; in particolare, per lo svolgimento del problema sono necessarie quelle relative ai punti C e G; detti **n** e **t** i versori rispettivamente parallelo (verso B) e normale al segmento BC, si ha:

$V_C = \omega_{BC}\, BC\, \mathbf{t}$ $\qquad A_C = \omega^2_{BC}\, BC\, \mathbf{t} + \dot{\omega}_{BC}\, BC\, \mathbf{n}$
$V_G = \omega_{BC}\, BG\, \mathbf{t}$ $\qquad A_G = \omega^2_{BC}\, BG\, \mathbf{t} + \dot{\omega}_{BC}\, BG\, \mathbf{n}$

È ora possibile calcolare velocità ed accelerazione del punto D: a questo scopo conviene considerare un sistema di riferimento traslante con moto circolare, avente origine nel punto C. Per le velocità:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_C}$ +	$\mathbf{V_{DC}}$
?	ω_{BC} BC	? (ω_{DC} DC)
// piano	$\perp$ BC	$\perp$ DC

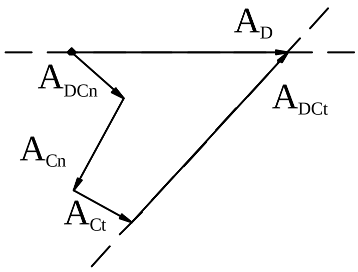


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{DC}}$, si ricava il valore della velocità angolare della biella DC:

$\omega_{DC} = V_{DC} / DC$ verso orario

Passando alle accelerazioni:

$\mathbf{A_D}$ =	$\mathbf{A_C}$ +	$\mathbf{A_{DCn}}$ +	$\mathbf{A_{DCt}}$
?	noto	ω^2_{DC} DC	? ($\dot{\omega}_{DC}$ DC)
// π	nota	// DC verso C	$\perp$ DC



2° quesito

Per il calcolo della coppia richiesta, si può ricorrere ad un bilancio di potenze, espresso nella forma:

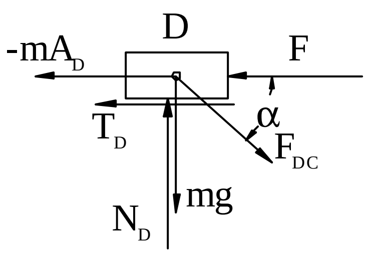
$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r - W_p$$

- Contribuiscono all'energia cinetica del sistema il glifo BC e la slitta puntiforme D:
  $$\frac{dE_C}{dT} = m\ \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + M\ \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J\ \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}}$$
- La potenza motrice è data da:
  $W_m = C\ \omega$
  dove ω è uno dei dati del problema
- La potenza resistente è legata alla forza resistente F e alla forza peso del glifo:
  $W_r = -\ \mathbf{F} \cdot \mathbf{V_G} - M\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
- La potenza perduta è dovuta all'attrito radente fra slitta e piano
  $W_p = -\ \mathbf{T_D} \cdot \mathbf{V_D}$

Si ha quindi:

$$m\ \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + M\ \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J\ \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} = C\ \omega + \mathbf{F} \cdot \mathbf{V_G} + M\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G} + \mathbf{T_D} \cdot \mathbf{V_D}$$

che è un'equazione lineare nelle incognite C e T_D; quest'ultima può essere ricavata facilmente considerando l'equilibrio dinamico della slitta:



$mA_D + F_{DC} \cos\alpha - F - T_D = 0$
$N_D - mg - F_{DC} \sin\alpha = 0$

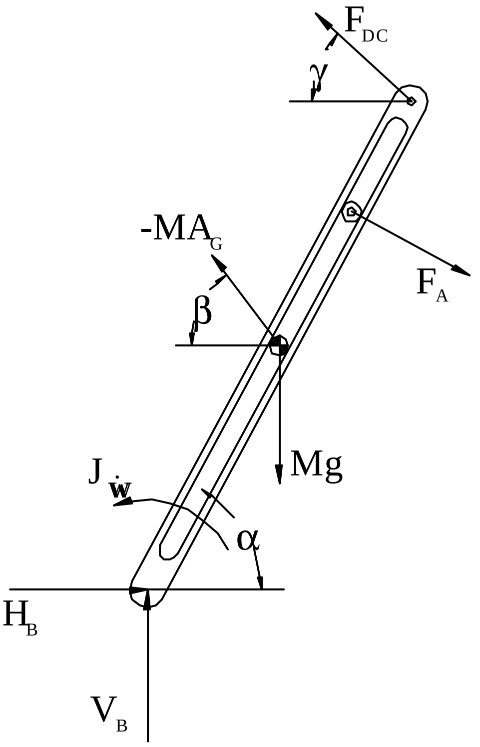
A queste equazioni, va aggiunta la relazione che lega la componente tangenziale a quella normale:

$T_D = f\ N_D$

Si tratta di quattro equazioni lineari nelle quattro incognite C, T_D, N_D, F_{DC}, per cui il problema è risolto.

3° quesito

Per calcolare le reazioni vincolari in B, si può considerare il glifo separatamente, evidenziando le azioni esercitate dagli altri elementi del sistema; si osserva in particolare che, nell'ipotesi di assenza di attrito, l'azione esercitata dalla manovella OA è normale all'asse del glifo:



Si ha:

$\Sigma F_X = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B - MA_G \cos\beta + F_A \sin\alpha - F_{DC} \cos\gamma = 0$

$\Sigma F_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_B - Mg + MA_G \sin\beta - F_A \cos\alpha + F_{DC} \sin\gamma = 0$

$\Sigma M_B = 0 \quad \Rightarrow \quad J\dot{\omega}_{BC} - Mg\, BG \cos\alpha + MA_G\, BG \sin(\alpha+\beta) - F_A\, BA + F_{DC}\, BC \cos(\alpha+\gamma) = 0$

Si tratta di un sistema di tre equazioni nelle tre incognite H_B, V_B, F_A, che possono quindi essere calcolate.

Esercizio 2

La soluzione del problema si svolge in tre momenti successivi:

1. calcolo della posizione di equilibrio
2. linearizzazione della caratteristica delle molle pneumatiche
3. scrittura delle equazioni e calcolo delle frequenze proprie

Calcolo della posizione di equilibrio

Per l'equilibrio, ciascuna molla deve sostenere metà del peso dell'asta: indicando con il pedice s le grandezze che si riferiscono alla posizione di equilibrio statico, si ha:

$mg / 2 = p_s\, S$

A questa equazione va associata la legge delle trasformazioni del gas, che consente di ricavare il volume dei cilindri e quindi l'abbassamento corrispondente:

$p_s V_s^k = p_0 V_0^k$

L'abbassamento nella posizione di equilibrio è dato quindi da:

$\delta_s = (V_0 - V_s) / S$

Linearizzazione della caratteristica delle molle pneumatiche

Occorre innanzitutto trovare la funzione che lega la forza F esercitata da ciascuna molla alla sua deformazione δ (rispetto alla posizione di equilibrio); si ha:

$F = p\, S$

dove, per la politropica ipotizzata, la pressione è data da:

$p = p_s\, V_s^k\, V^{-k}$

Il volume nella generica configurazione può essere espresso come:

$V = V_s - S\,\delta$

Sostituendo, otteniamo l'espressione cercata, che lega la forza alla deformazione della molla:

$F = p_s\, V_s^k\, S\, (V_s - S\,\delta)^{-k}$

Come si vede, il legame $F(\delta)$ non è lineare. La linearizzazione di questa funzione può essere fatta arrestandone lo sviluppo di Taylor all'infinitesimo di primo ordine:

$$F(\delta_s + \delta) \cong F(\delta_s) + \left.\frac{\partial F}{\partial \delta}\right|_{\delta=0} \delta$$

Si ha:

$$\frac{\partial F}{\partial \delta} = p_s\, V_s^k\, S\, (-k)(V_s - S\,\delta)^{-k-1}(-S) = k\, S^2\, p_s\, V_s^k\, (V_s - S\,\delta)^{-k-1}$$

L'espressione linearizzata del legame forza – spostamento per le molle è dunque la seguente:

$$F(\delta_s + \delta) \cong p_s\, V_s^k\, S\, (V_s)^{-k} + [k\, S^2\, p_s\, V_s^k\, (V_s)^{-k-1}]\,\delta = p_s\, S + [k\, S^2\, p_s\, V_s^{-1}]\,\delta = F_s + K_L\,\delta$$

avendo indicato con K_L la costante elastica della molla pneumatica con comportamento lineare.

Scrittura delle equazioni e calcolo delle frequenze proprie

Avendo approssimato il comportamento delle molle pneumatiche con una legge lineare, è ora possibile scrivere le equazioni differenziali di equilibrio dinamico del sistema. A questo scopo, conviene scegliere come variabili indipendenti l'abbassamento del baricentro x e la rotazione θ (positiva se oraria) della trave AB attorno al baricentro. L'energia cinetica del sistema è data da:

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale:

- potenziale del peso:
  $V_p = -mg\,x$
- potenziale di deformazione della singola molla: assumendo uno spostamento δ dalla posizione di equilibrio, si ha:
  $F(\delta_s + \delta) \cong F_s + K_L\,\delta \quad \Rightarrow \quad V_k = F_s\,\delta + \frac{1}{2} K_L\,\delta^2 = mg / 2 \cdot \delta + \frac{1}{2} K_L\,\delta^2$

Gli spostamenti degli estremi delle molle in funzione delle coordinate libere del sistema, assumendo piccoli spostamenti nell'intorno dell'equilibrio, sono dati da:

$\delta_A = x - L\theta$
$\delta_B = x + L\theta$

L'energia potenziale del sistema è data quindi da:

$$V = -mg\,x + mg / 2 \cdot (x - L\theta) + \frac{1}{2} K_L\,(x - L\theta)^2 + mg / 2 \cdot (x + L\theta) + \frac{1}{2} K_L\,(x + L\theta)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} K_L\,(x - L\theta)^2 + \frac{1}{2} K_L\,(x + L\theta)^2$$

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

Si ottiene il seguente sistema:

$m\ddot{x} + 2\,K_L\,x = 0$
$J\ddot{\theta} + 2\,L^2\,K_L\,\theta = 0$

Si tratta di due equazioni lineari omogenee in x(t) e θ(t), disaccoppiate; è quindi immediato il calcolo delle frequenze proprie del sistema, che sono date da:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2K_L}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{2L^2K_L}{J}}$$

Ad ω_1 è associato il modo di vibrare in cui la trave trasla verticalmente; ad ω_2 è associato il modo in cui la trave ruota intorno al suo baricentro senza che questo si muova.

Meccanica applicata alle macchine – Allievi Aerospaziali

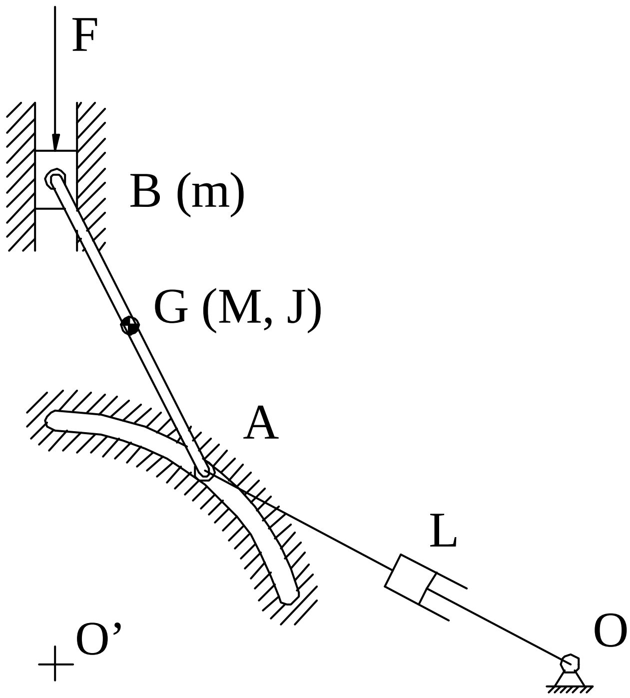
Prof. A. Curami – Appello del 20 luglio 1999

Es. 1 – Considerato il meccanismo in figura, si determini, per la configurazione rappresentata:

- velocità ed accelerazione assolute del punto B;
- la pressione nell’attuatore lineare L;
- le reazioni vincolari in B e in A.

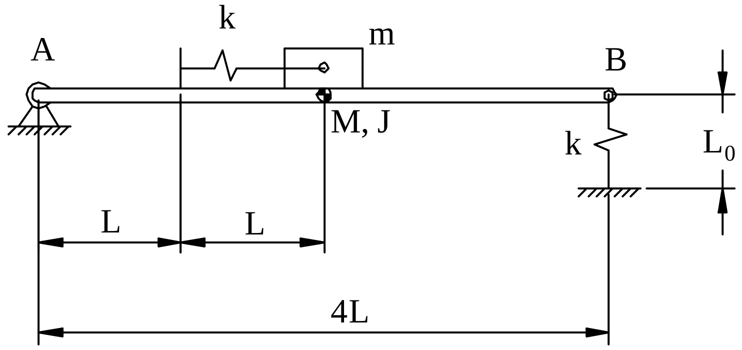
Nello svolgimento si supponga che:

- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità di allungamento dell’attuatore sia costante e pari a V (A si allontana da O); la sezione del cilindro sia S;
- l’asta BA abbia massa M e momento di inerzia rispetto al baricentro G pari a J;
- il corsoio B sia puntiforme con massa m, e su di esso agisca una forza verticale F;
- le masse degli altri elementi e gli attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Il sistema in figura, operante nel piano verticale, è costituito da una trave di massa M e momento d’inerzia baricentrico J, incernierata in A e sospesa su una molla di rigidezza k in B; sulla trave, scorre senza attrito una massa m, vincolata ad essa mediante una molla di rigidezza k. In figura, è rappresentata la configurazione in cui entrambe le molle sono scariche: la molla orizzontale ha cioè lunghezza di riposo pari ad L, mentre quella verticale ha lunghezza di riposo pari a L_0. Si richiede di:

- scrivere le equazioni differenziali non lineari di equilibrio dinamico del sistema;
- linearizzare tali equazioni nell’intorno di una posizione di equilibrio;
- calcolare le frequenze proprie del sistema.



Es. 3 – Descrivere i principi di funzionamento delle frizioni, sviluppando analiticamente, in particolare, il transitorio di un sistema composto da motore e utilizzatore fra i quali sia interposta una frizione.

Soluzione proposta

Esercizio 1

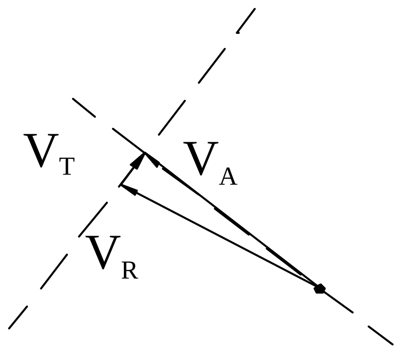
Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	**Traiettoria**	**Velocità**	**Accelerazione**
O, O'	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O'	?	?
B	Parallela alla guida	?	?

È inoltre nota la velocità di allungamento dell'attuatore C, cioè, in un sistema rotante centrato in O e solidale con l'attuatore, la velocità relativa di A.

1° quesito
Per studiare il moto del punto B, occorre prima stabilire velocità ed accelerazioni assolute del punto A, estremo dell'attuatore lineare; a questo scopo, conviene considerare un riferimento con origine in O, rotante con l'attuatore. In questo riferimento, la velocità di A può essere scomposta come segue:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
? ($\omega_{AO'}$ AO')	V	? (ω_{AO} AO)
⊥ AO'	// OA	⊥ OA

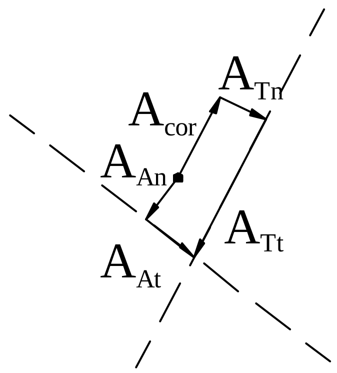


Dal grafico, noti i moduli di $\mathbf{V_A}$ e $\mathbf{V_{tr}}$, si ricavano i valori delle velocità angolari del segmento AO' e dell'attuatore:

$\omega_{AO'} = V_A$ / AO' verso antiorario
$\omega_{AO} = V_{tr}$ / AO verso orario

Passando all'accelerazione del punto A, questa può essere espressa come segue (essendo la velocità di allungamento dell'attuatore costante per ipotesi, l'accelerazione relativa del punto A è nulla):

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr\,n}}$ +	$\mathbf{A_{tr\,t}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
$\omega^2_{AO'}$ AO'	?($\dot\omega_{AO'}$ AO')	ω^2_{AO} AO	?($\dot\omega_{AO}$ AO)	0	2 ω_{AO} V_{rel}
// AO'	⊥ AO'	// AO	⊥ AO	/	⊥ AO
verso O'		verso O			

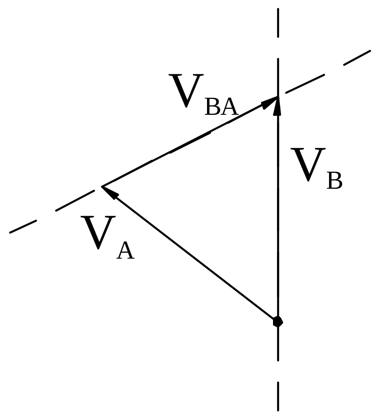


Sono note a questo punto le accelerazioni angolari del segmento AO' e dell'attuatore:

$\dot{\omega}_{AO'} = A_{At}$ / AO'
$\dot{\omega}_{AO} = A_{trt}$ / AO

Passando al punto B, si può ricorrere ad un sistema di riferimento traslante con origine solidale con il punto A; la velocità di B può essere allora espressa come:

$\mathbf{V_B}$ =	$\mathbf{V_A}$ +	$\mathbf{V_{BA}}$
? // guida	$\omega_{AO'}$ AO' ⊥ OA	? (ω_{BA} BA) ⊥ BA

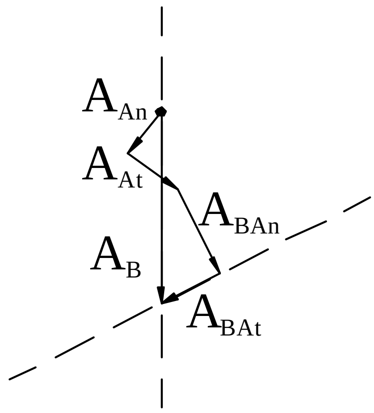


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{BA}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell'asta AB:

$\omega_{BA} = V_{BA}$ / BA verso orario

Passando all'accelerazione del punto B, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_B}$ =	$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ +	$\mathbf{A_{BA\,n}}$ +	$\mathbf{A_{BA\,t}}$ +
? // guida	$\omega^2_{AO'}$ AO' // AO' verso O'	$\dot{\omega}_{AO'}$ AO' ⊥ AO'	ω^2_{BA} BA // BA verso A	?($\dot{\omega}_{BA}$ BA) ⊥ BA



È nota a questo punto anche l'accelerazione angolare dell'asta AB (che servirà in seguito per il calcolo della dinamica):

$\dot{\omega}_{BA} = A_{BAt} / BA$

Per il calcolo della dinamica, occorre inoltre conoscere anche velocità ed accelerazione del baricentro dell'asta AB:

$\mathbf{V_G}$ =	$\mathbf{V_A}$ +	$\mathbf{V_{GA}}$
? ?	$\omega_{AO'}$ AO' $\perp$ OA	ω_{BA} GA $\perp$ GA

$\mathbf{A_G}$ =	$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ +	$\mathbf{A_{GA\,n}}$ +	$\mathbf{A_{GA\,t}}$ +
? ?	$\omega^2_{AO'}$ AO' // AO' verso O'	$\dot{\omega}_{AO'}$ AO' $\perp$ AO'	ω^2_{BA} GA // GA verso A	$\dot{\omega}_{BA}$ GA $\perp$ GA

2° quesito
Per il calcolo della pressione nell'attuatore L, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r - W_p$$

- Contribuiscono all'energia cinetica del sistema il corsoio B e l'asta AB (quest'ultima con un contributo traslazionale ed uno rotazionale):
  $$\frac{dE_C}{dT} = M\,\mathbf{V_G}\cdot\mathbf{A_G} + J\,\mathbf{w_{AB}}\cdot\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{AB}} + m\,\mathbf{V_B}\cdot\mathbf{A_B}$$
  dove velocità ed accelerazione di G sono state ricavate in precedenza
- La potenza motrice è data dalla forza di pressione nell'attuatore:
  $W_m = p\,S\,V$
  dove V è uno dei dati del problema
- La potenza resistente è legata alla forza esterna F ed al peso degli organi dotati di massa:
  $W_r = -\mathbf{F}\cdot\mathbf{V_B} - M\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{V_G} - m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{V_B}$
- La potenza perduta è nulla per l'ipotesi di attriti trascurabili:
  $W_p = 0$

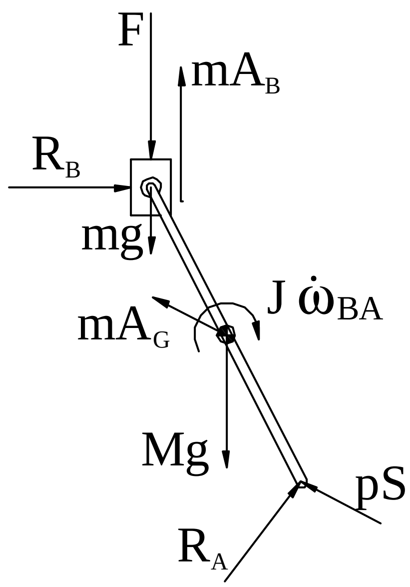
Si ha quindi:

$$M\,\mathbf{V_G}\cdot\mathbf{A_G} + J\,\mathbf{w_{AB}}\cdot\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{AB}} + m\,\mathbf{V_B}\cdot\mathbf{A_B} = p\,S\,V + \mathbf{F}\cdot\mathbf{V_B} + M\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{V_G} + m\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{V_B}$$

che è un'equazione lineare nella sola incognita p, che può quindi essere ricavata.

3° quesito

Delle due reazioni incognite è nota la direzione (normale all'asse della guida sia in B che in A), per cui il numero effettivo di incognite è pari a due. Sono dunque sufficienti le due equazioni di equilibrio dinamico alla traslazione orizzontale e verticale dell'asta AB e del corsoio B:



$$\mathbf{R_B} + \mathbf{F} + m\mathbf{g} - m\mathbf{A_B} + M\mathbf{g} - M\mathbf{A_G} + \mathbf{R_A} + pS\mathbf{n_{AO}} = \mathbf{0}$$

dove nAO indica il versore parallelo ad AO, diretto verso A. Si tratta di un'equazione vettoriale, equivalente cioè ad un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite RB e RA, che possono quindi essere ricavate.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; come coordinate libere possono essere assunte:

θ: rotazione assoluta dell'asta AB, positiva se oraria, misurata a partire dalla posizione orizzontale (condizione in cui la molla verticale è scarica)

x: spostamento della massa m lungo l'asta AB, positiva se verso destra, misurata a partire dalla condizione in cui la molla orizzontale è scarica.

Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica

Il calcolo dell'energia cinetica dell'asta AB non pone problemi particolari. Per quanto riguarda invece la massa m, occorre osservare che il suo moto ha una componente di trascinamento imposta dall'asta (pari a $(2L + x)\dot{\theta}$) e una componente relativa all'asta (pari a $\dot{x}$); tali componenti sono sempre perpendicolari fra loro. L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$E_c = \frac{1}{2} M\,(2L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2 + ((2L + x)\dot{\theta})^2)$$

Calcolo dell'energia potenziale
L'energia potenziale del sistema è legata alle deformazioni delle due molle ed all'innalzamento dei baricentri delle masse; trascurando le deformazioni trasversali delle molle, si ha:

$$V = \frac{1}{2} k\, x^2 + \frac{1}{2} k\, (4L \sin\theta)^2 - Mg\, 2L \sin\theta - mg\, (2L + x) \sin\theta$$

Equazioni di moto non lineari
Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Si ha:

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot\theta} = M\, 4L^2\, \dot\theta + J\dot\theta + m\, (2L + x)^2 \dot\theta$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot\theta}\right) = M\, 4L^2\, \ddot\theta + J\ddot\theta + m\, [(2L + x)^2 \ddot\theta + \dot\theta\, 2(2L + x)\, \dot x]$$
$$\frac{\partial E_C}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k\, 16L^2\, 2\sin\theta \cos\theta - Mg\, 2L \cos\theta - mg\, (2L + x) \cos\theta$$

$$\frac{\partial E_C}{\partial \dot x} = m\, \dot x$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot x}\right) = m\, \ddot x$$
$$\frac{\partial E_C}{\partial x} = m\, \dot\theta^2\, (2L + x)$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx - mg \sin\theta$$

Il sistema di equazioni non lineari è dunque il seguente:

$$M\, 4L^2\, \ddot\theta + J\ddot\theta + m\, [(2L + x)^2 \ddot\theta + \dot\theta\, 2(2L + x)\, \dot x] + k\, 16L^2\, 2\sin\theta \cos\theta - Mg\, 2L \cos\theta + {} - mg\, (2L + x) \cos\theta = 0$$
$$m\, \ddot x - m\, \dot\theta^2\, (2L + x) + kx - mg \sin\theta = 0$$

Si tratta di un sistema omogeneo di due equazioni differenziali, non lineari, nelle incognite $\theta(t)$ e $x(t)$, che può essere risolto in generale con metodi numerici.

Linearizzazione del sistema

Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). La posizione di equilibrio si trova risolvendo il seguente sistema non lineare in θ e x:

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k\, 16L^2\, 2\sin\theta\cos\theta - Mg\, 2L\cos\theta - mg\,(2L + x)\cos\theta = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = kx - mg\sin\theta = 0$$

Assumendo $\theta \neq \pi/2$, è possibile eliminare la dipendenza da $\cos\theta$ nella prima equazione; dalla seconda:

$$\sin\theta = kx / mg$$

che, sostituita nella prima, porta alla soluzione:

$$x_0 = \frac{2Lg(M+m)}{\dfrac{32(Lk)^2}{mg} - mg}$$

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{2Lg(M+m)}{32L^2k - \dfrac{(mg)^2}{k}}\right)$$

Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche che non siano quadratiche nelle variabili del problema (in questo caso sia l'energia cinetica che potenziale), arrestando lo sviluppo ai termini di secondo ordine e supponendo piccoli gli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio.

Avremo:

$$V = V(\theta, x) \cong V\big|_{\theta_0,x_0} + \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{\theta_0,x_0}(\theta-\theta_0) + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{\theta_0,x_0}(x-x_0) + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0,x_0}\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\theta_0,x_0}\frac{(x-x_0)^2}{2} +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\right|_{\theta_0,x_0}(\theta-\theta_0)(x-x_0)$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0,x_0} = 32\, kL^2\cos 2\theta_0 + Mg\, 2L\sin\theta_0 + mg\,(2L + x_0)\sin\theta_0 = k_{\theta\theta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{\theta_0, x_0} = k$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\right|_{\theta_0, x_0} = -mg\cos\theta_0 = k_{\theta x}$$

Ponendo:

$$\bar{\theta} = \theta - \theta_0$$
$$\bar{x} = x - x_0$$

si ha:

$$V \cong \ldots + \frac{1}{2} k_{\theta\theta}\, \bar{\theta}^2 + \frac{1}{2} k\, \bar{x}^2 + k_{\theta x}\, \bar{\theta}\, \bar{x}$$

Per quanto riguarda l'energia cinetica, occorre osservare che essa è funzione di θ, x, $\dot{\theta}$, $\dot{x}$, e che nella configurazione di equilibrio le derivate temporali sono nulle:

$$E_c = E_c(\theta, x, \dot{\theta}, \dot{x}) \cong E_c|_{\theta_0, x_0, 0, 0} + \left.\frac{\partial E_c}{\partial \theta}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{\theta} + \left.\frac{\partial E_c}{\partial x}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{x} + \left.\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \dot{\bar{\theta}} + \left.\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \dot{\bar{x}} +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \theta^2}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \frac{\bar{\theta}^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial x^2}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \frac{\bar{x}^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \theta \partial x}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{\theta}\bar{x} +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \theta \partial \dot{x}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{\theta}\dot{\bar{x}} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\theta} \partial x}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \dot{\bar{\theta}}\bar{x} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \theta \partial \dot{\theta}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{\theta}\dot{\bar{\theta}} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial x \partial \dot{x}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \bar{x}\dot{\bar{x}} +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \frac{\dot{\bar{\theta}}^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{x}^2}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \frac{\dot{\bar{x}}^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\theta} \partial \dot{x}}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} \dot{\bar{\theta}}\dot{\bar{x}}$$

Di tutti i termini dello sviluppo, occorre innanzitutto notare che gli unici utili ai fini delle equazioni di Lagrange sono quelli che presentano come fattori $\dot{\bar{\theta}}$ o $\dot{\bar{x}}$ almeno al primo ordine, poiché gli altri scompaiono a causa delle derivazioni rispetto a tali variabili. Tutte le derivate prime dell'energia cinetica (vedi sopra) sono nulle nella configurazione di equilibrio; si può osservare inoltre che le uniche derivate seconde non nulle sono quelle che moltiplicano i termini in $\dot{\bar{\theta}}^2$ e $\dot{\bar{x}}^2$; in definitiva, lo sviluppo di Taylor dell'energia cinetica arrestato agli infinitesimi di secondo ordine è dato da:

$$E_c \cong \ldots + \frac{1}{2} J_\theta \dot{\bar{\theta}}^2 + \frac{1}{2} m \dot{\bar{x}}^2$$

avendo indicato con J_θ l'espressione:

$$J_\theta = \left.\frac{\partial^2 E_c}{\partial \dot{\theta}^2}\right|_{\theta_0, x_0, 0, 0} = 4L^2 M + J + m(2L + x_0)^2$$

La scrittura delle equazioni, avendo l'energia cinetica e potenziale sotto forma di espressioni quadratiche nelle variabili indipendenti, è semplice, e porta al seguente sistema lineare in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} J_\theta & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{pmatrix}+\begin{bmatrix} k_{\theta\theta} & k_{\theta x} \\ k_{\theta x} & k \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\theta} \\ \overline{x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dove sono state messe in evidenza le matrici di massa e rigidezza che verranno utilizzate nel calcolo delle frequenze proprie.

Calcolo delle frequenze proprie del sistema

Essendo le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, gli autovalori del sistema saranno immaginari puri; cerchiamo allora soluzioni del tipo $\mathbf{X} = \mathbf{X_0}\, e^{i\Omega t}$. Sostituendo nel sistema, si trova che, per avere soluzioni diverse dalla banale ($\mathbf{X_0} = \mathbf{0}$), occorre che Ω sia uno degli autovalori della matrice $-\Omega^2\,[M] + [K]$:

$$\det(-\Omega^2\,[M] + [K]) = 0$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} -\Omega^2 J_\theta + k_{\theta\theta} & k_{\theta x} \\ k_{\theta x} & -\Omega^2 m + k \end{bmatrix}\right)= 0$$

Si tratta di un'equazione algebrica di secondo grado in Ω^2, che ammetterà due soluzioni reali positive, dalle quali si ricavano le due frequenze proprie del sistema libero non smorzato.

Meccanica applicata alle macchine – Allievi Aerospaziali

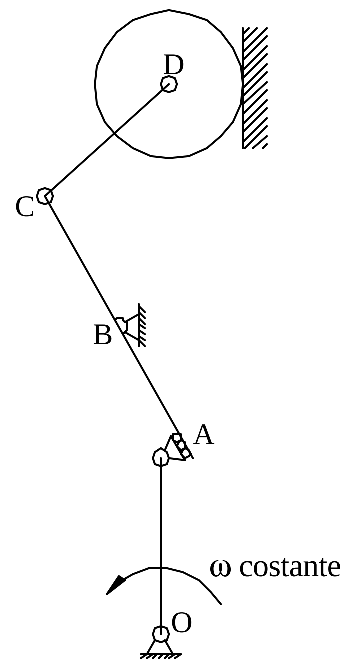
Prof. A. Curami – Appello del 1 settembre 1999

Es. 1 – Considerato il meccanismo in figura, si determini, per la configurazione rappresentata:

- velocità ed accelerazione angolari assolute del disco;
- la coppia applicata alla manovella OA;
- le azioni scambiate fra disco e piano, discutendo la condizione di puro rotolamento nel moto del disco.

Nello svolgimento si supponga che:

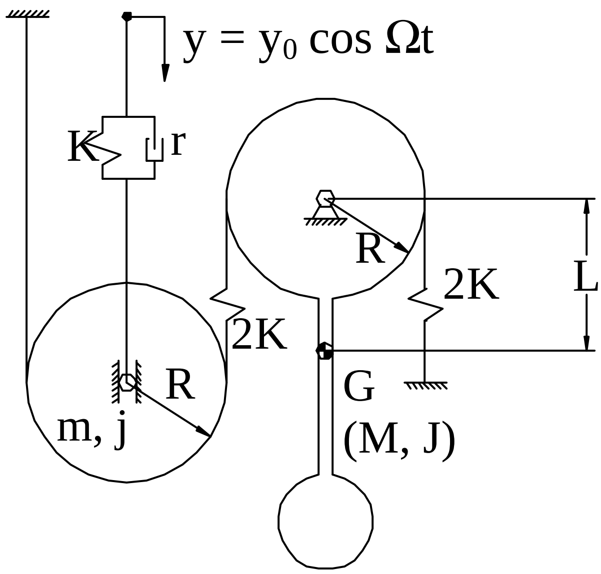
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare della manovella OA sia ω costante e diretta in verso antiorario;
- il disco abbia raggio R, massa m e momento d'inerzia baricentrico J;
- siano rispettivamente f_v, f_s, f_d, i coefficienti di <u>attrito volvente</u>, statico, dinamico fra disco e piano;
- le masse degli altri elementi e gli altri attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

- scrivere le equazioni non lineari di equilibrio del sistema;
- calcolare le frequenze proprie del sistema non smorzato;
- calcolare il moto a regime del sistema forzato smorzato.

Si supponga che, nella configurazione assegnata (pendolo verticale), tutte le molle siano scariche.



Soluzione proposta

Esercizio 1

Analisi del sistema

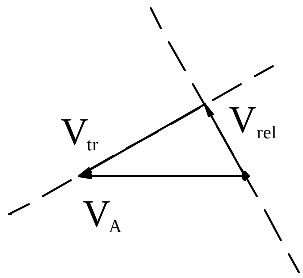
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	Traiettoria	Velocità	Accelerazione
O, B	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	ω OA	ω^2 OA centripeta
C	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela al piano	?	?

1° quesito

Occorre innanzitutto studiare il moto dell'asta incernierata in B; a questo scopo conviene studiare il moto di A, noto, in un riferimento rotante con origine in B solidale all'asta stessa:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
ω AO $\perp$ AO	? // BA	? (ω_{AB} AB) $\perp$ AB

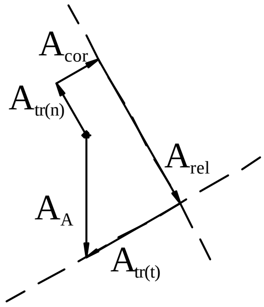


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{tr}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell'asta:

$\omega_{AB} = V_{tr} / AB$ verso orario

Passando all'accelerazione del punto A, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr(n)}}$ +	$\mathbf{A_{tr(t)}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2 AO // AO verso O	0 /	ω^2_{AB} AB // AB verso B	?($\dot{\omega}_{AB}$ AB) $\perp$ AB	? // AB	2 ω_{AB} V_{rel} $\perp$ AB



È nota a questo punto l'accelerazione angolare dell'asta:

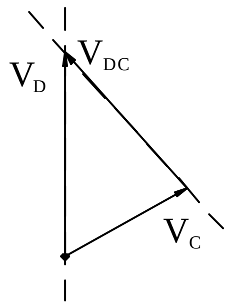
$\dot{\omega}_{AB} = A_{tr(t)}$ / AB verso orario

Conoscendo velocità ed accelerazione angolare dell'asta, il moto del punto C è completamente noto; indicando con **t** e **n** i versori rispettivamente normale e parallelo a CD:

$\mathbf{V_C} = \omega_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$
$\mathbf{A_C} = \omega^2_{AB}\, BC\, \mathbf{n} + \dot{\omega}_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$

Il moto del punto D può essere studiato a questo punto in un sistema traslante con origine solidale con C. Per quanto riguarda le velocità:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_C}$ +	$\mathbf{V_{DC}}$
? // piano	ω_{AB} BC ⊥ CB	? (ω_{DC} DC) ⊥ DC

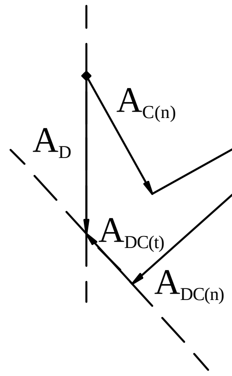


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{DC}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell'asta DC:

$\omega_{DC} = V_{DC}$ / DC verso antiorario

Passando all'accelerazione del punto D, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_D}$ =	$\mathbf{A_{C(n)}}$ +	$\mathbf{A_{C(t)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(n)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(t)}}$
? // piano	ω^2_{AB} BC // CB verso B	$\dot{\omega}_{AB}$ BC ⊥ CB	ω^2_{DC} DC // DC verso C	?($\dot{\omega}_{DC}$ DC) ⊥ DC



A questo punto, la velocità e l’accelerazione angolari del disco sono date rispettivamente da:

$\omega_{disco} = V_D / R$ verso orario
$\dot{\omega}_{disco} = A_D / R$ verso antiorario

2° quesito
Per il calcolo della coppia motrice agente sulla manovella OA per garantire il moto studiato, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

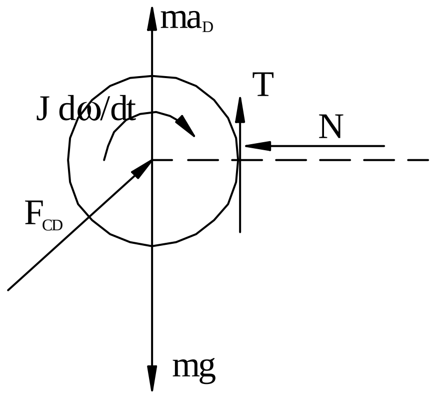
- l’unico elemento a contribuire all’energia cinetica del sistema è il disco; si ha quindi:
  $$\frac{dE_C}{dT} = m\ \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + J\ \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}}$$
- la potenza motrice è data da:
  $W_m = M_m\ \omega_{OA}$
- la potenza resistente è legata alla forza peso del disco e all’attrito volvente (coefficiente f_v) fra quest’ultimo ed il piano; indicando con M_v il momento resistente legato all’attrito volvente, con N la componente normale al piano scambiata tra quest’ultimo e il disco, si ha:
  $W_r = -\, m\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + M_V\ \omega_{disco} = -\, m\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + N\ u\ V_D / R = -\, m\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + N\ f_v\ V_D$

Si ha quindi:

$$m\ \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + J\ \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}} = M_m\ \omega_{OA} + m\ \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} - N\ f_v\ V_D$$

In questa relazione, tutte le grandezze cinematiche sono state calcolate precedentemente; si hanno però due incognite: M_m e N. Occorre perciò calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto fra piano e disco; tale calcolo è oggetto della richiesta successiva.

3° quesito
Si isoli il disco dal resto del sistema: si evidenziano così, oltre alle reazioni vincolari N e T (rispettivamente normale e tangente al piano d’appoggio), la forza trasmessa dalla biella DC. Poiché DC è un’asta scarica, l’azione da essa esercitata ha direzione nota (parallela a DC), mentre è incognito il solo modulo. Avendo tre sole incognite (N, T, F_{DC}), sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio dinamico applicate al disco:



$\Sigma F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD(oriz)} - N = 0$
$\Sigma F_T = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD(vert)} - mg + mA_D + T = 0$
$\Sigma M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad T\,R + N\,f_v\,R - J\,\dot{\omega}_{disco} = 0$

Si tratta di un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite N, T, F_{DC}, risolto il quale è possibile anche trovare la coppia M_m richiesta al punto precedente.

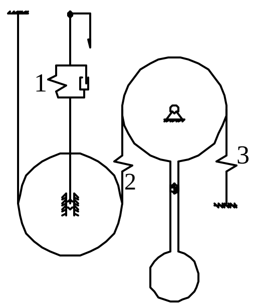
Esercizio 2

Il sistema proposto presenta tre gradi di libertà; di questi, uno ha legge di moto imposta (spostamento di un vincolo). Come coordinate libere possono essere assunte:
α: rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
β: rotazione assoluta del pendolo (positiva se oraria)
Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica
Il calcolo dell'energia cinetica per ciascuno dei due elementi dotati di massa non presenta particolari difficoltà: occorre infatti tenere semplicemente conto dei termini traslazionali e rotazionali:

$$E_c = \frac{1}{2} j\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m(R\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} M(L\dot{\beta})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(mR^2 + j)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(ML^2 + J)\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{\beta\beta}\dot{\beta}^2$$

Calcolo dell'energia potenziale
Occorre innanzitutto esprimere gli allungamenti delle molle in funzione delle variabili del problema:



$\Delta L_1 = R\alpha - y$

$\Delta L_2 = 2R\alpha + R\beta$

$\Delta L_3 = -R\beta$

L'energia potenziale di deformazione elastica delle molle è data dunque da:

$$E_{p\text{-molle}} = \frac{1}{2}K(R\alpha - y)^2 + \frac{1}{2}2K(2R\alpha + R\beta)^2 + \frac{1}{2}2K(R\beta)^2$$

Occorre poi tenere conto delle variazioni di quota dei baricentri dei due corpi:

$$E_{p\text{-peso}} = -\,mg\,R\alpha + Mg\,L(1 - \cos\beta)$$

L'energia potenziale totale del sistema è data quindi da:

$$E_p = \frac{1}{2}K(R\alpha - y)^2 + \frac{1}{2}2K(2R\alpha + R\beta)^2 + \frac{1}{2}2K(R\beta)^2 - mg\,R\alpha + Mg\,L(1 - \cos\beta)$$

Calcolo del termine dissipativo
La velocità di allungamento dell'elemento smorzante è data da:

$$d(\Delta L_1)/dt = R\dot{\alpha} - \dot{y}$$

per cui la funzione dissipativa è data da:

$$D = \frac{1}{2}r(R\dot{\alpha} - \dot{y})^2$$

Equazioni di moto non lineari
Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale, e della funzione dissipativa del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

Il secondo membro delle equazioni è nullo poiché non agisce nessuna forzante esterna.

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J_{\alpha\alpha}\,\dot{\alpha} \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 9KR^2\,\alpha + 4KR^2\,\beta - mgR - KR\,y \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = rR^2\,\dot{\alpha} - rR\,\dot{y}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = J_{\beta\beta}\,\dot{\beta} \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \beta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = 4KR^2\,\alpha + 4KR^2\,\beta + MgL\sin\beta \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0$$

Le equazioni non lineari di equilibrio sono dunque le seguenti:

$J_{\alpha\alpha}\ \dot{\alpha}\ + rR^2\ \dot{\alpha}\ + 9KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta\ = rR\ \dot{y}\ + KR\ y + mgR$

$J_{\beta\beta}\ \dot{\beta}\ + 4KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta + MgL \sin\beta = 0$

Al fine di calcolare le frequenze proprie del sistema, occorre a questo punto procedere alla linearizzazione del sistema.

Linearizzazione del sistema
Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). Il sistema da risolvere è il seguente:

$9KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta - mgR = 0$
$4KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta + MgL \sin\beta = 0$

Si tratta di un sistema completo, non lineare, in α e β. Se esiste una posizione di equilibrio, il sistema ammetterà una soluzione reale, data da α_0, β_0.
Si può procedere a questo punto alla linearizzazione del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio trovata; si suppongono cioè piccoli spostamenti, e si sviluppano in serie di Taylor le forme energetiche non quadratiche nelle variabili del problema, arrestandone il polinomio all'infinitesimo di secondo ordine. Nel caso in esame, l'unica forma energetica non quadratica è l'energia potenziale:

$$E_p = E_p(\alpha,\beta,y) \cong E_p\big|_{\alpha_0,\beta_0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial\alpha}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0) + \left.\frac{\partial E_p}{\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\beta-\beta_0) + \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} y +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\beta^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{y^2}{2} +$$
$$+ \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0)(\beta-\beta_0) + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial y}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0)y + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial y\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} y(\beta-\beta_0)$$

Dei termini in questione:
- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange; lo stesso discorso vale per il termine lineare in y e quadratico in y^2;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 9KR^2 = K_{\alpha\alpha}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\beta^2}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 4KR^2 + MgL\cos\beta_0 = K_{\beta\beta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 4KR^2 = K_{\alpha\beta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial y}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = -KR$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial y\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 0$$

Posto:

$$\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_0$$
$$\bar{\beta} = \beta - \beta_0$$

le forme energetiche per il sistema linearizzato sono dunque le seguenti:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\dot{\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2} J_{\beta\beta}\dot{\bar{\beta}}^2$$
$$E_p = \frac{1}{2} K_{\alpha\alpha}\,\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2} K_{\beta\beta}\,\bar{\beta}^2 + K_{\alpha\beta}\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta} - KR\,\bar{\alpha}\,y$$
$$D = \frac{1}{2} r(R\,\dot{\bar{\alpha}} - \dot{y})^2$$

Le equazioni linearizzate sono quindi:

$$J_{\alpha\alpha}\ddot{\bar{\alpha}} + rR^2\dot{\bar{\alpha}} + K_{\alpha\alpha}\,\bar{\alpha} + K_{\alpha\beta}\,\bar{\beta} = kR\,y + rR\,\dot{y}$$
$$J_{\alpha\alpha}\ddot{\bar{\beta}} + K_{\alpha\beta}\,\bar{\alpha} + K_{\beta\beta}\,\bar{\beta} = 0$$

Osservando che lo spostamento y del vincolo può essere considerato come la parte reale del vettore complesso $y_0\, e^{i\Omega t}$, il sistema può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} J_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & J_{\beta\beta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} rR^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{\bar{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} KR + irR \\ 0 \end{Bmatrix} y_0 e^{i\Omega t} = \{Y_0\} e^{i\Omega t}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[R]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{Y_0\}e^{i\Omega t}$$

dove sono state messe in evidenza le matrici di massa, smorzamento, rigidezza, e il vettore delle forzanti.
Per quanto riguarda le frequenze proprie del sistema libero non smorzato, esse sono le soluzioni dell'equazione:

$$\det(-\Omega^2\,[M] + [K]) = 0$$

Il moto a regime del sistema (depurato cioè dell'integrale generale, che, dipendendo da un esponenziale negativo, tende a zero per t tendente all'infinito) sarà del tipo

$\{x\} = \{X_0\}e^{i\Omega t}$

Sostituendo, si ha:

$(-\Omega^2[M] + i\Omega[R] + [K])\{X_0\}e^{i\Omega t} = \{Y_0\}e^{i\Omega t}$

da cui, posto:

$[A(\Omega)] = -\Omega^2[M] + i\Omega[R] + [K]$

il moto a regime sarà dato da:

$\{x\} = [A(\Omega)]^{-1}\{Y_0\}e^{i\Omega t}$

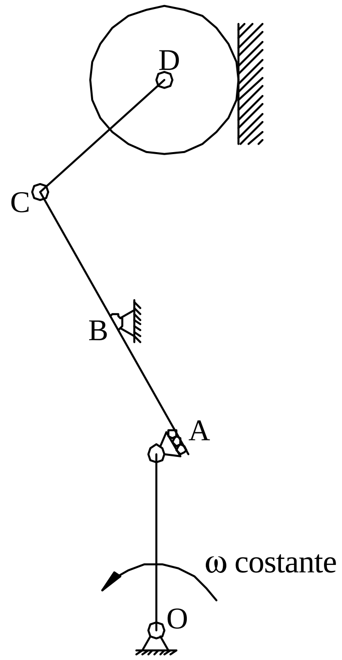
Si osserva che, in presenza di smorzamento, la matrice A è sempre invertibile, qualunque sia il valore della pulsazione Ω della forzante.

Meccanica applicata alle macchine – Allievi Aerospaziali

Prof. A. Curami – Appello del 1 settembre 1999

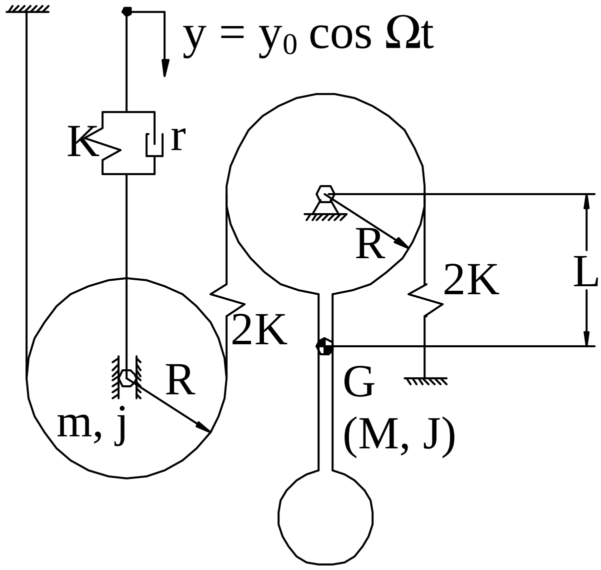
Es. 1 – Considerato il meccanismo in figura, si determini, per la configurazione rappresentata:
- velocità ed accelerazione angolari assolute del disco;
- la coppia applicata alla manovella OA;
- le azioni scambiate fra disco e piano, discutendo la condizione di puro rotolamento nel moto del disco.

Nello svolgimento si supponga che:
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare della manovella OA sia ω costante e diretta in verso antiorario;
- il disco abbia raggio R, massa m e momento d'inerzia baricentrico J;
- siano rispettivamente f_v, f_s, f_d, i coefficienti di attrito volvente, statico, dinamico fra disco e piano;
- le masse degli altri elementi e gli altri attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:
- scrivere le equazioni non lineari di equilibrio del sistema;
- calcolare le frequenze proprie del sistema non smorzato;
- calcolare il moto a regime del sistema forzato smorzato.

Si supponga che, nella configurazione assegnata (pendolo verticale), tutte le molle siano scariche.



Soluzione proposta

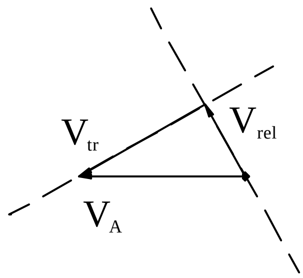
Esercizio 1

Analisi del sistema
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	Traiettoria	Velocità	Accelerazione
O, B	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	ω OA	ω^2 OA centripeta
C	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela al piano	?	?

1° quesito
Occorre innanzitutto studiare il moto dell'asta incernierata in B; a questo scopo conviene studiare il moto di A, noto, in un riferimento rotante con origine in B solidale all'asta stessa:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
ω AO $\perp$ AO	? // BA	? (ω_{AB} AB) $\perp$ AB

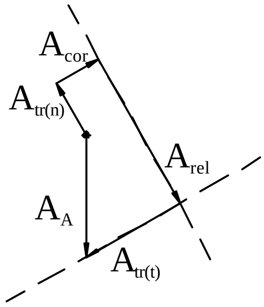


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{tr}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell'asta:

$\omega_{AB} = V_{tr} / AB$ verso orario

Passando all'accelerazione del punto A, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr(n)}}$ +	$\mathbf{A_{tr(t)}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2 AO // AO verso O	0 /	ω^2_{AB} AB // AB verso B	?($\dot{\omega}_{AB}$ AB) $\perp$ AB	? // AB	2 ω_{AB} V_{rel} $\perp$ AB



È nota a questo punto l'accelerazione angolare dell'asta:

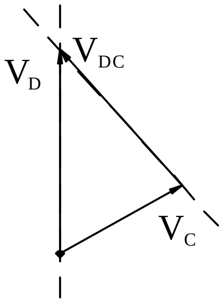
$\dot{\omega}_{AB} = A_{tr(t)}$ / AB verso orario

Conoscendo velocità ed accelerazione angolare dell'asta, il moto del punto C è completamente noto; indicando con **t** e **n** i versori rispettivamente normale e parallelo a CD:

$\mathbf{V_C} = \omega_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$
$\mathbf{A_C} = \omega^2_{AB}\, BC\, \mathbf{n} + \dot{\omega}_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$

Il moto del punto D può essere studiato a questo punto in un sistema traslante con origine solidale con C. Per quanto riguarda le velocità:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_C}$ +	$\mathbf{V_{DC}}$
? // piano	ω_{AB} BC $\perp$ CB	? (ω_{DC} DC) $\perp$ DC

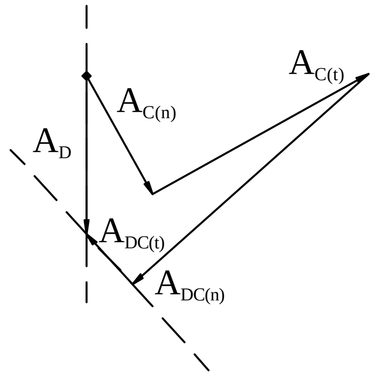


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{DC}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell'asta DC:

$\omega_{DC} = V_{DC}$ / DC verso antiorario

Passando all'accelerazione del punto D, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_D}$ =	$\mathbf{A_{C(n)}}$ +	$\mathbf{A_{C(t)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(n)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(t)}}$
? // piano	ω^2_{AB} BC // CB verso B	$\dot{\omega}_{AB}$ BC $\perp$ CB	ω^2_{DC} DC // DC verso C	?($\dot{\omega}_{DC}$ DC) $\perp$ DC



A questo punto, la velocità e l’accelerazione angolari del disco sono date rispettivamente da:

$\omega_{disco} = V_D / R$ verso orario
$\dot{\omega}_{disco} = A_D / R$ verso antiorario

2° quesito
Per il calcolo della coppia motrice agente sulla manovella OA per garantire il moto studiato, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

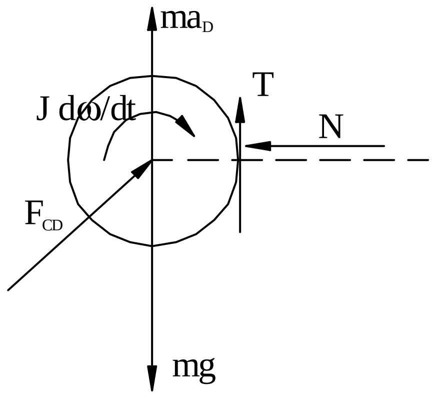
- l’unico elemento a contribuire all’energia cinetica del sistema è il disco; si ha quindi:
  $$\frac{dE_C}{dT} = m\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + J\, \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}}$$
- la potenza motrice è data da:
  $W_m = M_m\, \omega_{OA}$
- la potenza resistente è legata alla forza peso del disco e all’attrito volvente (coefficiente f_v) fra quest’ultimo ed il piano; indicando con M_v il momento resistente legato all’attrito volvente, con N la componente normale al piano scambiata tra quest’ultimo e il disco, si ha:
  $W_r = -m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + M_V\, \omega_{disco} = -m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + N\, u\, V_D / R = -m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} + N\, f_v\, V_D$

Si ha quindi:

$$m\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + J\, \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}} = M_m\, \omega_{OA} + m\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_D} - N\, f_v\, V_D$$

In questa relazione, tutte le grandezze cinematiche sono state calcolate precedentemente; si hanno però due incognite: M_m e N. Occorre perciò calcolare la reazione vincolare nel punto di contatto fra piano e disco; tale calcolo è oggetto della richiesta successiva.

3° quesito
Si isoli il disco dal resto del sistema: si evidenziano così, oltre alle reazioni vincolari N e T (rispettivamente normale e tangente al piano d’appoggio), la forza trasmessa dalla biella DC. Poiché DC è un’asta scarica, l’azione da essa esercitata ha direzione nota (parallela a DC), mentre è incognito il solo modulo. Avendo tre sole incognite (N, T, F_{DC}), sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio dinamico applicate al disco:



$\Sigma F_N = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD(oriz)} - N = 0$
$\Sigma F_T = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{CD(vert)} - mg + mA_D + T = 0$
$\Sigma M_D = 0 \quad \Rightarrow \quad T\,R + N\,f_v\,R - J\,\dot{\omega}_{disco} = 0$

Si tratta di un sistema lineare di tre equazioni nelle tre incognite N, T, F_{DC}, risolto il quale è possibile anche trovare la coppia M_m richiesta al punto precedente.

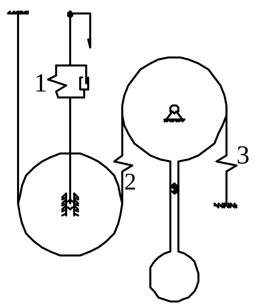
Esercizio 2

Il sistema proposto presenta tre gradi di libertà; di questi, uno ha legge di moto imposta (spostamento di un vincolo). Come coordinate libere possono essere assunte:
α: rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
β: rotazione assoluta del pendolo (positiva se oraria)
Per la risoluzione conviene utilizzare il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica
Il calcolo dell'energia cinetica per ciascuno dei due elementi dotati di massa non presenta particolari difficoltà: occorre infatti tenere semplicemente conto dei termini traslazionali e rotazionali:

$$E_c = \frac{1}{2} j\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m(R\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} J\dot{\beta}^2 + \frac{1}{2} M(L\dot{\beta})^2 =$$
$$= \frac{1}{2}(mR^2 + j)\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}(ML^2 + J)\dot{\beta}^2 = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} J_{\beta\beta}\dot{\beta}^2$$

Calcolo dell'energia potenziale
Occorre innanzitutto esprimere gli allungamenti delle molle in funzione delle variabili del problema:



$\Delta L_1 = R\alpha - y$

$\Delta L_2 = 2R\alpha + R\beta$

$\Delta L_3 = -R\beta$

L'energia potenziale di deformazione elastica delle molle è data dunque da:

$$E_{p\text{-molle}} = \frac{1}{2}K(R\alpha - y)^2 + \frac{1}{2}2K(2R\alpha + R\beta)^2 + \frac{1}{2}2K(R\beta)^2$$

Occorre poi tenere conto delle variazioni di quota dei baricentri dei due corpi:

$$E_{p\text{-peso}} = -\,mg\,R\alpha + Mg\,L(1 - \cos\beta)$$

L'energia potenziale totale del sistema è data quindi da:

$$E_p = \frac{1}{2}K(R\alpha - y)^2 + \frac{1}{2}2K(2R\alpha + R\beta)^2 + \frac{1}{2}2K(R\beta)^2 - mg\,R\alpha + Mg\,L(1 - \cos\beta)$$

Calcolo del termine dissipativo

La velocità di allungamento dell'elemento smorzante è data da:

$$d(\Delta L_1)/dt = R\dot{\alpha} - \dot{y}$$

per cui la funzione dissipativa è data da:

$$D = \frac{1}{2}r(R\dot{\alpha} - \dot{y})^2$$

Equazioni di moto non lineari

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale, e della funzione dissipativa del sistema, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\alpha}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \alpha} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial V}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\beta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \beta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0$$

Il secondo membro delle equazioni è nullo poiché non agisce nessuna forzante esterna.

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\alpha}} = J_{\alpha\alpha}\,\dot{\alpha} \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \alpha} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \alpha} = 9KR^2\,\alpha + 4KR^2\,\beta - mgR - KR\,y \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\alpha}} = rR^2\,\dot{\alpha} - rR\,\dot{y}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\beta}} = J_{\beta\beta}\,\dot{\beta} \qquad \frac{\partial E_c}{\partial \beta} = 0$$
$$\frac{\partial E_p}{\partial \beta} = 4KR^2\,\alpha + 4KR^2\,\beta + MgL\sin\beta \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{\beta}} = 0$$

Le equazioni non lineari di equilibrio sono dunque le seguenti:

$J_{\alpha\alpha}\ \dot{\alpha}\ + rR^2\ \dot{\alpha}\ + 9KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta\ = rR\ \dot{y}\ + KR\ y + mgR$

$J_{\beta\beta}\ \dot{\beta}\ + 4KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta + MgL\ \sin\beta = 0$

Al fine di calcolare le frequenze proprie del sistema, occorre a questo punto procedere alla linearizzazione del sistema.

Linearizzazione del sistema

Per linearizzare il sistema, occorre innanzitutto determinare una configurazione di equilibrio statico stabile: in questa posizione, l'energia potenziale presenta un minimo, quindi le sue derivate prime rispetto alle variabili del problema sono nulle (condizione di equilibrio) e la matrice hessiana è definita positiva (condizione di stabilità). Il sistema da risolvere è il seguente:

$9KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta - mgR = 0$

$4KR^2\ \alpha + 4KR^2\ \beta + MgL\ \sin\beta = 0$

Si tratta di un sistema completo, non lineare, in α e β. Se esiste una posizione di equilibrio, il sistema ammetterà una soluzione reale, data da α_0, β_0.

Si può procedere a questo punto alla linearizzazione del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio trovata; si suppongono cioè piccoli spostamenti, e si sviluppano in serie di Taylor le forme energetiche non quadratiche nelle variabili del problema, arrestandone il polinomio all'infinitesimo di secondo ordine. Nel caso in esame, l'unica forma energetica non quadratica è l'energia potenziale:

$$
\begin{aligned}
E_p = E_p(\alpha,\beta,y) \cong\ & E_p\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0} + \frac{\partial E_p}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0) + \frac{\partial E_p}{\partial\beta}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\beta-\beta_0) + \frac{\partial E_p}{\partial y}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0} y + \\
& + \frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{(\alpha-\alpha_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 E_p}{\partial\beta^2}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{(\beta-\beta_0)^2}{2} + \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}\frac{y^2}{2} + \\
& + \frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial\beta}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0)(\beta-\beta_0) + \frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial y}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0}(\alpha-\alpha_0)y + \frac{\partial^2 E_p}{\partial y\partial\beta}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0} y(\beta-\beta_0)
\end{aligned}
$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange; lo stesso discorso vale per il termine lineare in y e quadratico in y^2;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha^2}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 9KR^2 = K_{\alpha\alpha}$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\beta^2}\Big|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 4KR^2 + MgL\ \cos\beta_0 = K_{\beta\beta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 4KR^2 = K_{\alpha\beta}$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial\alpha\partial y}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = -KR$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial y\partial\beta}\right|_{\alpha_0,\beta_0,0} = 0$$

Posto:

$$\bar{\alpha} = \alpha - \alpha_0$$
$$\bar{\beta} = \beta - \beta_0$$

le forme energetiche per il sistema linearizzato sono dunque le seguenti:

$$E_c = \frac{1}{2} J_{\alpha\alpha}\dot{\bar{\alpha}}^2 + \frac{1}{2} J_{\beta\beta}\dot{\bar{\beta}}^2$$
$$E_p = \frac{1}{2} K_{\alpha\alpha}\,\bar{\alpha}^2 + \frac{1}{2} K_{\beta\beta}\,\bar{\beta}^2 + K_{\alpha\beta}\,\bar{\alpha}\,\bar{\beta} - KR\,\bar{\alpha}\,y$$
$$D = \frac{1}{2} r(R\,\dot{\bar{\alpha}} - \dot{y})^2$$

Le equazioni linearizzate sono quindi:

$$J_{\alpha\alpha}\ddot{\bar{\alpha}} + rR^2\dot{\bar{\alpha}} + K_{\alpha\alpha}\,\bar{\alpha} + K_{\alpha\beta}\,\bar{\beta} = kR\,y + rR\,\dot{y}$$
$$J_{\alpha\alpha}\ddot{\bar{\beta}} + K_{\alpha\beta}\bar{\alpha} + K_{\beta\beta}\,\bar{\beta} = 0$$

Osservando che lo spostamento y del vincolo può essere considerato come la parte reale del vettore complesso $y_0\, e^{i\Omega t}$, il sistema può essere scritto nella seguente forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} J_{\alpha\alpha} & 0 \\ 0 & J_{\beta\beta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{\alpha}} \\ \ddot{\bar{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} rR^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\bar{\alpha}} \\ \dot{\bar{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\alpha\beta} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} KR + irR \\ 0 \end{Bmatrix} y_0 e^{i\Omega t} = \{Y_0\} e^{i\Omega t}$$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[R]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{Y_0\}e^{i\Omega t}$$

dove sono state messe in evidenza le matrici di massa, smorzamento, rigidezza, e il vettore delle forzanti.
Per quanto riguarda le frequenze proprie del sistema libero non smorzato, esse sono le soluzioni dell'equazione:

$$\det(-\Omega^2\,[M] + [K]) = 0$$

Il moto a regime del sistema (depurato cioè dell'integrale generale, che, dipendendo da un esponenziale negativo, tende a zero per t tendente all'infinito) sarà del tipo

$\{x\} = \{X_0\}e^{i\Omega t}$

Sostituendo, si ha:

$(-\Omega^2[M] + i\Omega[R] + [K])\{X_0\}e^{i\Omega t} = \{Y_0\}e^{i\Omega t}$

da cui, posto:

$[A(\Omega)] = -\Omega^2[M] + i\Omega[R] + [K]$

il moto a regime sarà dato da:

$\{x\} = [A(\Omega)]^{-1}\{Y_0\}e^{i\Omega t}$

Si osserva che, in presenza di smorzamento, la matrice A è sempre invertibile, qualunque sia il valore della pulsazione Ω della forzante.

Meccanica applicata alle macchine – Allievi Aerospaziali

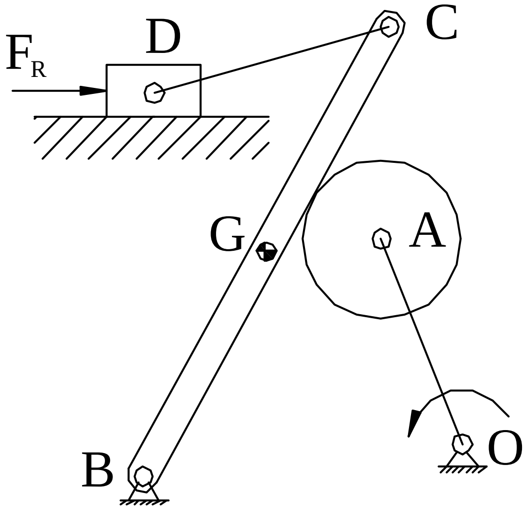
Prof. A. Curami – Appello del 15 settembre 1999

Es. 1 – Considerato il meccanismo in figura, si determini, per la configurazione rappresentata:

- velocità ed accelerazione angolari assolute del disco di centro A;
- velocità ed accelerazione della slitta D;
- la coppia motrice applicata alla manovella OA.

Nello svolgimento si supponga che:

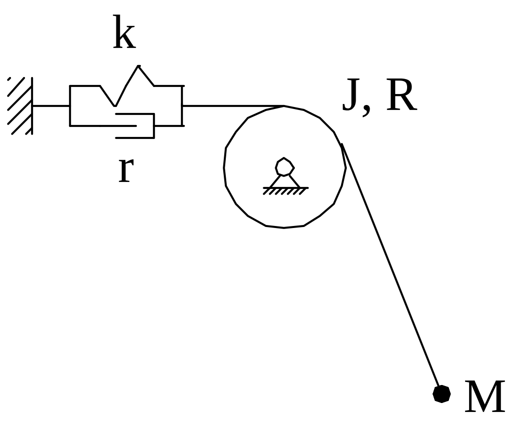
- il sistema operi in un piano verticale e sia quindi soggetto a gravità;
- la geometria (angoli e lunghezze) sia completamente nota;
- la velocità angolare della manovella OA sia ω costante e diretta in verso antiorario;
- la forza resistente F_R abbia un valore noto ed agisca in direzione orizzontale;
- la slitta D, puntiforme, abbia massa M_D; sia inoltre f il coefficiente di attrito radente fra slitta e piano;
- l'asta BC abbia massa M_{BC} e momento d'inerzia baricentrico J_{BC};
- il disco abbia raggio R, massa M_d e momento d'inerzia baricentrico J_d; sia inoltre f_v il coefficiente di attrito volvente fra il disco e l'asta BC;
- le masse degli altri elementi e gli altri attriti siano trascurabili.



Es. 2 – Per il sistema rappresentato in figura, operante nel piano verticale, si richiede di:

- scrivere le equazioni non lineari di equilibrio del sistema;
- calcolare le frequenze proprie del sistema non smorzato;
- calcolare le frequenze proprie del sistema smorzato.

Si supponga che sia L_0 la lunghezza del tratto di fune che va dalla massa M al punto di tangenza al disco in condizione di equilibrio statico e che il raggio del disco R sia trascurabile rispetto ad L_0.



Es. 3 – Si introducano le ipotesi su cui si basa la teoria elementare della lubrificazione e se ne presentino i principali risultati con riferimento ad un esempio applicativo.

Soluzione proposta

Esercizio 1

Analisi del sistema

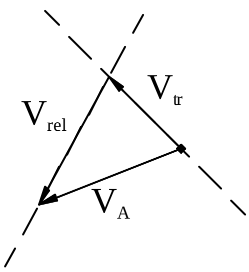
Prima di affrontare i quesiti proposti, conviene svolgere una breve analisi del sistema nella quale si definiscono, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l'accelerazione assolute: tali grandezze vengono riportate nella seguente tabella:

Punto	**Traiettoria**	**Velocità**	**Accelerazione**
O, B	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	ω OA	ω^2 OA centripeta
C, G	Circonferenza centrata in B	?	?
D	Parallela al piano	?	?

1° quesito

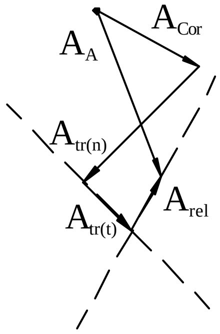
Occorre innanzitutto studiare il moto dell'asta BC; a questo scopo conviene studiare il moto di A, noto, in un riferimento rotante con origine in B solidale all'asta stessa:

$\mathbf{V_A}$ =	$\mathbf{V_{rel}}$ +	$\mathbf{V_{tr}}$
ω AO $\perp$ AO	? // BC	? (ω_{BC} AB) $\perp$ AB



Nello stesso sistema di riferimento è possibile esprimere l'accelerazione di A:

$\mathbf{A_{An}}$ +	$\mathbf{A_{At}}$ =	$\mathbf{A_{tr(n)}}$ +	$\mathbf{A_{tr(t)}}$ +	$\mathbf{A_{rel}}$ +	$\mathbf{A_{cor}}$
ω^2_{AO} AO // AO verso O	0 /	ω^2_{BC} AB // AB verso B	?($\dot{\omega}_{BC}$ AB) $\perp$ AB	? // BC	2 ω_{BC} V_{rel} $\perp$ BC



Sono note a questo punto velocità ed accelerazione angolari dell’asta BC, che si ricavano rispettivamente dai moduli di $\mathbf{V_{tr}}$ e $\mathbf{A_{tr(t)}}$:

$\omega_{BC} = V_{tr} / AB$ (antioraria)
$\dot{\omega}_{BC} = A_{tr(t)} / AB$ (oraria)

Conoscendo velocità ed accelerazione angolare dell’asta, il moto dei punti C e G è completamente noto; indicando con **t** e **n** i versori rispettivamente normale e parallelo a CD:

$\mathbf{V_C} = \omega_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$
$\mathbf{A_C} = \omega^2_{AB}\, BC\, \mathbf{n} + \dot{\omega}_{AB}\, BC\, \mathbf{t}$

$\mathbf{V_G} = \omega_{BC}\, BG\, \mathbf{t}$
$\mathbf{A_G} = \omega^2_{BC}\, BG\, \mathbf{n} + \dot{\omega}_{BC}\, BG\, \mathbf{t}$

È inoltre possibile rispondere al primo quesito, sulla velocità e sull’accelerazione angolare del disco di centro A. La velocità angolare di quest’ultimo è data (come la velocità di A) dalla velocità angolare del sistema di riferimento rotante utilizzato sopra (trascinamento) sommata alla velocità angolare relativa del disco nello stesso sistema di riferimento; in tale riferimento, il disco rotola senza strisciare lungo la retta BC, per cui la componente relativa è data da $V_{A(rel)}$ / R (oraria). Si ha dunque:

$\mathbf{w_{disco}} = \mathbf{w_{BC}} + \mathbf{w_{rel}}$
$\omega_{disco} = \omega_{BC} - V_{A(rel)} / R$ (antioraria)

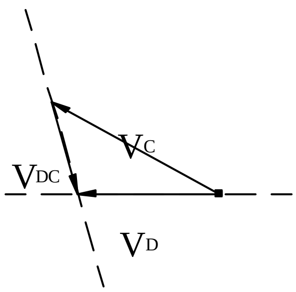
Lo stesso vale per le accelerazioni, per cui:

$\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}} = \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} + \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{rel}}$
$\dot{\omega}_{disco} = \dot{\omega}_{BC} + A_{A(rel)} / R$ (oraria)

2° quesito

Il moto del punto D può essere studiato a questo punto in un sistema traslante con origine solidale con C. Per quanto riguarda le velocità:

$\mathbf{V_D}$ =	$\mathbf{V_C}$ +	$\mathbf{V_{DC}}$
? // piano	ω_{BC} BC $\perp$ BC	? (ω_{DC} DC) $\perp$ DC

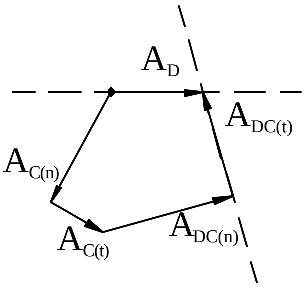


Dal grafico, noto il modulo di $\mathbf{V_{DC}}$, si ricava il valore della velocità angolare dell’asta DC:

$\omega_{DC} = V_{DC} / DC$

Passando all'accelerazione del punto D, questa può essere espressa come segue:

$\mathbf{A_D}$ =	$\mathbf{A_{C(n)}}$ +	$\mathbf{A_{C(t)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(n)}}$ +	$\mathbf{A_{DC(t)}}$
? // piano	$\omega^2_{BC}\, BC$ // BC verso B	$\dot{\omega}_{BC}\, BC$ $\perp$ BC	$\omega^2_{DC}\, DC$ // DC verso C	?($\dot{\omega}_{DC}\, DC$) $\perp$ DC



3° quesito

Per il calcolo della coppia motrice agente sulla manovella OA per garantire il moto studiato, si può ricorrere ad un bilancio di potenze:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

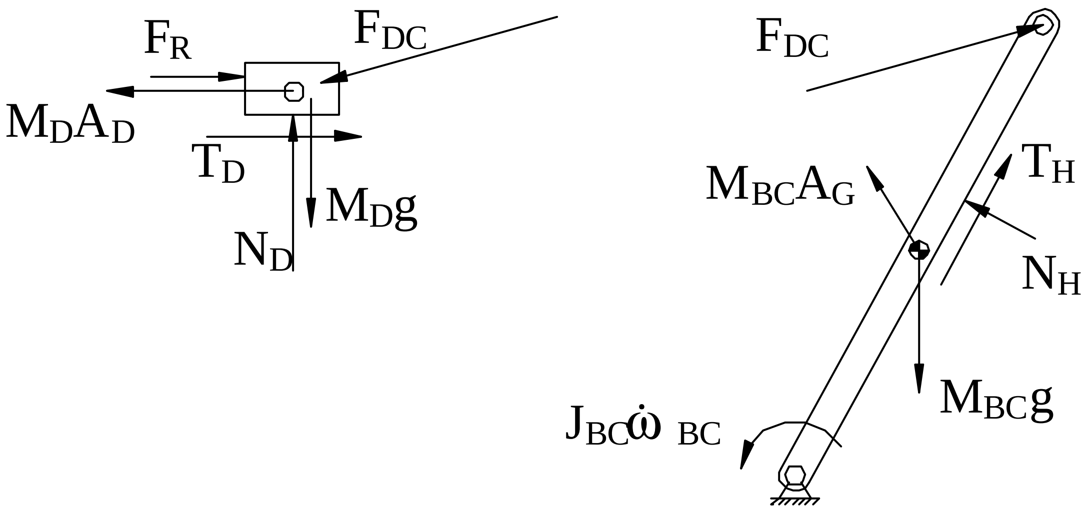
- gli elementi che contribuiscono all'energia cinetica del disco sono il disco di centro A, l'asta BC e la slitta D; osservando che il punto A si muove di moto uniforme, e che dunque le variazioni di energia cinetica del disco sono legate soltanto al termine rotazionale, si ha:
  $$\frac{dE_C}{dT} = M_D\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + M_{BC}\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_{BC}\, \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} + J_d\, \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}}$$
- la potenza motrice è data da:
  $W_m = M_m\, \omega_{OA}$
- la potenza resistente è legata ai pesi del disco e dell'asta BC, all'attrito volvente (coefficiente f_v) fra disco e asta BC, all'attrito radente (coefficiente f) fra slitta e piano d'appoggio e alla forza esterna F_R; indicando con M_{volv} il momento resistente legato all'attrito volvente, occorre osservare che esso lavora fra due elementi mobili, dunque la sua potenza si ottiene moltiplicandolo scalarmente per la velocità angolare relativa del disco rispetto all'asta BC (indicata in precedenza con ω_{rel}; si ha:
  $W_{r\text{-}peso} = - M_d\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_A} - M_{BC}\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G}$
  $W_{r\text{-}attr.volv.} = M_V\, \omega_{rel} = N_H\, u\, \omega_{rel}$
  $W_{r\text{-}attr.rad.} = T_D\, V_D = f\, N_D\, V_D$
  $W_{r\text{-}est.} = - \mathbf{F_R} \cdot \mathbf{V_D}$
  $W_r = - M_d\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_A} - M_{BC}\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G} + N_H\, u\, \omega_{rel} + f\, N_D\, V_D - \mathbf{F_R} \cdot \mathbf{V_D}$

Si ha quindi:

$$M_D\, \mathbf{V_D} \cdot \mathbf{A_D} + M_{BC}\, \mathbf{V_G} \cdot \mathbf{A_G} + J_{BC}\, \mathbf{w_{BC}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} + J_d\, \mathbf{w_{disco}} \cdot \dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{disco}} =$$
$$= M_m\, \omega_{OA} + M_d\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_A} + M_{BC}\, \mathbf{g} \cdot \mathbf{V_G} - N_H\, u\, \omega_{rel} - f\, N_D\, V_D + \mathbf{F_R} \cdot \mathbf{V_D}$$

avendo indicato con N_H la componente normale a BC dell'azione scambiata fra disco e asta BC, e con N_D la componente dell'azione scambiata fra slitta e piano. In questa relazione, tutte le grandezze cinematiche sono state calcolate precedentemente; si hanno però tre incognite: M_m, N_H,

N_D. Occorrono dunque altre relazioni che risolvano tale indeterminatezza. Allo scopo di limitare per quanto possibile il numero di incognite da introdurre, si può pensare di aprire il sistema in corrispondenza della biella DC: l'azione che essa trasmette ha direzione nota (parallela a DC) in quanto l'asta è scarica. Si hanno a questo punto quattro incognite: M_m, N_H, N_D, F_{DC}. Occorrono quindi altre tre equazioni (oltre al bilancio energetico), che possono essere le due equazioni di equilibrio alla traslazione della slitta e l'equazione di equilibrio alla rotazione intorno a B dell'asta BC (si osserva che in tale equazione dovrebbe comparire anche l'ulteriore incognita T_H, componente parallela a BC dell'azione fra disco e asta, di cui però viene trascurato il momento rispetto a B; nel caso in cui tale momento non fosse trascurabile, basterebbe considerare come ulteriore equazione l'equilibrio alla rotazione del disco rispetto ad A)



$\Sigma F_{N(D)} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_R - M_D A_D + T_D - F_{DC(hor)} = 0$

$\Sigma F_{T(D)} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_D - M_D g - F_{DC(ver)} = 0$

$\Sigma M_B^{(BC)} = 0 \quad \Rightarrow \quad -J_{BC}\dot{\mathbf{w}}_{\mathbf{BC}} + M_{BC}(\mathbf{g} - \mathbf{A_G})\Lambda\mathbf{BG} + \mathbf{F_{DC}}\Lambda\mathbf{BC} + \mathbf{N_H}\Lambda(\mathbf{BH} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}$

Si ha a questo punto un sistema lineare di quattro equazioni nelle quattro incognite M_m, N_H, N_D, F_{DC}, per cui è ora possibile ricavare la coppia M_m che era richiesta dal terzo quesito.

Esercizio 2

Il sistema proposto presenta due gradi di libertà; sia:
x: allungamento della molla a partire dalla configurazione di equilibri statico;
θ: angolo formato dalla fune con la verticale, positivo in senso antiorario.
Per ricavare le equazioni del sistema conviene utilizzare il metodo di Lagrange.

Calcolo dell'energia cinetica
Per quanto riguarda il disco, detta ω la sua velocità angolare, si ha:

$\omega = \dot{x}/R$

da cui:

$$E_{c\text{-disco}} = \frac{1}{2} J/R^2 \ \dot{x}^2$$

Per valutare la velocità della massa M, si può considerare un sistema di riferimento rotante parallelamente alla fune che sostiene la massa; in tal modo si individuano due componenti di velocità normali fra loro: la prima, diretta lungo la fune, ha modulo $\dot{x}$, la seconda, normale ad essa (componente di trascinamento), è legata alla rotazione del sistema, ed è data da $(L_0 + x)\dot{\theta}$; l'energia cinetica della massa è data quindi da:

$$E_{c\text{-massa}} = \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + (L_0 + x)^2 \dot{\theta}^2 \right)$$

L'energia cinetica complessiva del sistema ha dunque la seguente espressione:

$$E_c = \frac{1}{2} J/R^2 \ \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \left(\dot{x}^2 + (L_0 + x)^2 \dot{\theta}^2 \right) = \frac{1}{2} (J/R^2 + M)\, \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M(L_0 + x)^2 \dot{\theta}^2$$

Calcolo dell'energia potenziale

Contribuiscono alle variazioni di energia potenziale del sistema le variazioni di quota della massa M e le deformazioni della molla.

Per quanto riguarda il contributo del peso, il problema è analogo a quello della determinazione dell'energia potenziale della slitta nel primo esercizio del tema d'esame dell'8 giugno 1998 a cui si rimanda. Tale esercizio era stato risolto con considerazioni di carattere geometrico mentre ora intendiamo procedere con considerazioni di tipo energetico.

Il lavoro totale compiuto dalla massa M, pari alla sua variazione di energia potenziale cambiata di segno, può essere visto come il lavoro compiuto per farla spostare in verticale di una quantità x a cui si somma il lavoro necessario per far ruotare, da questa posizione, rigidamente il filo di un angolo θ e quindi:

$$V_{peso} = -Mg\, x + Mg\, (L_0 + x)(1 - \cos\theta)$$

Per quanto riguarda la molla, occorre tenere presente che l'origine della variabile x è stata assunta nella condizione di equilibrio (e non in quella di molla scarica); la variazione di energia potenziale della molla è data da:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k\, (\Delta l)^2$$

Ove Δl è dato da:

$$\Delta l = x_0 + x$$

dove x_0 rappresenta l'allungamento della molla all'equilibrio statico, ovviamente uguale a Mg/K.

La variazione di energia potenziale della molla risulta quindi essere:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k\, (x_0 + x)^2$$

Sviluppando il termine si ottiene:

$$V_{molla} = \frac{1}{2} k\,(x_0^{\,2} + 2\,x_0 x + x^2) = (Mg)^2/2k + Mgx + \frac{1}{2} k\,x^2$$

L'energia potenziale complessiva del sistema, a meno del termine costante, ha quindi la seguente espressione:

$$V = Mg\,(L_0 + x)(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} k\,x^2$$

Calcolo della funzione dissipativa

La funzione dissipativa del sistema è data semplicemente da:

$$D = \frac{1}{2} r\,\dot{x}^2$$

Equazioni differenziali non lineari

Avendo a disposizione le espressioni dell'energia cinetica e potenziale e della funzione dissipativa, è possibile scrivere le equazioni che descrivono il moto del sistema:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (J/R^2 + M)\,\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = (J/R^2 + M)\,\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = M(L_0 + x)\,\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = r\,\dot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = Mg\,(1 - \cos\theta) + k\,x$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = M(L_0 + x)^2\,\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = M(L_0 + x)^2\,\ddot{\theta} + 2M(L_0 + x)\,\dot{\theta}\,\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = Mg\,(L_0 + x)\sin\theta$$

Le due equazioni differenziali sono dunque le seguenti:

$$(J/R^2 + M)\,\ddot{x} - M(L_0 + x)\,\dot{\theta}^2 + r\,\dot{x} + Mg\,(1 - \cos\theta) + k\,x = 0$$
$$M(L_0 + x)^2\,\ddot{\theta} + 2M(L_0 + x)\,\dot{\theta}\,\dot{x} + Mg\,(L_0 + x)\sin\theta = 0$$

Linearizzazione delle equazioni

Per linearizzare le equazioni occorre innanzitutto trovare una posizione di equilibrio stabile del sistema; in questo caso, tale posizione è data (in quanto è assegnata la lunghezza L_0) della fune, e corrisponde ai valori $x = 0$, $\theta = 0$ delle variabili.

Occorre a questo punto procedere allo sviluppo in serie di Taylor delle forme energetiche che non siano quadratiche nelle variabili del problema (in questo caso sia l'energia cinetica che potenziale), arrestando lo sviluppo ai termini di secondo ordine e supponendo piccoli gli spostamenti nell'intorno della configurazione di equilibrio.

Avremo:

$$V = V(x,\theta) \cong V\big|_{0,0} + \frac{\partial V}{\partial x}\bigg|_{0,0} x + \frac{\partial V}{\partial \theta}\bigg|_{0,0} \theta + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\bigg|_{0,0} \frac{\theta^2}{2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x}\bigg|_{0,0} \theta x$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} = k$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}\bigg|_{0,0} = [Mg\,(L_0 + x)\cos\theta]\big|_{0,0} = MgL_0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial \theta}\bigg|_{0,0} = Mg\sin\theta = 0$$

Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\,\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\,\dot{q}_j \dot{q}_k = \frac{1}{2}(J/R^2 + M)\,\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\,ML_0^2\,\dot{\theta}^2$$

La funzione dissipativa non necessita invece di alcuna approssimazione, in quanto già quadratica nelle variabili del problema.

Derivando le equazioni nel modo già indicato, si ottiene il seguente sistema lineare:

$(J/R^2 + M)\,\ddot{x} + r\,\dot{x} + kx = 0$

$ML_0^{\,2}\,\ddot{\theta} + MgL_0\,\theta = 0$