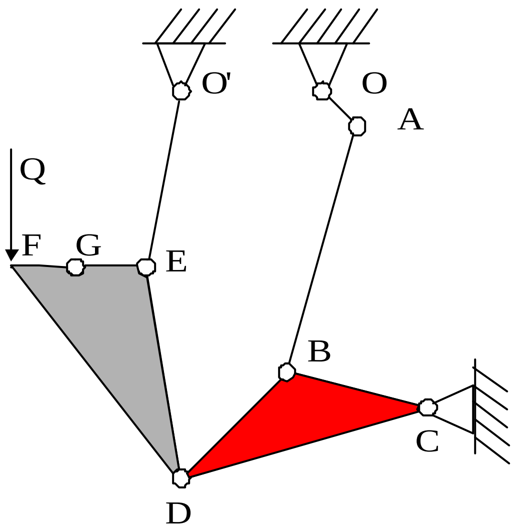
Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami - Appello del 9 gennaio 1998

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, nella configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione del punto F
- la coppia motrice applicata alla manovella OA
- le reazioni nella cerniera O'

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

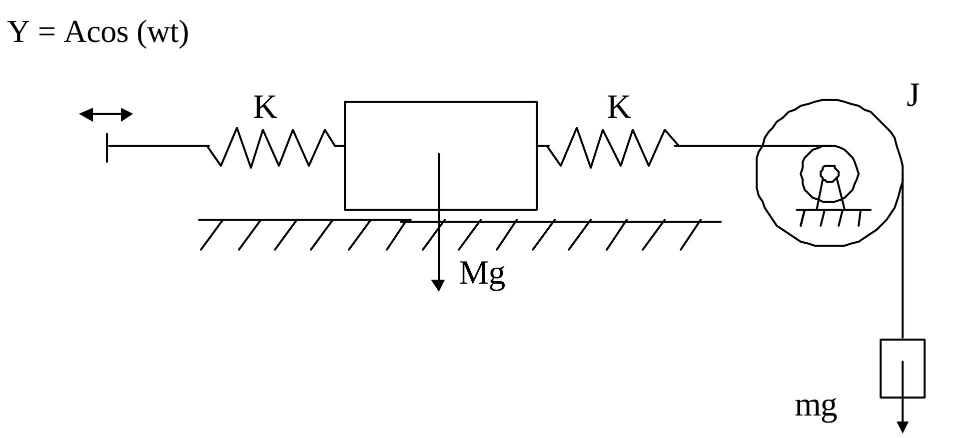
- il sistema operi in un piano verticale;
- la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezza);
- la velocità angolare della manovella OA: ω=costante verso antiorario;
- dell'elemento DEF la massa è concentrata in G e J_G sia il momento di inerzia;
- gli attriti siano trascurabili;
- la forza Q applicata in F sia verticale.



Es. 2 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- Scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema;
- Indicare come è possibile determinare le frequenze proprie e i modi di vibrare del sistema e la legge di moto.

A tal fine si ritengano note: la massa del carrello (M) e della massa sospesa (m), il momento di inerzia baricentrico (J) del disco r (interno) ed R (esterno).



Es. 3 – Descrivere i principi di funzionamento dei freni a disco ricorrendo anche ad uno sviluppo analitico.

Soluzione proposta

Analisi del sistema.

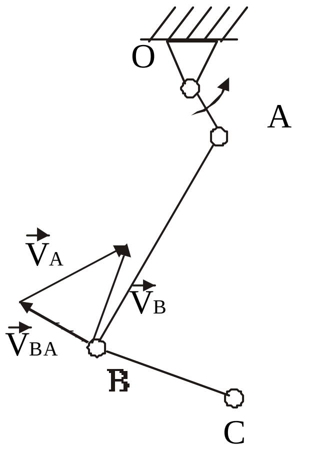
Definiamo traiettoria, velocità e accelerazione assolute di ogni punto notevole:

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
O'	punto a terra	nulla	nulla
O	punto a terra	nulla	nulla
A	circonferenza centrata in O	$\omega \Lambda OA$	nota $\omega \Lambda (\omega \Lambda OA)$
B	circonferenza centrata in C	?	?
C	punto a terra	nulla	nulla
D	circonferenza centrata in C	?	?
E	circonferenza centrata in O'	?	?
G	?	?	?
F	?	?	?

Primo quesito: la velocità e l'accelerazione nel punto F:

Utilizzo il teorema dei moti relativi posizionando una terna traslante di moto circolare uniforme attorno ad O in A, in questo modo trovo la velocità del punto B:

$\vec{V}_B$ (assoluta)	=	$\vec{V}_A$	+	$\vec{V}_{BA}$
(?) $\omega_{BC}BC$		ωOA		(?) $\omega_{AB}AB$
$\perp BC$		$\perp OA$		$\perp AB$



La chiusura dell'equazione vettoriale permette di determinare la velocità assoluta di B e la velocità del punto B relativamente al punto A.

Il modulo della velocità assoluta di B permette di determinare la velocità angolare dell'asta BC:

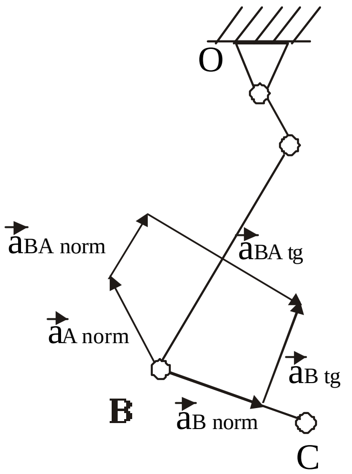
ù $_{BC} = \frac{V_B}{BC}$ verso orario

Il modulo della velocità di B rispetto ad A permette di determinare la velocità angolare dell’asta AB:

$$\omega_{AB} = \frac{V_{BA}}{AB} \text{ verso orario}$$

Calcolo le accelerazioni sempre con la formula di Rivals, applicabile in quanto il moto traslatorio è della terna mobile ci permette di affermare che il termine dovuto all’accelerazione complementare è nullo:

	$\vec{a}_B$		=	$\vec{a}_A$		+	$\vec{a}_{BA}$	
	Tg	norm		Tg	norm		Tg	norm
Modulo	$(?)\dot{\omega}_{BC} BC$	$\omega_{BC}^2 BC$		f	$\text{ù}_A^2 OA$		$(?)\dot{\omega}_{AB} AB$	$\omega_{AB}^2 AB$
Direzione	$\perp BC$	//BC verso C		-	//OA verso O		$\perp AB$	//AB verso A



Il modulo della accelerazione tangenziale assoluta di B permette di determinare la accelerazione angolare dell’asta BC:

$$\dot{\text{ù}}_{BC} = \frac{a_{Bt}}{BC}$$

Il modulo dell’accelerazione tangenziale di B rispetto ad A permette di determinare l’accelerazione angolare dell’asta AB:

$$\dot{\text{ù}}_{AB} = \frac{a_{ABt}}{AB}$$

Anche la velocità e l’accelerazione di D è ora completamente nota:

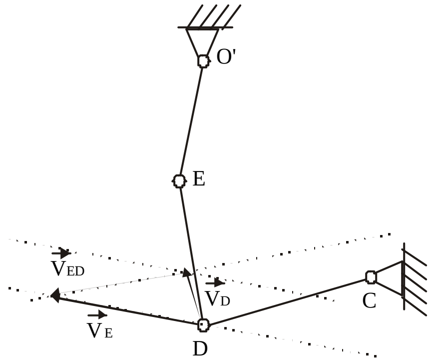
$\vec{V}_D$	=	modulo	$\omega_{DC} DC$
		direzione	$\perp DC$

			tg	n
$\vec{a}_D$	=	modulo	$\dot{\omega}_{DC} DC$	$\omega_{DC}^2 \overline{DC}$
		direzione	$\perp DC$	//DC verso C

Calcoliamo la velocità di E utilizzando una terna mobile con origine in D e dotata di moto traslatorio circolare attorno a C.

	$\vec{V}_E$	=	$\vec{V}_D$	+	$\vec{V}_{ED}$
Modulo	$(?)\omega_{0'E}O'E$		$\omega_{DC}DC$		$(?)\omega_{ED}ED$
Direzione	$\perp$O'E		$\perp$DC		$\perp$DE

.



Il modulo della velocità assoluta di E permette di determinare la velocità angolare dell'asta O'E:

$$\omega_{O'E} = \frac{V_E}{O'E} \text{ verso orario}$$

Il modulo della velocità di E rispetto a D permette di determinare la velocità angolare dell'asta DE:

$$\omega_{DE} = \frac{V_{DE}}{DE} \text{ verso orario}$$

Passiamo ora alla determinazione delle accelerazioni:

	$\vec{a}_{E\,ASS.}$		=	a_D		a_{ED}	
	Tg	n		Tg	n	Tg	n
Modulo	$(?)\dot{\omega}_{0'E}O'E$	$\omega^2_{0'E}O'E$		$\dot{\omega}_{DC}CD$	$\omega^2_{DC}CD$	$(?)\dot{\omega}_{ED}ED$	$\omega^2_{ED}ED$
Direzione	$\perp$O'E	//O'E verso O'		$\perp$CD	//CD verso C	$\perp$ED	//ED verso D

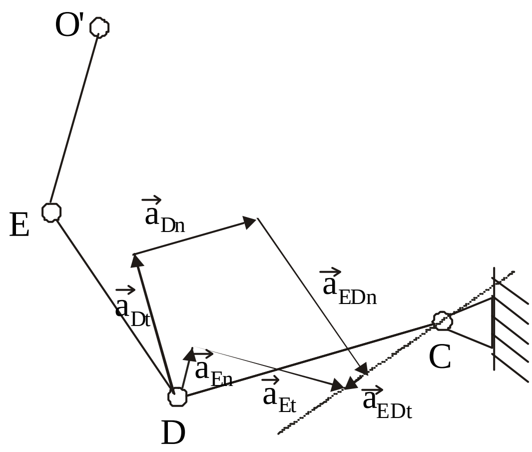
Il modulo dell'accelerazione tangenziale assoluta di E permette di determinare la accelerazione angolare dell'asta O'E:

$$\dot{\omega}_{O'E} = \frac{A_E}{O'E} \text{ verso antiorario}$$

mentre il modulo dell'accelerazione tangenziale di E rispetto a D permette di determinare l'accelerazione angolare dell'asta ED:

$$\dot{\omega}_{ED} = \frac{A_{ED}}{ED} \text{ verso orario}$$

Il grafico vettoriale corrispondente alla tabella prima riportata è:



La velocità e l’accelerazione del punto F, con la stessa terna traslante in D:

$\vec{V}_F$	=	$\vec{V}_D$	+ $\vec{V}_{FD}$
		$\omega_{DC} DC$	$\omega_{FD} FD$
		$\perp CD$	$\perp FD$

$\vec{a}_F$	=	$\vec{a}_D$		+ $\vec{a}_{FD}$	
		Tg	n	Tg	n
		$\dot{\omega}_{DC} DC$	$\omega^2_{DC} DC$	$\dot{\omega}_{ED} DF$	$\omega^2_{ED} DF$
		$\perp CD$	//CD verso C	$\perp DF$	//DF verso D

Anche la velocità e l’accelerazione di G possono essere ricavate con un procedimento analogo.

La coppia motrice applicata alla manovella OA

La coppia necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella dell’elemento DEF che è l’unico elemento dotato di massa:

$$\frac{dE_C}{dT} = M\vec{v}_G \times \vec{a}_G + J_G \vec{\omega}_{DEF} \times \dot{\vec{\omega}}_{DEF}$$

Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$W_m = \vec{C}_m \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

Potenza resistente

E' dovuta alla variazione di quota del baricentro dell'elemento DEF ed alla forza Q ad esso applicata:

$$W_r = -\vec{Q} \times \vec{V}_F - M\vec{g} \times \vec{V}_G$$

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$M\vec{v}_G \times \vec{a}_G + J_G \vec{\omega}_{DEF} \times \dot{\vec{\omega}}_{DEF} = \vec{C}_m \times \vec{\omega} + \vec{Q} \times \vec{V}_F + M\vec{g} \times \vec{V}_G$$

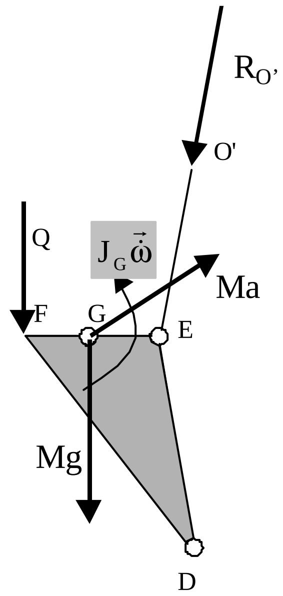
in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita Cm.

Le reazioni vincolari nella cerniera O’

La considerazione da tenere presente è che l’asta O’E è una biella e quindi la reazione in O’ sarà diretta come la biella stessa.

Definita la direzione della reazione rimangono da determinare il modulo ed il verso della stessa. Allo scopo è possibile scrivere un momento rispetto alla cerniera D (in modo da evitare che le forze agenti in D, incognite, compaiano nell’equazione) ed annullarlo.
Per quanto riguarda il modulo ed il verso dell’accelerazione del baricentro G e dell’accelerazione angolare di DEF si può fare riferimento a quanto ricavato per lo studio della cinematica. I versi indicati nel disegno hanno il puro scopo di segnalare la presenza di una forza e di un momento e quindi sono da intendersi puramente qualitativi.
La seguente relazione esprime in forma vettoriale l’equilibrio richiesto:

$$M_D = \vec{R}_{0'} \Lambda \overrightarrow{DO_1} + J_G \dot{\vec{\omega}} + M\vec{a}_G \Lambda \overrightarrow{DG} + M\vec{g} \Lambda \overrightarrow{DG} + \vec{Q} \Lambda \overrightarrow{DF} = 0$$



II° Esercizio

Soluzione proposta

Dati:

- M massa carrello
- m massa sospesa
- J momento d’inerzia baricentrico del disco
- r, R rispettivamente raggio interno ed esterno del disco.

Il sistema si presenta a tre gdl di cui uno con legge di moto imposta.

Come coordinate libere assumiamo:

- y spostamento assoluto del carrello (positivo verso destra);
- θ rotazione disco (positiva in senso orario)
- x spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra).

Tutte le coordinate hanno origine nella posizione di equilibrio statico.

Utilizziamo il metodo di Lagrange per la soluzione.

Calcolo energia cinetica:

$$E_{cin\,carrello} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2$$

$$E_{cin\,disco} = \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2$$

La massa sospesa ha velocità verticale pari a:

$$V_{massa\ sospesa} = \dot{\theta}R$$

Quindi:

$$E_{cin\,massa\ sospesa} = \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow E_{cin} = \frac{1}{2} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2$$

L’energia potenziale è data:

$$E_{pot\ \mathrm{I}\,molla} = \frac{1}{2} K(x-y)^2$$

$$E_{pot\ \mathrm{II}\,molla} = \frac{1}{2} K(\boldsymbol{q}r - x)^2$$

$$E_{pot\ massa\ sosp.} = -mg\theta r$$

$$E_{pot} = \frac{1}{2} K(x-y)^2 + \frac{1}{2} K(\boldsymbol{q}r - x)^2 - mg(\boldsymbol{q}R)$$

nell’ipotesi che tutte le variabili siano misurate a partire dalla condizione di equilibrio statico.

Calcoliamo le equazioni differenziali che descrivono la vibrazione del sistema:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial x} = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = K(x-y) + K(\boldsymbol{q}r - x)$$

$$\Rightarrow I \text{ equazione } \left\{ M\ddot{x} + K\boldsymbol{q}r - Ky = \boldsymbol{f} \right.$$

Seconda equazione:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{\theta}} = J\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{\theta}} = J\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta}$$

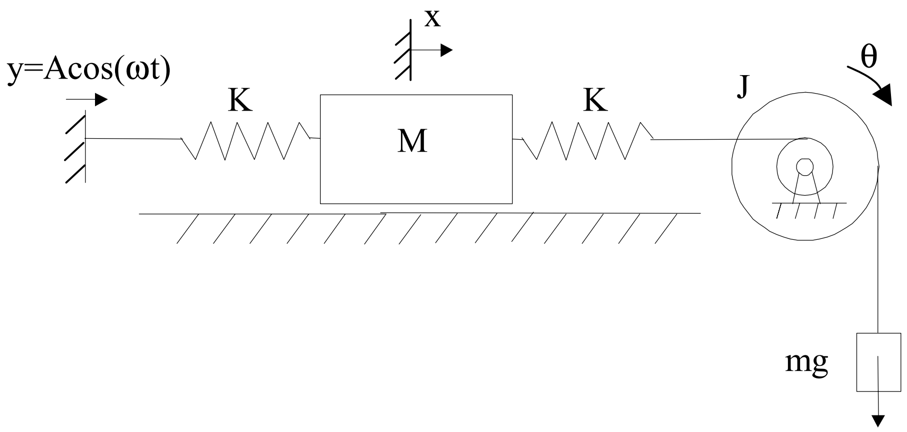
$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \theta} = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta} = K(\theta r - x)r + mgR$$

$$\Rightarrow \text{II equazione } \left(+ mR^2\right)\ddot{\theta} + Kr^2\theta - Krx + mgR = \boldsymbol{f}$$

La terza equazione, che descrive lo spostamento del vincolo, è data in termini finiti tra i dati del problema.

Es. 2: **Analisi del sistema**



Il sistema si presenta a tre gradi di libertà anche se la posizione del vincolo è data da una legge imposta:

x posizione assoluta del carrello (positivo verso destra);
θ rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
y spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra);

si ipotizza che tutte le coordinate sopra riportate hanno valore nullo nella configurazione in cui tutte le molle del sistema non presentino deformazione.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del carrello (solo traslatoria) e di quella del disco (solo rotatoria) e di quella della massa sospesa (solo traslatoria):

Energia cinetica carrello:

$$E_{c-car} = \frac{1}{2} M \dot{x}^2$$

Energia cinetica disco:

$$E_{c-disco} = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Energia cinetica massa sospesa:

$$E_{c-ms} = \frac{1}{2} m V_{ms}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

Dove V_{ms} rappresenta la velocità assoluta del baricentro della massa sospesa.

L'energia cinetica totale del sistema è data quindi da:

$$E_c = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

Energia potenziale del sistema

L'energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro della massa sospesa conseguente alla rotazione del disco) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle due molle presenti nel sistema):

Energia potenziale elastica:

$$E_{pE} = \frac{1}{2}K(x-y)^2 + \frac{1}{2}K(r\theta - x)^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$E_{pG} = -mgR\theta$$

L'energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$E_p = \frac{1}{2}K(x-y)^2 + \frac{1}{2}K(r\theta - x)^2 - mgR\theta$$

Equazioni di equilibrio

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell'energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial x} + \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}}\right) = M\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = K(x-y) + K(x - r\theta)$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$M\ddot{x} + 2Kx - Kr\theta = Ky$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}+\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}=J\dot{\theta}+mR^2\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right)=J\ddot{\theta}+mR^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta}=0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta}=K(\theta r-x)r-mgR$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$J\ddot{\theta}+mR^2\ddot{\theta}+K(r\theta-x)r-mgR=0$$

In termini matriciali l'equazione può essere espressa come:

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & J+mR^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2K & -rK \\ -rK & r^2K \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} Ky \\ mgR \end{Bmatrix}$$

Si noti che si perviene solo a due equazioni differenziali in quanto lo spostamento del vincolo è fornito in termini finiti dai dati del problema.

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{x(t)\}=\{X_0\}e^{i\omega_0 t}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

$$\det\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]=0$$

ovvero di:

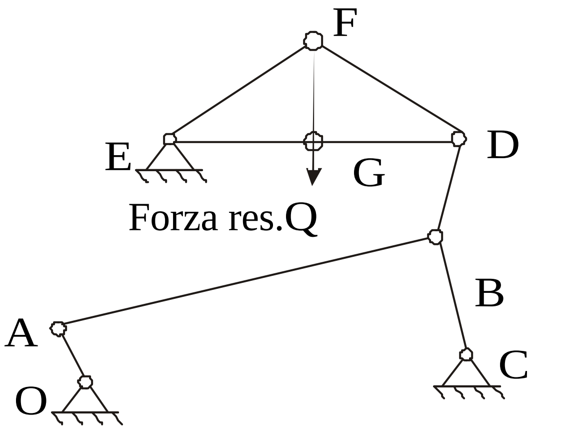
$$\det\begin{bmatrix} 2K-\omega_0^2 M & -rK \\ -rK & r^2K-\omega_0^2\left(J+mR^2\right) \end{bmatrix}=0$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami - Appello dell'11 febbraio 1998

Es. 1 - Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione del punto F
- la coppia motrice applicata alla manovella OA
- le reazioni nella cerniera C

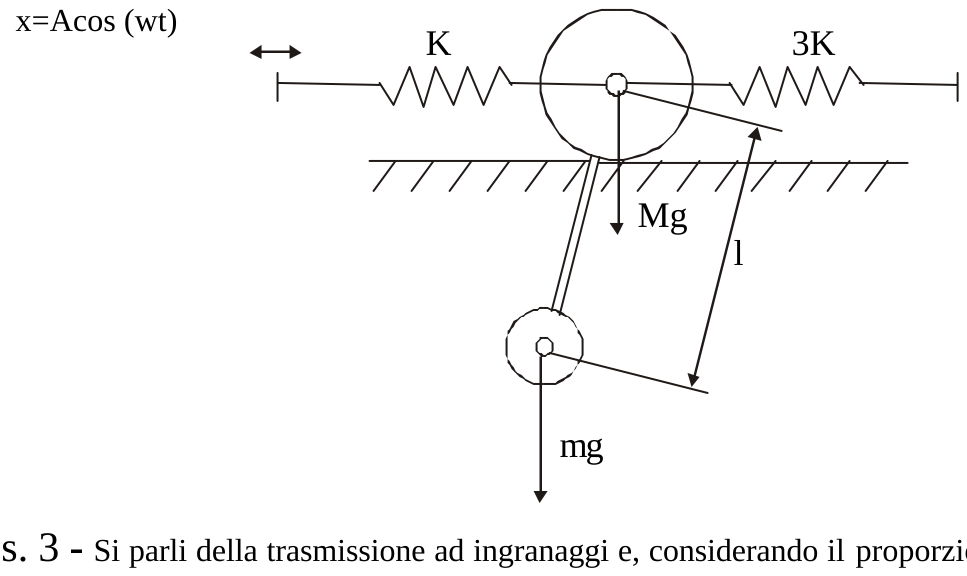
Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che: a) il sistema operi in un piano verticale; b) la geometria sia completamente nota (angoli e lunghezze); c) la velocità angolare della manovella OA: ω=costante in verso antiorario; d) dell'elemento DEF la massa M sia concentrata in G e J_G sia il momento di inerzia baricentrico; e) gli attriti siano trascurabili; f) la forza resistente Q applicata in F sia verticale.



Es. 2 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- Scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema;
- Determinare le frequenze proprie e i modi di vibrare del sistema e la legge di moto.

A tal fine si ritengano note: la massa, il momento di inerzia baricentrico e il raggio del disco (M, J, R); la massa (si consideri quella del disco all'estremità e si trascuri quella dell'asta) e la lunghezza del pendolo (m, l); le rigidezze delle due molle.



Es. 3 - Si parli della trasmissione ad ingranaggi e, considerando il proporzionamento modulare, si approfondisca l'argomento del minimo numero di denti possibile e delle tecniche di ribassamento e correzione.

Esercizio cinematica e dinamica

Analisi del sistema

Valutiamo la cinematica dei punti notevoli del sistema:

Punto del sistema	**Traiettoria assoluta**	**Velocità assoluta**	**Accelerazione assoluta**
O	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O	$\omega_{OA}OA$	$\omega^2_{OA}OA$
B	Circonferenza centrata in C	$\omega_{BC}BC$	$\omega^2_{BC}BC$
C	Punto a terra	Nulla	Nulla
D	Circonferenza centrata in E	$\omega_{DE}DE$	$\omega^2_{DE}DE$
E	Punto a terra	Nulla	Nulla
F	Circonferenza centrata in E	$\omega_{FE}FE$	$\omega^2_{FE}FE$
G	Circonferenza centrata in E	$\omega_{GE}GE$	$\omega^2_{GE}GE$

La velocità e l'accelerazione angolare di F possono essere determinate applicando per due volte le leggi di composizione delle velocità e delle accelerazioni.
In particolare il percorso risolutivo parte dall'osservazione che nel sistema possono essere riconosciuti due quadrilateri articolati: OABC e CBDE (dove l'asta DE coincide con l'arco a tre cerniere rappresentato da DEF.
Il punto F sarà cinematicamente noto una volta note la velocità e l'accelerazione angolare dell'arco a tre cerniere DEF. Tali parametri angolari possono essere agevolmente determinati note la velocità e l'accelerazione assolute di D. Questi ultimi sono ricavabili dalla conoscenza della velocità e della accelerazione assolute del punto B che saranno quindi i primi parametri da calcolare.

Essendo la velocità angolare della manovella OA costante ed uguale ad ω:

$|V_A| = \omega OA$ con direzione perpendicolare ad OA e verso antiorario.

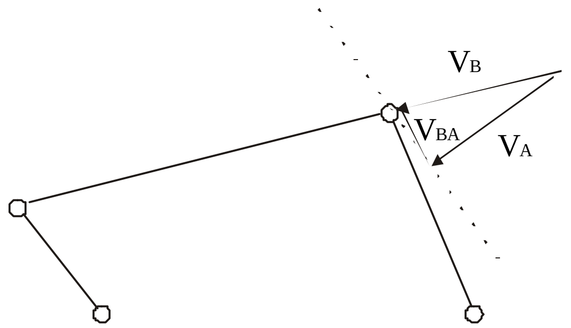
Mentre l'accelerazione:

$$\vec{a}_A = \dot{\omega}(=0)\overline{OA}\,\vec{t} + \omega^2\overline{OA}\,\vec{n}$$

Utilizzando una terna traslante di moto circolare con origine in A, in base alla legge di composizione delle velocità, si ottiene:

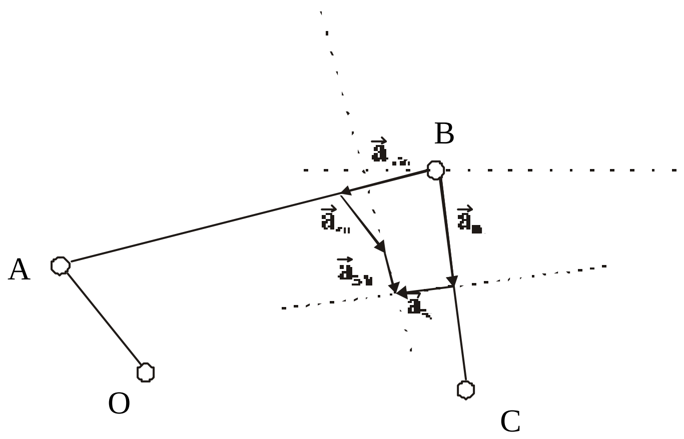
	$\vec{V}_B$	=	$\vec{V}_A$	+	$\vec{V}_{BA}$
modulo	$\omega_{BC}(=?)BC$		ωOA		$\omega_{BA}(=?)BA$
direzione	$\perp BC$		$\perp OA$		$\perp BA$

da cui ricavo $\vec{V}_B$ ed $\vec{V}_{BA}$; da queste ultime risalgo alle velocità angolari delle aste AB e BC.



Utilizzando la stessa terna, ed applicando il Teorema di Rivals in quanto la terna mobile è traslante, ottengo:

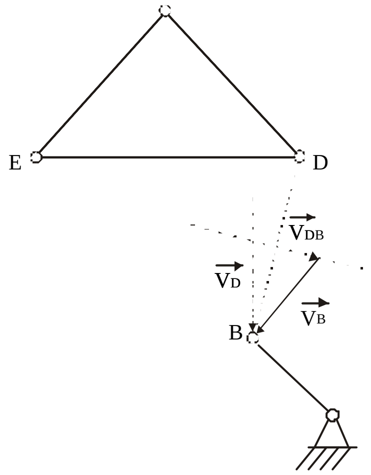
	$\vec{a}_B$		=	$\vec{a}_A$		+	$\vec{a}_{BA}$	
	T_g	n		T_g	n		T_g	n
modulo	$\dot{ù}_{BC}(=?)BC$	$ù^2_{BC}BC$		0	$ù^2 OA$		$\dot{ù}_{BA}(=?)BA$	$ù^2_{BA}BA$
direzione	$\perp BC$	//BC verso C		$\perp OA$	//OA verso O		$\perp BA$	//BA verso A



Abbiamo così ricavato i valori delle $\vec{a}_B$ ed $\vec{a}_{BA}$; da queste ultime risaliamo alle accelerazioni angolari delle aste AB e BC.

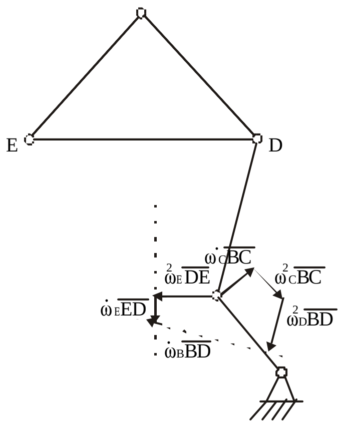
Calcoliamo la velocità di D utilizzando una terna traslante di moto circolare con origine centrata in B:

	$\vec{V}_D$	=	$\vec{V}_B$	+	$\vec{V}_{DB}$
modulo	$ù_{ED}(=?)ED$		$ù_{BC}BC$		$ù_{DB}(=?)DB$
direzione	$\perp ED$		$\perp BC$		$\perp DB$



Ricaviamo così la velocità del punto D dalla quale risaliamo alle velocità angolari delle aste BD e DE.
Valutiamo le accelerazioni in D utilizzando la stessa terna mobile:

	$\vec{a}_D$		=	$\vec{a}_B$		+	$\vec{a}_{DB}$	
	T_g	n		T_g	n		$\overline{T}_g$	$\overline{n}$
modulo	$\check{u}_{ED}(=?)ED$	$\grave{u}^2_{ED}ED$		$\check{u}_{BC}BC$	$\grave{u}^2_{BC}BC$		$\check{u}_{BD}(=?)BD$	$\grave{u}^2_{BD}BD$
direzione	$\perp$ED	//ED verso E		$\perp$BC	//BC verso C		$\perp$BD	//BD verso B



Abbiamo così ricavato i valori delle $\vec{a}_D$ ed $\vec{a}_{DA}$; da queste ultime risaliamo alle accelerazioni angolari delle aste AB e BC.

Possiamo ora ricavare facilmente la velocità e l’accelerazione del punto F:

$$\vec{V}_F = \begin{array}{c|cc} \text{mod.} & \grave{u}_{DE} & EF \\ \hline \text{dir.} & \perp & EF \end{array}$$

$$\vec{a}_F = \grave{u}_{EF}EF.\vec{t} + \grave{u}^2_{EF}EF.\vec{n}$$

La coppia motrice applicata alla manovella OA

La coppia necessaria a garantire il moto può essere determinata tramite un bilancio di potenze, semplificato dalla mancanza di forze di attrito:

$$\frac{dE_C}{dT} = W_m - W_r$$

Variazione di energia cinetica

Coincide con quella dell'elemento DEF che è l'unico elemento dotato di massa:

$$\frac{\mathrm{dE_C}}{\mathrm{dT}} = \mathrm{M}\vec{a}_G \times \vec{v}_G + \mathrm{J}_G \dot{\vec{\omega}}_{ED} \times \vec{\omega}_{ED}$$

Potenza motrice

E' fornita dal motore collegato alla manovella:

$$\mathrm{W_m} = \vec{C}_m \times \vec{\omega}$$

dove la velocità angolare della manovella è un dato del problema.

Potenza resistente

E' dovuta alla variazione di quota del baricentro dell'elemento DEF ed alla forza F ad esso applicata:

$$\mathrm{W_r} = -\vec{F} \times \vec{V}_F - \mathrm{M}\vec{g} \times \vec{V}_G$$

Bilancio di potenze

L'equazione risultante è:

$$\mathrm{M}\vec{a}_G \times \vec{v}_G + \mathrm{J}_G \dot{\vec{\omega}}_{ED} \times \vec{\omega}_{ED} = \vec{C}_m \times \vec{\omega} + \vec{F} \times \vec{V}_F + \mathrm{M}\vec{g} \times \vec{V}_G$$

in cui tutti i termini risultano essere noti a meno dell'incognita C_m.

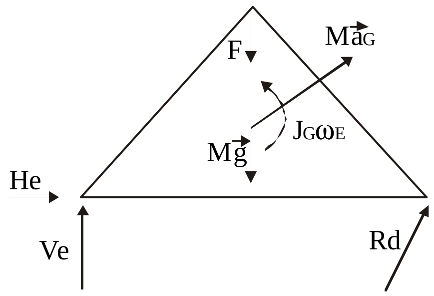
Prima di procedere sarà comunque necessario determinare le caratteristiche cinematiche del baricentro G:

$$\vec{v}_G = \begin{array}{c|cc} \text{mod.} & \text{ù}_{EG} & EG \\ \hline \text{dir.} & \perp & EG \end{array}$$

$$\vec{a}_G = \text{ù}_{EG} EG.\vec{t} + \text{ù}_{EG}^2 EG.\vec{n}$$

Le reazioni vincolari nella cerniera C

Aprendo la struttura in D:

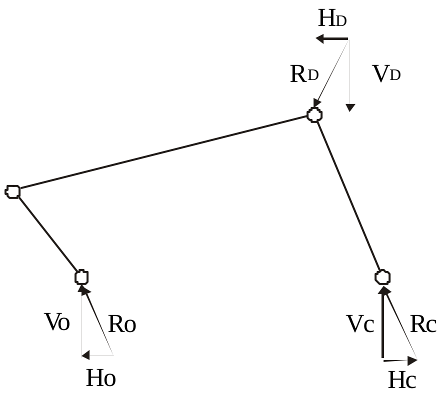


Facciamo l'equilibrio al momento in E e ricaviamo il valore di R_D, l'unica reazione che passa lungo la biella BD:

$$\sum M_E = f \qquad \Rightarrow R_D$$

L'analisi si riconduce a quella della sottostruttura OABC (quadrilatero articolato), le cui aste AB e BC sono delle bielle (non chiaramente OA a causa della presenza del momento motore).

Cominciamo con l'evidenziare le componenti orizzontali e verticali delle reazioni presenti nelle tre cerniere per poi scrivere le quattro relazioni di equilibrio necessarie per determinare la reazione in C (e quella in O, anche se non richiesta).



eq. verticale = $\sum V_i = f$

eq. verticale = $\sum H_i = f$

eq. rotazione attorno ad A

eq. rotazione attorno a B

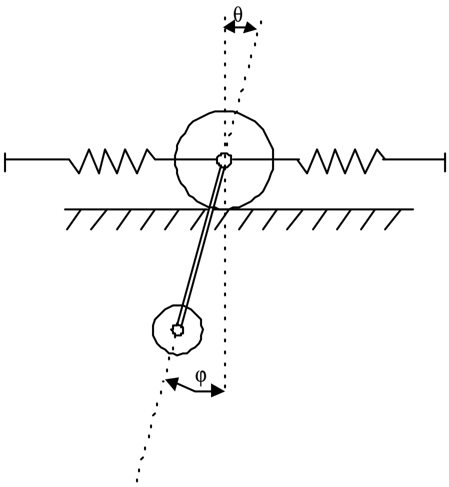
Ne risultano quattro relazioni nelle quattro incognite cercate che possono in tal modo essere determinate.

Esercizio cinematica e dinamica

DATI:

- Disco: Massa M, momento di inerzia baricentrico j, raggio R
- pendolo: massa m, lunghezza l
- rigidezza molle

Il problema è a 3 gdl; vale comunque la pena di notare fin d'ora che la legge di moto di uno di questi è imposta.
Definiamo le coordinate libere che utilizzeremo:



- θ rotazione del disco
- φ rotazione del pendolo

Supponiamo di valutare entrambe le coordinate a partire dalla posizione di equilibrio statico del sistema; faremo inoltre l'ipotesi che in tale posizione di equilibrio le due molle abbiano una lunghezza coincidente con quella di molla indeformata. In altre parole nella posizione di equilibrio statico supporremo che entrambe le molle siano scariche.

Utilizzo il metodo di Lagrange:

$$E_{c} = E_{c\,\text{disco}} + E_{c\,\text{pendolo}}$$

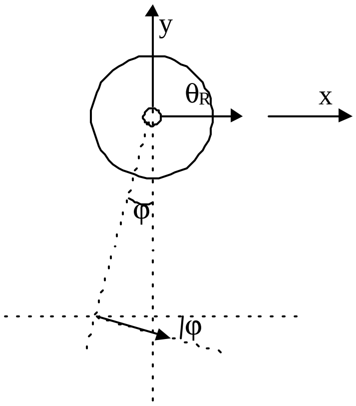
$$E_{c}\ \text{disco} = \frac{1}{2} M \left(\dot{q} R\right)^{2} + \frac{1}{2} J \dot{q}^{2}$$

Il calcolo dell'energia cinetica del pendolo si presenta leggermente più complesso in quanto bisogna determinare il valore della velocità assoluta dello stesso che sarà il risultato di una composizione tra il movimento di trascinamento (del disco) e quello relativo (di oscillazione).

$$\vec{V}_{\text{ass.pendolo}} = \vec{V}_{tras.} + \vec{V}_{rel.} \Rightarrow$$

Introduciamo una terna mobile solidale al centro del disco posto all'estremità del pendolo e scomponiamo la velocità lungo gli assi X ed Y:

$$\Rightarrow \sqrt{\left[\left(\dot{q}R\right) + j\,l\cos j\right]^{2} + \left(j\,l\sin j\right)^{2}}$$



per cui, essendo la massa concentrata all’estremità dell’asta, in pratica nell’origine della terna mobile:

$$E_{c\,\text{pendolo}} = \frac{1}{2}m\left(\sqrt{\left(\dot{\theta}R+\varphi\ l\cos\varphi\right)^2+\left(\varphi\ l\sin\varphi\right)^2}\right)^2$$

Si sottolinea che si è ipotizzato che la massa m sia puntiforme e quindi priva di momento di inerzia e che per questo si è fatta coincidere l’energia cinetica con la sua componente traslazionale.
Quindi:

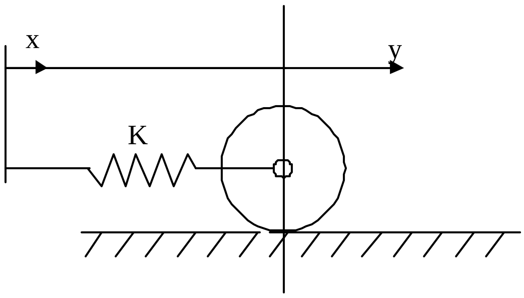
$$E_c = \frac{1}{2}M\left(\dot{\theta}R\right)^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\left[\dot{\theta}^2R^2+2l\cos\varphi R\dot{\theta}\varphi+\varphi^2l^2\right]$$

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)\left(\dot{\theta}R\right)^2+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2+\frac{1}{2}m\ l^2\varphi^2+ml\cos R\dot{\theta}\varphi\ .$$

Valutiamo l’energia potenziale:

$$\mathrm{E_p} = \mathrm{E_{molle}} + \mathrm{E_{gravitazionale}}$$

Per determinare l’energia potenziale delle molle dobbiamo considerare la compressione o l’estensione dovuta al movimento del vincolo, quindi:



$$\mathrm{y} = \dot{\theta}\mathrm{R}$$

Per cui:

$$E_{\text{p molla I}} = \frac{1}{2}K(y-x)^2$$

$$E_{\text{p molla II}} = \frac{1}{2}3K(-y)^2$$

$$\mathrm{E_{gravitazionale}} = \mathrm{mgl}\left(1-\cos\varphi\right)$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}K(x-y)^2+\frac{3}{2}Ky^2+mgl(1-\cos\varphi)\ .$$

Siamo ora in grado di scrivere le equazioni non lineari del moto:

$$\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = (M+m)R^2\dot{\boldsymbol{q}} + j\dot{\boldsymbol{q}} + ml\cos \boldsymbol{j} R \boldsymbol{j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} = (M+m)R^2\ddot{\boldsymbol{q}} + j\ddot{\boldsymbol{q}} + mlR\left(\cos \boldsymbol{j}\ddot{\boldsymbol{j}} - \sin \boldsymbol{j}\boldsymbol{j}^2\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{\text{cin}}}{\partial \theta} = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial \boldsymbol{q}} = \frac{1}{2}\mathrm{K}(\mathrm{R}\boldsymbol{q} - x)^2 + \frac{3}{2}\mathrm{K}(\boldsymbol{q}\mathrm{R})^2 = \mathrm{K}\left(\mathrm{R}^2\boldsymbol{q} - xR\right) + 3\mathrm{K}\mathrm{R}^2\boldsymbol{q}\text{ö}$$

La prima equazione differenziale risulta essere:

$$\Rightarrow \left[(M+m)R^2 + j\right]\ddot{\boldsymbol{q}} + mlR\cos \boldsymbol{j}\ddot{\boldsymbol{j}} - mlR\sin \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{j}^2\boldsymbol{q} - KRx = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \boldsymbol{j}} = ml^2\boldsymbol{j} + ml\cos \boldsymbol{j} R\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \boldsymbol{j}} = ml^2\ddot{\boldsymbol{j}} + mlR(\cos \boldsymbol{j}\ddot{\boldsymbol{q}} - \sin \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{j}\dot{\boldsymbol{q}})$$

$$\frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \boldsymbol{j}} = -mlR\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{j}\sin \boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial \boldsymbol{j}} = mgl\sin \boldsymbol{j}$$

La seconda equazione differenziale risulta essere:

$$\Rightarrow 2lR\cos \boldsymbol{j}\ddot{\boldsymbol{q}} + ml^2\ddot{\boldsymbol{j}} + mlR(\sin \boldsymbol{j} - \sin \boldsymbol{j})\dot{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{j} + mgl\sin \boldsymbol{j} = \boldsymbol{f}.\ .$$

Per linearizzare le equazioni calcolo prima il punto di equilibrio statico. Come abbiamo già detto consideriamo di porre θ = 0 nel punto di equilibrio statico delle 2 molle. Per quel che riguarda φ, si ottiene ovviamente:

$$\frac{\partial E_{\text{p}}}{\partial \boldsymbol{j}} = mgl\sin \boldsymbol{j}$$

Per cui

$mgl\sin \boldsymbol{j} = \boldsymbol{f}$ per $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_0 = n\boldsymbol{p}$ con n $= \boldsymbol{f}, 1, 2.$

Quindi abbiamo equilibrio statico per la coppia:

$$\theta_0 = f$$
$$\varphi_0 = f$$

Possiamo ora linearizzare il sistema attorno la posizione di equilibrio statico sviluppando in serie di Taylor i termini non lineari:

Linearizziamo l’unico termine non lineare dell’energia potenziale:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{mgl}(1-\cos\varphi) = \mathrm{mgl}(1-\cos\varphi_0) & + \ \mathrm{mgl}\sin\varphi_0(\varphi-\varphi_0) & + \ \mathrm{mg}\frac{1}{2}\cos\varphi_0(\varphi-\varphi_0)^2 & + \ldots \\ \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ f & f & \mathrm{mg}\frac{1}{2}\varphi^2 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}_{\mathrm{pot\,lin}} = \frac{1}{2}\mathrm{K}(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2 + \frac{3}{2}\mathrm{K}(\mathrm{y})^2 + \mathrm{mgl}\frac{1}{2}\varphi^2$$

Per quanto riguarda l’energia cinetica l’unico termine non lineare è dato da:

$mlR\cos\boldsymbol{j} \Rightarrow mlR\cos\boldsymbol{j}_0$ è la sua linearizzazione di Fourier fermata al 1° termine.

$$\Rightarrow E_{\mathrm{cin.lin.}} = \frac{1}{2}(M+m)(\dot{\boldsymbol{q}}\mathrm{R})^2 = \frac{1}{2}\mathrm{j}\dot{\boldsymbol{q}}^2 + \frac{1}{2}\mathrm{ml}^2\boldsymbol{j}^2 + mlR\cos\boldsymbol{j}_0\dot{\boldsymbol{q}}\dot{\boldsymbol{j}}$$

Ricalcolo le equazioni del moto partendo dalle energie linearizzate:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{cin}}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} = (M+m)R^2\dot{\boldsymbol{q}} + j\dot{\boldsymbol{q}} + mlR\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\mathrm{cin}}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} = (M+m)R^2\ddot{\boldsymbol{q}} + j\ddot{\boldsymbol{q}} + mlR\,\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{\mathrm{cin}}}{\partial\theta} = f$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{\mathrm{pot}}}{\partial\theta} = 4\mathrm{KR}^2\theta - \mathrm{KRx}$$

$$\Rightarrow (M+m)R^2\ddot{\boldsymbol{q}} + j\ddot{\boldsymbol{q}} + mlR\,\boldsymbol{j} + 4KR^2\boldsymbol{q} - KRx = f$$

Passo alla seconda equazione:

$$\frac{\partial E_{\mathrm{cin}}}{\partial\boldsymbol{j}} = ml^2\boldsymbol{j} + mlR\dot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{\mathrm{cin}}}{\partial\boldsymbol{j}} = ml^2\ddot{\boldsymbol{j}} + mlR\ddot{\boldsymbol{q}}$$

$$\frac{\partial \mathrm{E}_{\mathrm{cin}}}{\partial\varphi} = f$$

$$\frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial \boldsymbol{j}} = mgl\,\boldsymbol{j}$$

$$\Rightarrow ml^2\hat{\boldsymbol{j}} + mlR\ddot{\boldsymbol{q}} + mgl\,\boldsymbol{j} = 0$$

in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} (M+m)R^2 + j & mlR \\ mlR & ml^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \ddot{\boldsymbol{q}} \\ \ddot{\boldsymbol{j}} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4KR^2 & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{f} & \mathrm{mgl} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \boldsymbol{q} \\ \boldsymbol{j} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} KRx \\ \boldsymbol{f} \end{vmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$[\mathrm{M}] \qquad |\ddot{\mathrm{z}}| \qquad [\mathrm{K}] \qquad |\mathrm{z}| = |\mathrm{x}|$$

La soluzione dell'omogenea associata sarà una funzione del tipo:

$$\mathrm{z} = \{\mathrm{X}\}\cos(\omega \mathrm{t} + \boldsymbol{f})$$

Per cui, sostituendo tale funzione:

$$-\omega^2[\mathrm{M}]\{\mathrm{Z}\} + [\mathrm{K}]\{\mathrm{Z}\} = 0$$

Perché il sistema

$$([\mathrm{K}] - \omega^2[\mathrm{M}])\{\mathrm{Z}\} = 0 \qquad (1)$$

abbia soluzioni non nulle deve essere:

$$\mathrm{Det}([\mathrm{K}] - \omega^2[\mathrm{M}]) = \boldsymbol{f}$$

da cui ricavo i 2 autovalori ω_1, ω_2 che sostituiti in (1) mi danno 2 autovettori corrispondenti

$$\omega_1 \Rightarrow \mathrm{z}_1 = \begin{vmatrix} \mathrm{z}_{11} \\ \mathrm{z}_{12} \end{vmatrix}$$

$$\omega_2 \Rightarrow \mathrm{z}_2 = \begin{vmatrix} \mathrm{z}_{21} \\ \mathrm{z}_{22} \end{vmatrix}$$

Ricordiamo che sostituendo $\dot{\omega}_2$ in (1) si ottiene una <u>relazione</u> tra z_{11} e z_{12}, si assegna quindi un valore arbitrario ad uno dei due per avere una coppia che sia autovettore.

La soluzione dell'omogeneo associato è somma dei due modi:

1° modo: $$\begin{vmatrix} \theta \\ \varphi \end{vmatrix} = \{\mathrm{z}_1\}\cos(\omega_1 \mathrm{t} + \boldsymbol{f}_1)$$

2° modo: $$\begin{vmatrix} \theta \\ \varphi \end{vmatrix} = \{\mathrm{z}_2\}\cos(\omega_2 \mathrm{t} + \boldsymbol{f}_2)$$

Le due costanti $\boldsymbol{f}_1$ e $\boldsymbol{f}_2$ si ottengono imponendo le condizioni al contorno $\dot{\varphi}_0, \dot{\theta}_0$ e $\ddot{\varphi}_0, \ddot{\theta}_0$.
Si tenga conto che, oltre alla soluzione dell'omogenea associata, ci sarà un integrale legato alla forzante che, a regime, determinerà la soluzione del problema.

Es. 2: **Analisi del sistema**

Il sistema si presenta a tre gradi di libertà anche se la posizione del vincolo è data da una legge imposta:

θ rotazione assoluta del disco (positiva se oraria);
φ rotazione assoluta del pendolo (positiva se oraria);
y spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra);

si ipotizza che tutte le coordinate sopra riportate hanno valore nullo nella configurazione in cui tutte le molle del sistema non presentino deformazione. In particolare in corrispondenza alle due coordinate angolari nulle si immagina che la lunghezza delle due molle coincida con la loro lunghezza indeformata mentre la posizione del pendolo sia verticale.

Energia cinetica del sistema

L'energia cinetica totale del sistema è la somma di quella del disco e di quella del pendolo, nelle componenti dovute alla rotazione ed alla traslazione. Si indichi con l la lunghezza del pendolo.

Energia cinetica del disco:

$$E_{c-d} = \frac{1}{2} M V_d^{\,2} + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

Dove V_d rappresenta la velocità assoluta del baricentro del disco che, nelle coordinate libere scelte, è:

$$V_d = R\dot{\theta}$$

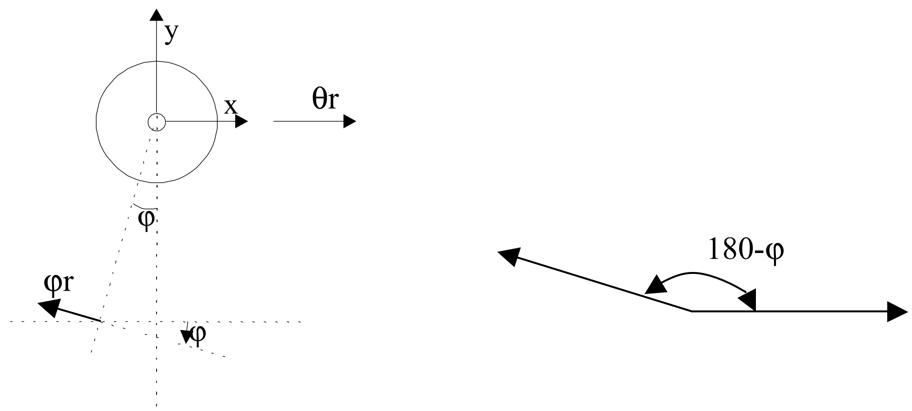
Energia cinetica del pendolo:

$$E_{c-p} = \frac{1}{2} m V_p^{\,2}$$

Dove V_p rappresenta la velocità assoluta del baricentro del pendolo. Immaginando di posizionare nel baricentro del disco una terna traslante solidalmente con esso, tale velocità può essere pensata come la somma di una componente di trascinamento (velocità del baricentro del disco e quindi della terna sopra definita) e di una relativa (oscillazione del pendolo rispetto alla terna sopra definita).

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{trasc} + \vec{V}_{rel}$$

Dal disegno del sistema risulta chiaro che la velocità di trascinamento è orizzontale diretta verso destra mentre quella relativa è diretta verso sinistra con un angolo rispetto all'orizzontale pari a 180-φ.
La massa m concentrata all'estremità inferiore del pendolo è puntiforme e quindi priva di momento di inerzia; questo significa fare coincidere l'energia cinetica con la sua componente legata alla traslazione.



Il quadrato della velocità assoluta può essere ottenuto come somma dei quadrati della velocità orizzontale e di quella verticale.

Velocità orizzontale:

$$V_o = V_{trasc\_o} + V_{rel\_o} = R\dot{\theta} + l\cos(180-\varphi)\dot{\varphi} = R\dot{\theta} - l\cos\varphi\dot{\varphi}$$

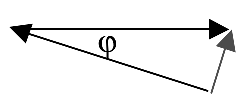
Velocità verticale:

$$V_v = V_{rel\_v} = lsen(180-\varphi)\dot{\varphi} = lsen\varphi\dot{\varphi}$$

Il quadrato della velocità assoluta sarà quindi dato da:

$$\begin{aligned}
V_p &= (V_{trasc_o} + V_{rel_o})^2 + (V_{rel_o})^2 = \\
&= (R\dot{\theta} - l\cos(\varphi)\dot{\varphi})^2 + (lsen\varphi\dot{\varphi}) = \\
&= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\cos\varphi^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi} + l^2 sen\varphi^2\dot{\varphi}^2 = \\
&= R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}
\end{aligned}$$

Si noti come allo stesso risultato si sarebbe arrivato utilizzando il teorema di Carnot o teorema del coseno, che poi non è altro che la legge di composizione delle velocità:



$$V_p = R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2(R\dot{\theta})(l\dot{\varphi})\cos\varphi$$

In definitiva l'energia cinetica associato alla massa m è quindi data da:

$$E_{c-p} = \frac{1}{2}m(R^2\dot{\theta}^2 + l^2\dot{\varphi}^2 - 2Rl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi})$$

L'energia cinetica complessiva del sistema risulta quindi essere:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

Energia potenziale del sistema

L’energia potenziale totale del sistema è la somma di quella gravitazionale (dovuta alla variazione di quota del baricentro del pendolo conseguente alla sua oscillazione) e di quella elastica (dovuta alle variazioni di lunghezza delle due molle):

Energia potenziale elastica:

$$E_{pE} = \frac{1}{2}K(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}(3K)(-R\theta)^2$$

Energia potenziale gravitazionale:

$$E_{pG} = mgl(1-\cos\varphi)$$

L’energia potenziale complessiva del sistema è data quindi da:

$$E_p = \frac{1}{2}K(R\theta - x)^2 + \frac{1}{2}(3K)(-R\theta)^2 + mgl(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}K(R^2\theta^2 - 2Rx\vartheta + x^2) + \frac{3}{2}KR^2\theta^2 + mgl(1-\cos\varphi) =$$

$$= 2KR^2\theta^2 + \frac{1}{2}K(x^2 - 2Rx\vartheta) + mgl(1-\cos\varphi)$$

Equazioni di equilibrio non lineari

Le equazioni che descrivono il moto possono essere ricavate dalle espressioni dell’energia cinetica e di quella potenziale utilizzando il metodo di Lagrange:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial\theta} + \frac{\partial E_p}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl\cos\varphi\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl(sen\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi})$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L’equazione di equilibrio risultante è:

$$\left((M+m)R^2 + J\right)\ddot{\theta} + mRl(sen\varphi\dot{\varphi}^2 - \cos\varphi\ddot{\varphi}) + 4KR^2\theta - KRx = 0$$

<u>Seconda equazione:</u>

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \varphi} + \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} - mRl\cos\varphi\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} - mRl\cos\varphi\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \varphi} = mRlsen\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mglsen\varphi$$

L’equazione di equilibrio risultante è:

$$ml^2\ddot{\varphi} + mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} - mRl\cos\varphi\ddot{\theta} - mRlsen\varphi\dot{\varphi}\dot{\theta} + mglsen\varphi =$$
$$= ml^2\ddot{\varphi} - mRl\cos\varphi\ddot{\theta} + mglsen\varphi = 0$$

<u>Posizione di equilibrio</u>

Per linearizzare le equazioni occorre individuare una posizione di equilibrio stabile del sistema; tale posizione di equilibrio è verificabile imponendo le seguenti due eguaglianze (scritte nell’ipotesi che il vincolo mobile sia fermo alla coordinata x=0):

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2\theta$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = mglsen\varphi$$

Sicuramente la condizione di equilibrio è verificata per:

$$\theta = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3......$$
$$\varphi = 0 \pm n\pi \Rightarrow n = 0,1,2,3......$$

Per quanto riguarda la stabilità della condizione di equilibrio considerata, deve essere:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} > 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \vartheta \partial \varphi}\right|_{0,0}\right)^2 > 0$$

Le derivate necessarie sono:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2} = 4KR^2$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2} = mgl \cos \varphi$$

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi} = 0$$

da cui:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} = mgl$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0} = 0$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \vartheta^2}\right|_{0,0} \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} - \left(\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0} \right)^2 > 0$$

Si può quindi concludere che le tre relazioni di disuguaglianza sono tutte verificate per cui la condizione di equilibrio trovata è stabile e si può procedere alla linearizzazione.

Linearizzazione dell'energia potenziale

Il suo sviluppo può essere espresso nella seguente forma:

$$E_p = E_p(\alpha,\beta) \cong E_p\big|_{0,0} + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \alpha}\right|_{0,0} \alpha + \left.\frac{\partial E_p}{\partial \beta}\right|_{0,0} \beta + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha^2}\right|_{0,0} \frac{\alpha^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \beta^2}\right|_{0,0} \frac{\beta^2}{2} + \left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \alpha \partial \beta}\right|_{0,0} \alpha\beta$$

Dei termini in questione:

- il termine costante non interessa, in quanto viene eliminato dalla derivazione necessaria per la scrittura delle equazioni di Lagrange;
- i termini del primo ordine sono nulli, poiché il potenziale è stazionario nella configurazione di equilibrio (sono dunque nulle le sue derivate prime).

Rimangono dunque soltanto i termini di secondo ordine, per cui si ha:

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta^2}\right|_{0,0} = 4KR^2$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi^2}\right|_{0,0} = mgl$$

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta \partial \varphi}\right|_{0,0} = 0$$

da cui l'espressione dell'energia potenziale linearizzata:

$$E_p = \frac{1}{2}\left[4KR^2\right]\theta^2 + \frac{1}{2}\left[mgl\right]\varphi^2$$

Alla quale aggiungiamo ora il termine contenente la dipendenza dallo spostamento del vincolo, già lineare in partenza:

$$E_p = \frac{1}{2}4KR^2\theta^2 + \frac{1}{2}K(x^2 - 2Rx\vartheta) + \frac{1}{2}mgl\varphi^2$$

Linearizzazione dell'energia cinetica

Nell'esercizio proposto l'energia cinetica non necessita di linearizzazione. Ci limitiamo ad indicare il processo che sarebbe stato applicato in presenza di non linearità nella stessa.
Per ciò che riguarda l'energia cinetica, essa può essere espressa nella forma:

$$E_c = \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_1, q_2)\dot{q}_j \dot{q}_k$$

dunque la sua approssimazione ai fini della scrittura delle equazioni è data da:

$$E_c \cong \sum_{j,k=1}^{2} \frac{1}{2} a_{jk}(q_{10}, q_{20})\dot{q}_j \dot{q}_k$$

Nell'esercizio l'espressione dell'energia cinetica risulta è:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\cos\varphi\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

per cui l'energia cinetica linearizzata sarà data da:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mRl\dot{\theta}\dot{\varphi}$$

Equazioni linearizzate

Partendo dalle espressioni dell'energia cinetica e dell'energia potenziale linearizzati si ottiene:

Prima equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial E_C}{\partial \theta} + \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = (M+m)R^2\dot{\theta} + J\dot{\theta} - mRl\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}}\right) = (M+m)R^2\ddot{\theta} + J\ddot{\theta} + mRl\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 4KR^2\theta - KRx$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$\left((M+m)R^2+J\right)\ddot{\theta}+mRl\ddot{\varphi}+4KR^2\theta-KRx=0$$

Seconda equazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_C}{\partial\dot{\varphi}}\right)-\frac{\partial E_C}{\partial\varphi}+\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}-mRl\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial\dot{\varphi}}\right)=ml^2\ddot{\varphi}-mRl\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\varphi}=mgl\varphi$$

L'equazione di equilibrio risultante è:

$$ml^2\ddot{\varphi}-mRl\ddot{\theta}+mgl\varphi=0$$

In termini matriciali l'equazione può essere espressa come:

$$\begin{bmatrix}(M+m)R^2+J & mlR\\ mlR & ml^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\theta}\\ \ddot{\varphi}\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix}4KR^2 & 0\\ 0 & mgl\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\theta\\ \varphi\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}KRx\\ 0\end{Bmatrix}$$

Si noti che si perviene solo a due equazioni differenziali in quanto lo spostamento del vincolo è fornito in termini finiti dai dati del problema.

Frequenze proprie del sistema

Il sistema considerato si presenta libero non smorzato con entrambe le matrici di massa e rigidezza simmetriche e definite positive, per cui le soluzioni in questo caso sono puramente armoniche, cioè del tipo:

$$\{\mathrm{x}(\mathrm{t})\}=\{\mathrm{X}_0\}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\mathrm{t}}$$

sostituendo le soluzioni nel sistema si ha:

$$\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]\{X_0\}e^{i\omega_0 t}=\{0\}$$

Per avere soluzioni diverse dalla banale $\{X_0\}=\{0\}$, occorre che le ω_0 siano le radici di:

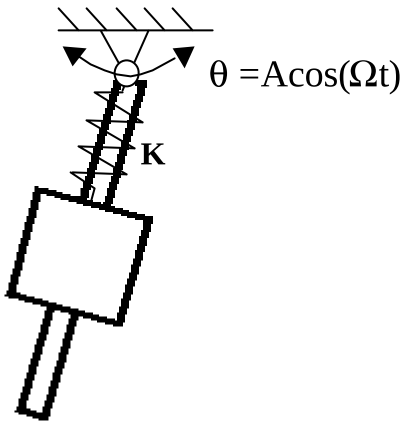
$$\det\left[-\omega_0^2[M]+[K]\right]=0$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami – Compitino dell'8 giugno 1998

Es. 1 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- Scrivere l'equazione differenziale che descrive le vibrazioni del sistema;
- Determinare la frequenze propria del sistema;
- Indicare come è possibile determinare la legge del moto del sistema non forzato e di quello forzato descrivendo e giustificando la differenza tra le due.

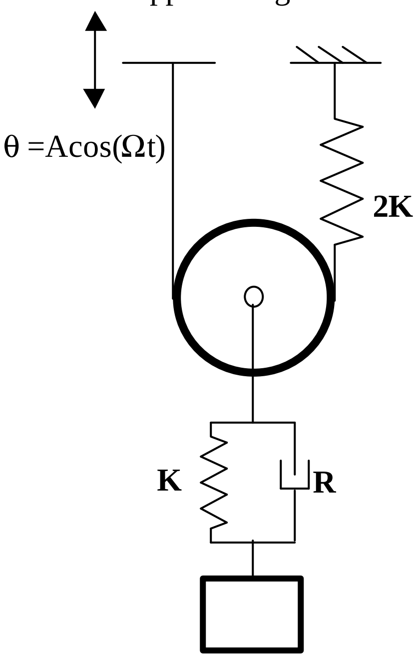
A tal fine si ritengano note: la massa e il momento di inerzia baricentrico della slitta e dell'asta (Ms, Js e Ma, Ja rispettivamente), la costante elastica della molla (K), la legge di oscillazione imposta all'asta ($\theta = A\cos(\Omega t)$ e la sua lunghezza (l).



Es. 2 - Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- Scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema;
- Determinare le frequenze proprie e i modi di vibrare del sistema non smorzato;
- Indicare come è possibile determinare la legge di moto del sistema smorzato;

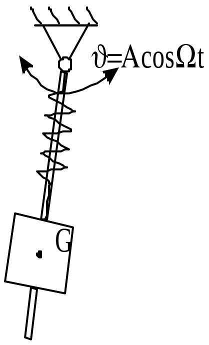
A tal fine si ritengano note: la massa e il momento di inerzia baricentrico del disco (M, J), la massa sospesa al complesso molla-smorzatore (m) e le caratteristiche delle molle e dello smorzatore come indicate nel disegno.



Es. 3 – Descrivere i principi di funzionamento del rotismo epicicloidale.

Compitino dell'8/6/98
Allievi Aeronautici
prof. A. Curami

Es. 1 -



Dati:
- asta - massa (m_a) (distribuita uniformemente)
  - momento di inerzia (J_a)
  - lunghezza asta (l)
- slitta - massa (M_s)
  - momento di inerzia (J_s)

Il problema è a 2 GdL, di uno è tuttavia nota la legge di moto.

Scrivo le equazioni supponendo che anche la coordinata θ sia libera, e quindi che il sistema sia a 2 g.d.l.:
Coordinate:
- θ oscillazione dell'asta
- x posizione del baricentro della slitta misurata a partire dalla posizione di molla indeformata.
  Nella risoluzione si useranno anche:
  $x_{mi} \rightarrow$ lunghezza della molla indeformata
  $x_0 \rightarrow$ posizione del baricentro della slitta misurata da x_{mi} all'equilibrio statico.

UTILIZZO IL METODO DI LAGRANGE

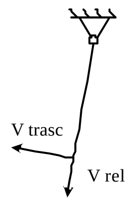
$E_c = E_{c\ asta} + E_{c\ slitta}$

$$E_{c\ asta} = \frac{1}{2}J_a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_a\left(\frac{L}{2}\dot{\theta}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(J_a + \frac{1}{4}M_a L^2\right)\dot{\theta}^2$$

$$E_{c\ slitta} = \frac{1}{2}M_s v_G^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}M_s\left((x_{mi} + x)^2\dot{\theta}^2 + \dot{x}^2\right) + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2$$

DOVE

$$v_G^2 = \underbrace{\left((x_{mi} + x)\dot{\theta}\right)^2}_{v_{trasc}} + \underbrace{\dot{x}^2}_{v_{rel}}$$

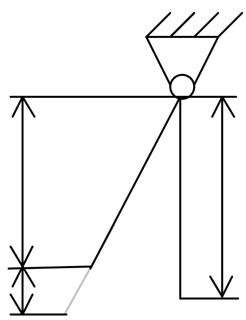


$E_p = E_{p\ asta} + E_{p\ slitta} + E_{p\ molla}$

$$E_{p\ asta} = mg\,\frac{L}{2}(1 - \cos\theta)$$

$$E_{p\ slitta} = -mgx\cos\theta + mgx_{mi}(1 - \cos\theta)$$

$$E_{p\ molla} = \frac{1}{2}Kx^2$$



Si osservi che l'espressione dell'energia potenziale della slitta, oltre che ad essere ricavata in base a considerazioni intuitive riferite al disegno riportato a lato, può essere ottenuta da semplici considerazioni geometriche.
Si immagini allo scopo di partire dalla condizione di equilibrio statico in cui la posizione della slitta è individuata da x_{mi} e quindi di dare un incremento ad entrambe le coordinate libere. La nuova coordinata della slitta, proiettata lungo la verticale, sarà data da $(x_{mi} + x)\cos\theta$.
Risulta ora facile calcolare l'energia potenziale della slitta che sarà data dalla differenza dei due valori indicati, moltiplicati per la forza mg.
Lo stesso problema può essere risolto con considerazioni energetiche per le quali è possibile fare riferimento al tema d'esame del 15 ottobre 1999.

$$E_c = \frac{1}{2}J_a\dot{\theta}^2 + \frac{1}{8}M_a l^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_s(x_{mi}+x)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}M_s\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_s\dot{\theta}^2$$

$$E_p = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta) - mgx\cos\theta + mgx_{mi}(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}Kx^2$$

Determino ora le equazioni del moto non forzato:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial\dot{\theta}} = J_a\dot{\theta} + \frac{1}{4}M_a l^2\dot{\theta} + M_s(x_{mi}+x)^2\dot{\theta} + J_s\dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial\dot{\theta}} = J_a\ddot{\theta} + \frac{1}{4}M_a l^2\ddot{\theta} + M_s(x_{mi}+x)^2\ddot{\theta} + 2M_s(x_{mi}+x)\dot{\theta}\dot{x} + J_s\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial\theta} = f$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial\theta} = mg\frac{l}{2}\sin\theta + mgx\sin\theta + mgx_{mi}\sin\theta$$

La prima equazione del moto libero è:

$$\Rightarrow\left(J_a + \frac{1}{4}M_a l^2 + M_s(x_{mi}+x) + J_s\right)\ddot{\theta} + \left(mg\frac{l}{2} + mgx + mgx_{mi}\right)\sin\theta = f$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial\dot{x}} = M_s\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial\dot{x}} = M_s\ddot{x}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = M_s(x_{mi}+x)\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -mg\cos\theta + Kx$$

La seconda equazione del moto libero è:

$$\Rightarrow M_s\ddot{x} + M_s(x_{mi}+x)\dot{\theta}^2 - mg\cos\theta + Kx = f$$

Calcolo la posizione di equilibrio statico:

$$\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = \left(mg\frac{l}{2} + mx + mgx_{mi}\right)\sin\theta = f$$

Il primo fattore è sicuramente positivo, in quanto il minimo valore che x può fisicamente assumere è $-x_{mi}$; quindi l'eguaglianza a f implica che:

$$\sin\theta_0 = f \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = n\pi \text{ dove } n = f, 1, 2, \ldots$$

Le posizioni di equilibrio stabile corrispondono ad un minimo dell'E_{pot} in base alla diseguaglianza:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2} = \cos\theta > f.$$

L'equilibrio statico sarà quindi in corrispondenza ad n = f, 2, 4, ...

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -mg\cos\theta + Kx = f$$

$$x_0 = \frac{mg\cos\theta_0}{K}$$

Nella posizione di equilibrio statico le due variabili assumono i valori:

$$\theta_0 = f$$
$$x_0 = \frac{mg\cos\theta_0}{K} = \frac{mg}{K}$$

posizione di equilibrio sempre stabile in quanto

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = K > 0.$$

Posso ora linearizzare il sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico calcolata; ciò significa ipotizzare piccoli spostamenti nell'intorno della posizione di equilibrio statico del sistema e sviluppare in serie di Taylor le forme energetiche non lineari, arrestandone il polinomio agli infinitesimi di secondo ordine.

$$E_{pot} = E_{pot}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}} + \frac{\partial}{\partial x}E_{pot}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(x - x_0) + \frac{\partial E_{pot}}{\partial\theta}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_{pot}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(x-x_0)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\theta^2}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(\theta-\theta_0)^2$$
$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x\partial\theta}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(x-x_0)(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta\partial x}\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}(\theta-\theta_0)(x-x_0)$$

$$E_{cin} = \frac{1}{2}a_1(x,\theta)\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}a_2(x,\theta)\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}a_3(x,\theta)\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}\dot{x}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}a_4(x,\theta)\Big|_{\substack{x=x_0\\ \theta=\theta_0}}\dot{\theta}\dot{x}$$

Linearizziamo i singoli termini dell'E_{pot}

$$\text{ASTA} \rightarrow E_p = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta)$$

$$E_p = mg\frac{l}{2}(1-\cos\theta_0) + mg\frac{l}{2}\sin\theta_0(\theta-\theta_0) + mg\frac{l}{4}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2 + ...$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$f \qquad\qquad f \qquad\qquad mg\frac{l}{4}\theta^2$$

$$E_{pot}\Big|_{\theta=\theta_0} \qquad \frac{\partial E_p}{\partial\theta}\Big|_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0) \qquad \frac{\partial^2 E_p}{\partial\theta^2}\Big|_{\theta=\theta_0}(\theta-\theta_0)$$

$$\text{SLITTA} \rightarrow E_p = -mgx\cos\theta + mgx_{mi}(1-\cos\theta)$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$*\,E_{p_1} \qquad\qquad **E_{p_2}$$

$$E_{p_1} = -mgx_0\cos\theta_0 - mg\cos\theta_0(x-x_0) + mgx_0\sin\theta_0(\theta-\theta_0) + //+\frac{1}{2}mgx_0\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2 =$$

$$= -mgx_0 - mg(x-x_0) + //+ //+\frac{1}{2}mgx_0\theta^2 =$$

$$= -mgx + \frac{1}{2}mgx_0\theta^2$$

$$E_{p_2} = mgx_{mi}(1-\cos\theta_0) + mgx_{mi}\sin\theta_0(\theta-\theta_0) + mgx_{mi}\frac{1}{2}\cos\theta_0(\theta-\theta_0)^2 =$$

$$= \qquad // \qquad // \qquad \frac{1}{2}mgx_{mi}\theta^2$$

per cui:

$$\text{SLITTA} \qquad E_p = -mgx + \frac{1}{2}mgx_0\theta^2 + \frac{1}{2}mgx_{mi}\theta^2$$

Globalmente l'energia potenziale approssimata nell'ipotesi di piccoli spostamenti sarà data da:

$$E_p = mg\frac{l}{4}\theta^2 + \frac{1}{2}Kx^2 - mgx + \frac{1}{2}mgx_0\theta^2 + \frac{1}{2}mgx_{mi}\theta^2$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx - mg = Kx'$$

$$(x = x_0 + x', \quad x = \frac{mg}{K} + x', \quad \dot{x} = \dot{x}', \quad \ddot{x} = \ddot{x}')$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial\theta} = mg\frac{l}{2}\theta + mgx_0\theta + mgx_{mi}\theta$$

Linearizzo nell'intorno della posizione di equilibrio l'unico termine non lineare dell'E_{cin}:

$$E_{cin} = \frac{1}{2}M_s(x_{mi} + x)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}M_s(x_{mi} + x_0)^2\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\theta} = J_a\dot\theta + \frac{1}{4}M_a l^2\dot\theta + M_s x_G^2\dot\theta + J_s\dot\theta \qquad x_G = x_{mi} + x_0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\theta} = J_a\ddot\theta + \frac{1}{4}M_a l^2\ddot\theta + M_s x_G^2\ddot\theta + J_s\ddot\theta$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \theta} = f$$

$$\Rightarrow \left(J_a + \frac{1}{4}M_a l^2 + M_s x_G + J_s\right)\ddot\theta + \left(mg\frac{l}{2} + mgx_G\right)\theta = f$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot x} = M_s\dot x$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot x} = M_s\ddot x$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial x} = f$$

$$\Rightarrow M_s\ddot x' + Kx' = f \qquad x' = x - x_0$$

In forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & J_a + \frac{1}{4}M_a l^2 + M_s x_G + J_s \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x \\ \ddot\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mg\frac{l}{2} + mgx_G \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta\end{bmatrix} = f$$

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 \\ 0 & J^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot x \\ \ddot\theta\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & k^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta\end{bmatrix} = f$$

$$[M][\ddot Z] + [K][Z] = 0$$

Annullo il determinante di:

$$\left[M\omega^2 - K\right]$$

$$\begin{vmatrix} M_s\omega^2 - K & 0 \\ 0 & J^*\omega^2 - K^* \end{vmatrix} =$$

$$= M_s J^*\omega^4 - M_s k^*\omega^2 - JK\omega^2 + Kk^* = M_s J^*\omega^4 - \left(M_s k^* + J^*K\right)\omega^2 + Kk^* = f$$

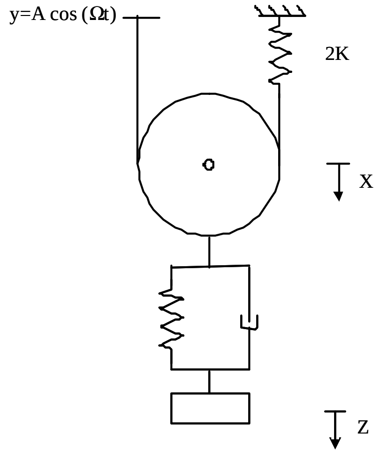
$$\omega_{1,2}^2 = \frac{M_s k^* + J^*K \pm \sqrt{\left(M_s k^* + J^*k\right)^2 - 4M_s J^* K k^*}}{2M_s J^*}$$

Le matrici [M] e [K] sono entrambe definite positive per cui l'integrale generale

$[Z] = [\overline{Z}]e^{\lambda t}$ diventa $[Z] = [\overline{Z}]e^{i\omega t}$.

ES. 2

Dati:
• disco M, J
• massa m



Le tre coordinate che scegliamo di utilizzare sono tutte assolute, a partire dalla posizione di equilibrio statico del sistema; osservando che gli spostamenti dei baricentri sono lineari nelle coordinate libere del sistema, questa scelta consente di non considerare il contributo del peso nella scrittura dell'energia potenziale del sistema.

$\rightarrow y$ spostamento verticale del vincolo
$\rightarrow x$ spostamento verticale del baricentro del disco
$\rightarrow z$ spostamento verticale del baricentro della massa m

Convenzioni
$\downarrow +$ spostamenti, velocità, accelerazioni, forze

$\curvearrowright +$ rotazioni, velocità, accelerazioni angolari, coppie

Utilizzo il metodo di Lagrange

$$E_c = E_{c\ disco} + E_{c\ massa} = E_{c\ disco\ trasl} + E_{c\ disco\ rot} + E_{c\ massa\ trasl} = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

Dove:
$$\left[\theta = \frac{x}{R} - \frac{y}{R} \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{R} - \frac{\dot{y}}{R}\right]$$

Calcoliamo l'energia potenziale:
$$E_p = E_{pot\ molla\ inf.} + E_{pot\ molla\ sup.} = \frac{1}{2}K_1\Delta l_1^2 + \frac{1}{2}K_2\Delta l_2^2 = \frac{1}{2}K(z-x)^2 + \frac{1}{2}(2K)(2x-y)^2$$

Dove:
$$\left[\Delta l_1 = z - x \qquad \Delta l_2 = 2x - y\right]$$

Ora determiniamo le equazioni del moto:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{J}{R^2}(\dot{x}-\dot{y})^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\frac{J}{R}\dot{y} + \frac{1}{2}m\dot{z}^2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\dot{x} + \frac{J}{R^2}(\dot{x} - \dot{y})$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = M\ddot{x} + \frac{J}{R^2}(\ddot{x} - \ddot{y})$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z}$$

$$E_p = \frac{1}{2}K(z - x)^2 + \frac{1}{2}(2K)(2x - y)^2 =$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = -K(z - x) + 4K(2x - y) = -Kz + Kx + 8Kx - 4Ky = 9Kx - Kz - 4Ky$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial z} = K(z - x)$$

Le equazioni differenziali sono:

$$\left(M + \frac{J}{R^2}\right)\ddot{x}^2 + 9Kx - Kz = \frac{J}{R^2}\ddot{y} + 4Ky$$

$$m\ddot{z} + K(z - x) = f$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M + \frac{J}{R^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 9K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ -\Omega^2 \frac{J}{R^2} + 4K \end{bmatrix} A\cos(\Omega t)$$

Le frequenze proprie e i modi di vibrare si ricavano banalmente come autovalori ed autovettori del sistema libero (cioè del sistema di equazioni omogeneo associato). Volendo considerare il contributo dello smorzamento, occorre introdurre la funzione dissipativa, data da:

$$D = \frac{1}{2}r\Delta\dot{l}_1^2 = \frac{1}{2}r(\dot{z} - \dot{x})^2$$

da cui:

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = -r(\dot{z} - \dot{x})$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{z}} = r(\dot{z} - \dot{x})$$

L'equazione matriciale completa sarà:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & M + \frac{J}{R^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r & -r \\ -r & r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 9K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ -\Omega^2 \frac{J}{R^2} + 4K \end{bmatrix} A\cos\Omega t$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali

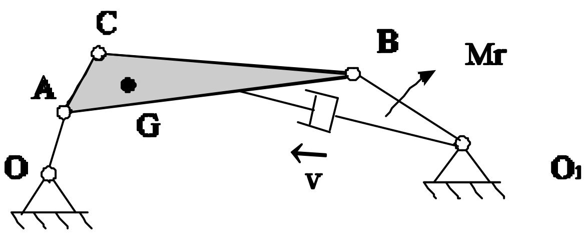
prof. A. Curami - Appello del 17/6/98

1, Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione dell'asta O_1B
- la forza necessaria applicata nel cilindro
- le reazioni in O_1

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

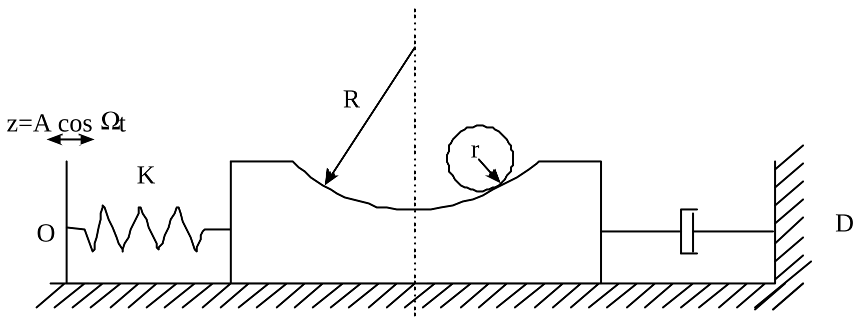
- il sistema operi in un piano verticale
- la geometria sia completamente nota
- la velocità **v** del pistone rispetto al cilindro sia costante così come la velocità angolare dell'asta O_1C
- la massa m dell'elemento ABC è concentrata in G e J_G sia il momento d'inerzia
- gli attriti siano trascurabili
- la coppia resistente M_r applicata sull'asta O_1B



2, Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

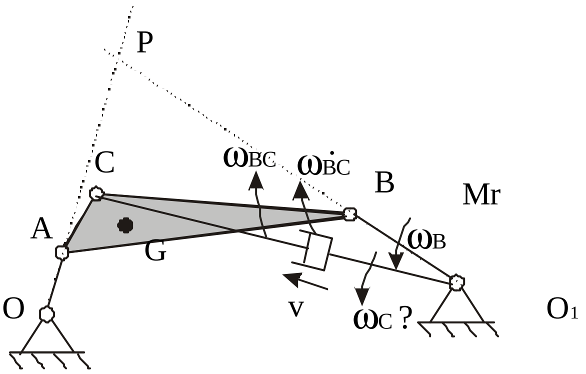
- scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema
- determinare le frequenze proprie del sistema
- calcolare la reazione in D

A tale fine si ritengono note: la massa M del carrello, la massa m e il momento d'inerzia J del disco, le costanti della molla K e dello smorzatore c. Si trascuri l'attrito tra slitta e piano.



3, Descrivere analiticamente il funzionamento di un rotismo ad epicicloidale con riferimento al differenziale di un autoveicolo.

ESERCIZIO DEL 17/6/98
ALLIEVI AERONAUTICI
PROF. A. CURAMI
ES. 1



DATI:
- V del cilindro piatore
- ω Del cilindro = ?
- $\dot{\omega}$ del cilindro = ∅

ANALISI DEL SISTEMA

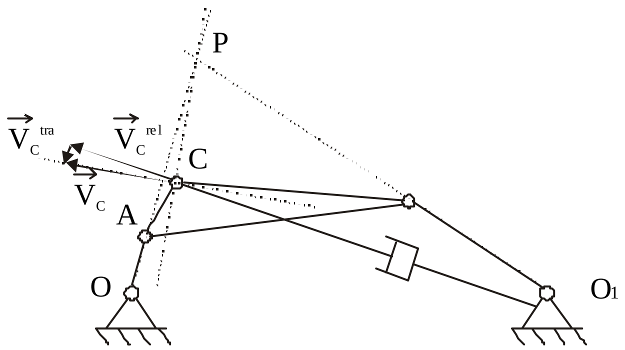
Punto	Traiettoria	Velocità ass.	Accel. ass.
O	Punto a terra	-	-
A	Circonferenza attorno ad O	?	?
C	?	?	?
B	Circonferenza attorno O_1	?	?
G	?	?	?
O_1	Punto a terra	-	-

Determino la velocità assoluta del punto C scomponendola nelle componenti di trascinamento e relative rispetto ad una terna mobile rotante attorno all'origine centrata in O_1 e solidale con l'asta O_1C.
Ne risulta:

$\mathbf{V_C}$	=	$\mathbf{V_{C\ Tras.}}$	+	$\mathbf{V_{rel.}}$
$\omega_{ACB}(=?)\overline{PC}$		$\omega_{0_1C}(=?)\overline{O_1C}$		V
$\perp PC$		$\perp O_1C$		$//O_1C$

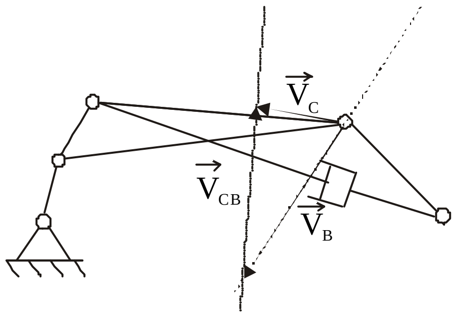
Si noti che la direzione della velocità assoluta del punto C è stata stabilita utilizzando il metodo del centro di istantanea rotazione. Infatti ACB è un corpo rigido, il cui c.i.r. (P) può essere determinato tracciando le normali alle traiettorie di due punti appartenenti allo stesso corpo rigido; nell'esercizio si sono utilizzate le traiettorie assolute dei punti A e B, entrambe note.

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{a_{CBG}}{BC}$$



Per il calcolo della velocità assoluta di B utilizzo una terna traslante di moto circolare attorno ad O_1 con l'origine solidale a B:

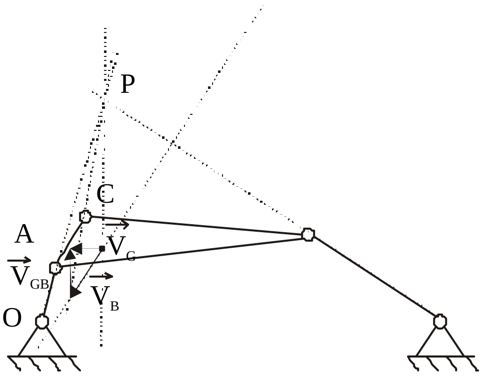
	$\mathbf{V_C}$	=	$\mathbf{V_B}$	+	$\mathbf{V_{CB}}$
modulo	V_C		$\omega_B (= ?)\overline{O_1B}$		$\omega_{BC} (= ?)\overline{BC}$
direzione	$\perp PC$		$\perp O_1B$		$\perp BC$



Utilizzando la stessa terna precedente introdotta determino la velocità assoluta di G:

	$\mathbf{V_G}$	=	$\mathbf{V_B}$	+	$\mathbf{V_{GB}}$
modulo	?		V_B		$\omega_{BC} \cdot \overline{GB}$
direzione	?		$\perp O_1B$		$\perp GB$

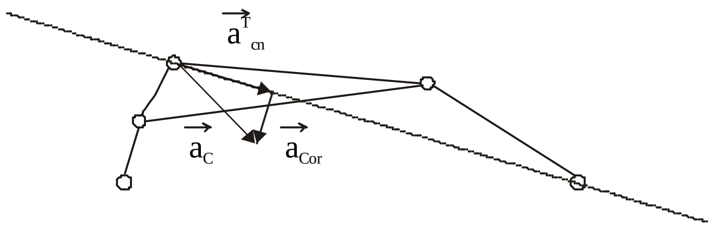
Osserviamo che, in alternativa al metodo dei metodi dei moti relativi, era possibile calcolare le velocità assolute di B e C direttamente, ricordando che P è il centro di istantanea rotazione del corpo rigido ACB, la cui velocità angolare ω_{BC} è nota.



Per il calcolo dell'accelerazione di C, conviene considerare una terna rotante con origine in O_1 solidale con l'attuatore O_1C:

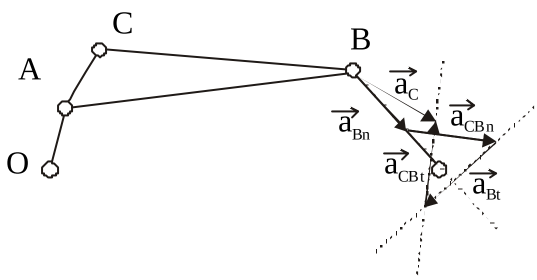
	$\mathbf{a_C}$	=	$\mathbf{a^T_{ct}}$	+	$\mathbf{a^T_{cn}}$	+	$\mathbf{a^{Rel}_c}$	+	$\mathbf{a_{cor}}$
modulo	?		0		$\omega^2_{O_1C}\,\overline{O_1C}$		0		$2\omega_{O_1C} \cdot V_{rel}$
direzione	?		-		$// O_1C$		-		$\perp V_{rel}$

Osserviamo che la a^T_{ct} è nulla in quanto la velocità angolare ω_{O_1C} è per ipotesi costante, quindi $\dot{\omega}_{O1C} = 0$. Tutto ciò deriva dai dati del problema; in realtà si richiama l'attenzione sul fatto che il meccanismo proposto presenta un solo grado di libertà, dunque, assegnata la velocità di allungamento dell'attuatore, tutta la cinematica del problema risulta determinata. L'ulteriore dato $\dot{\omega}_{O1C} = 0$ (che semplifica di molto il problema) è compatibile con la cinematica del meccanismo soltanto in un istante ben preciso: in generale, infatti, nel moto in grande del meccanismo l'accelerazione angolare dell'attuatore non è nulla



Per il calcolo dell'accelerazione assoluta di B utilizzo una terna traslante di moto circolare attorno ad O_1 con origine solidale a B.

	$\mathbf{a_C}$	=	$\mathbf{a_{Bn}}$	+	$\mathbf{a_{Bt}}$	+	$\mathbf{a_{CBn}}$	+	$\mathbf{a_{CBt}}$
modulo	a_C		$\omega_B^2\overline{O_1B}$		$\dot{\omega}_B(=?)\overline{O_1B}$		$\omega_{BC}^2\overline{BC}$		$\dot{\omega}_{BC}(=?)\overline{BC}$
direzione	nota		$//O_1B$		$\perp O_1B$		$//BC$		$\perp BC$



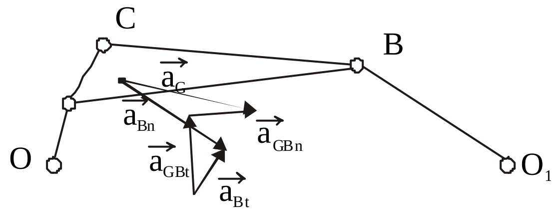
Per cui:

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{a_{CBt}}{BC}$$

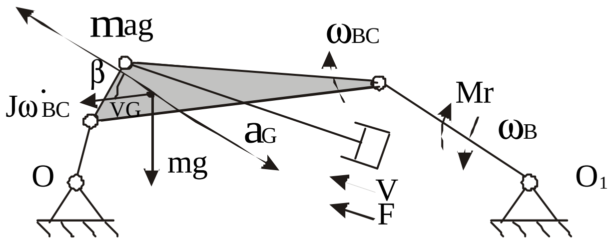
Utilizzando la stessa terna precedente introdotta determino le accelerazioni assolute di G:

	$\mathbf{a_G}$	=	$\mathbf{a_{Bn}}$	$\mathbf{a_{Bt}}$	+	$\mathbf{a_{GBn}}$	$\mathbf{a_{GBt}}$
modulo	?		a_{Bn}	a_{Bt}		$\omega_{BC}^2\overline{GB}$	$\dot{\omega}_{BC}\overline{GB}$
direzione	?		$//O_1B$	$\perp O_1B$		$//GB$	$\perp GB$

$$\dot{\omega}_{BC} = \frac{a_{cbt}}{BC}$$



Determinazione della forza applicata nel cilindro:



Utilizzo un bilancio di potenze non essendoci per ipotesi degli attriti dissipativi nel sistema:

$$W_m - W_R + W_i = 0$$

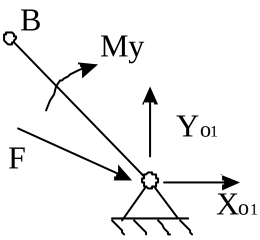
$$W_m = F \cdot V$$

$$W_r = -\overline{M}_r \times \overline{\omega}_B - \overline{V}_G \times m\overline{g}$$

$$W_i = -\frac{dE_c}{dt} = -J\dot{\overline{\omega}}_{BC} \times \overline{\omega}_{BC} - m\overline{a}_G \times \overline{V}_G$$

Sommando e risolvendo rispetto ad F, si ottiene:

$$\Rightarrow F = \frac{1}{V}\left(\overline{M}_r\overline{\omega}_B + \overline{V}_G \times m\overline{g} - J\dot{\overline{\omega}}_{BC} \cdot \overline{\omega}_{BC} - m\overline{a}_{G\,t} \cdot \overline{V}_G\right)$$



Determinazione delle reazioni in O_1:

$$\sum M_0^{sistema} = 0 \qquad \overline{OG} \wedge m(\overline{g} - \overline{a}_G) - J\dot{\overline{\omega}}_{BC} + \overline{M}_r + \overline{OO_1} \wedge (\overline{Y}_{O_1} + \overline{X}_{O_1}) = 0$$

$$\sum M_0^{O_1B} = 0 \qquad \overline{BO_1} \wedge (\overline{F} + \overline{X}_{O_1} + \overline{Y}_{O_1}) + \overline{M}_r = 0$$

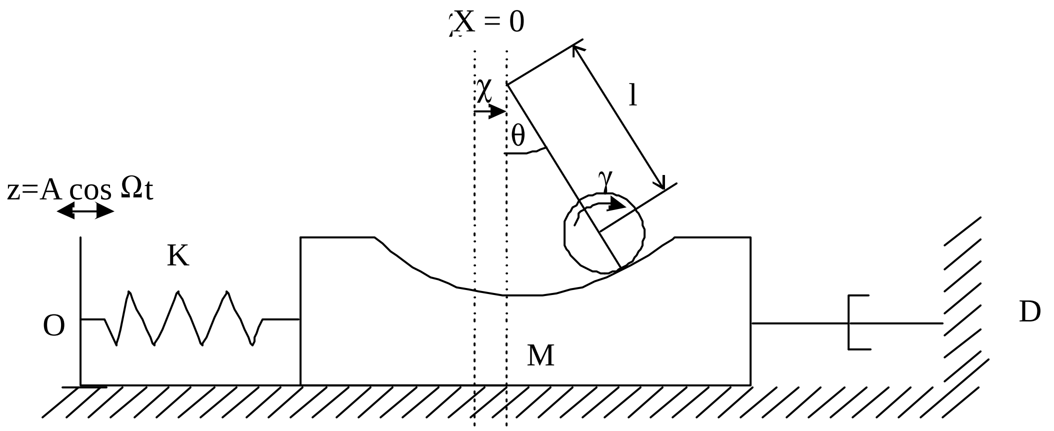
Si tratta di un sistema di due equazioni in due incognite, che può quindi essere risolto.

Esercizio del 17/6/98

Allievi Aeronautici

prof. A. Curami

Es. 2



Dati:
- Carrello M. R.
- Disco m.J, r

l= R-r

$$\varphi = \frac{R-r}{r}\theta$$

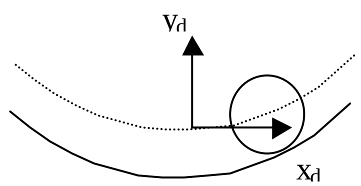
Il problema si presenta a tre gradi di libertà:
Le coordinate:
x = spostamento assoluto del carrello misurata in condizioni statiche a partire dalla condizione di carrello indeformato.
θ = rotazione del centro del disco rispetto a P
z = spostamento del vincolo.

L’energia cinetica:

$$E_c = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left(\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2\right)m + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$x_d = x + l\sin\theta \qquad \dot{x}_d = \dot{x} + l\cos\theta \cdot \dot{\theta}$$

$$y_d = l(1 - \cos\theta) \qquad \dot{y}_d = l\sin\theta \cdot \dot{\theta}$$



$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + lm\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}\left(ml^2 + J\left(\frac{R-r}{r}\right)^2\right)\dot{\theta}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + lm\dot{x}\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}J'\dot{\theta}^2$$

L’energia potenziale:

$$E_p = \frac{1}{2}K(x-z)^2 + mgl(1-\cos\theta)$$

e per lo smorzatore:

$$D = \frac{1}{2}c\dot{x}^2$$

Determino ora le equazioni del moto non forzato (z = 0).

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + lm\left(-\theta^2\sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = Kx$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + lm\left(-\theta^2\sin\theta + \ddot{\theta}\cos\theta\right) + c\dot{x} + Kx = 0$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}} = lm\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) + J'\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = -\dot{x}\dot{\theta}\, lm\,\sin\theta; \quad \frac{\partial D}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\,\sin\theta$$

$$\Rightarrow lm\left(\ddot{x}\cos\theta - \dot{x}\dot{\theta}\sin\theta\right) + J'\ddot{\theta} + \dot{x}\dot{\theta}\, lm\,\sin\theta + mgl\cdot\sin\theta = 0$$

Calcolo della posizione di equilibrio statico

* $\dfrac{\partial E_p}{\partial x} = Kx = 0 \Rightarrow x = 0; \quad \dfrac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} = K > 0 \rightarrow$stabile.

* $\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\,\sin\theta = 0; \quad mgl \neq 0,$

allora: $\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi$ dove $n = 0, 1, 2, \ldots$

con equilibrio stabile per n = 0, 2, 4, ... $\dfrac{\partial E_p}{\partial \theta^2} > 0$; nella posizione di equilibrio statico le due variabili assumono i valori

$$\theta_0 = 0; \quad x_0 = 0.$$

Linearizzazione del sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico calcolata:

$$E_p = E_p\Big|_{q=q_0} + \frac{\partial E_p}{\partial q}\bigg|_{q=q_0}(q-q_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial q^2}\bigg|_{q=q_0}(q-q_0)^2 + \ldots$$

$$E_c = \frac{1}{2} a(q)\dot{q}^2; \quad a(q) = a(q)\big|_{q=q_0} + \dots \,.$$

Linearizzazione dell'E_p .

$$E_p = \frac{1}{2}K(x-z)^2 + mgl(1-\cos\theta_0) + mgl\sin\theta_0(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}mgl\cos\theta_0(\theta-\theta_0) =$$

$$= \frac{1}{2}K(x-z)^2 + \frac{1}{2}mgl\,\theta^2 .$$

Linearizzazione dell'E_c (solo per il termine non lineare).

$$E_c^* = \dot{x}\dot{\theta}lm\cos\theta_0$$

$$= \dot{x}\dot{\theta}lm$$

Allora:

$$E_c = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\theta}lm + \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 \;;$$

Applicazione della formula di Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{x}} = (M+m)\ddot{x} + \ddot{\theta}lm$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = c\dot{x}$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} = (x-z)\cdot K$$

$$\Rightarrow (M+m)\ddot{x} + lm\ddot{\theta} + c\dot{x} + Kx = Kz$$

$$\frac{d}{dE}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}} = lm\ddot{x} + \left(ml^2\ddot{q} + J^*\right)\ddot{q}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta} = 0; \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = 0$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = mgl\,\theta$$

$$\Rightarrow lm\,\ddot{x} + \left(ml^2 + J^*\right)\ddot{\theta} + mgl\,\theta = 0$$

Le equazioni differenziali:

$$\begin{bmatrix} M+m & lm \\ lm & ml^2 + J^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K\cdot z \\ 0 \end{bmatrix}$$

oppure

$$[M][\ddot{x}] + [c][\dot{x}] + [K][x] = [F]$$

Si tratta di un sistema lineare di due equazioni nelle due incognite x(t) e θ(t). La generica soluzione sarà la somma dell'integrale generale $[Z_0]\ e^{\lambda t}$ (con $[Z_0]$ determinabile in base alle condizioni

iniziali; $\lambda = -\alpha + i\omega$, con ω frequenza propria del sistema smorzato e $\alpha > 0$ smorzamento del sistema) e dell'integrale particolare che sarà del tipo $[Z_p]\, e^{i\Omega t}$, con Ω pulsazione della forzante.
Le frequenze proprie del sistema non smorzato si trovano considerando il sistema libero ([F]=0) e ponendo nullo lo smorzamento ([c]=0); in tal caso la soluzione sarà armonica pura, cioè del tipo $[Z_0]\, e^{i\omega t}$; sostituendo, per avere soluzioni non banali, deve essere:

$$\left|\left([K]-\omega^2[M]\right)\right| = 0\,.$$

Sviluppando abbiamo ω_1^2, ω_2^2 . $\pm\,\omega_1, \pm\,\omega_2$ sono frequenze proprie. Con $x = x_1 e^{\lambda t}$ e $\theta = x_2 e^{\lambda t}$ si ha

$$\left(\lambda^2[M]+\lambda[C]+[K]\right)\begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix} = 0$$

in cui λ_i sono numeri reali o complessi che corrispondono alle frequenze proprie del sistema smorzato.

Adesso consideriamo il sistema forzato smorzato. Come già detto, l'integrale generale, dipendente dalle condizioni iniziali, segue una legge sinusoidale smorzata da un'esponenziale negativa; il suo contributo tende quindi a 0 per t tendente all'infinito. Si può quindi dire che, a regime, il moto del sistema è indipendente dalle condizioni iniziali, e dipende dalla sola forzante; la soluzione a regime è cioè del tipo $[Z_p]\, e^{i\Omega t}$, con Ω pulsazione della forzante. Si ha:

$$\begin{bmatrix} K-(M+m)\Omega^2+i\Omega c & -lm\Omega^2 \\ -lm\Omega^2 & mgl-(ml^2+J^*)\Omega^2 \end{bmatrix}[Z_p] = \begin{bmatrix} KA \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$[Z_p] = [A(\Omega)]^{-1}\,[F_0]$$

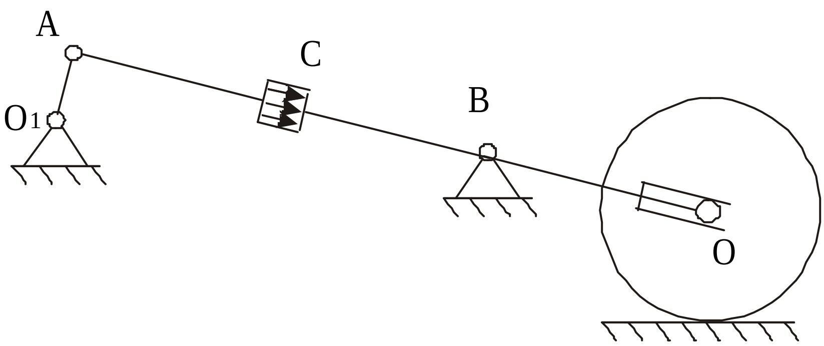
Osserviamo che la matrice A, in presenza di smorzamento, non è mai singolare, dunque sempre invertibile, per ogni valore di Ω. Nota a questo punto la legge [Z(t)], si ha anche $x = x_0\, e^{i\Omega t}$, da cui:

$$R_D = c\,\dot{x} = c\, x_0\, i\, e^{i\Omega t}$$

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami - Appello del 1 luglio 1998

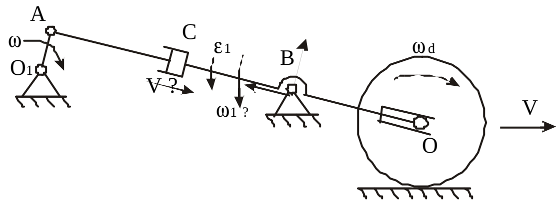
Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:
- la velocità e l'accelerazione assolute del centro del disco
- la forza agente sul pistone
- le reazioni nel punto B

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:
a) la manovella OA ruoti in verso orario con velocità angolare ω nota e costante;
b) il sistema operi in un piano verticale;
c) la geometria sia completamente nota;
d) il disco abbia massa M_d, momento di inerzia baricentrico J_d e le masse distribuite in modo uniforme;
e) tutti gli elementi ad esclusione del disco abbiano massa trascurabile;
f) gli attriti siano trascurabili.



Meccanica Applicata alle Macchine 01/07/98
prof. A. Curami

Es. 1
DATI:
- ω - costante
- le aste (compreso il cilindro) senza masse, il disco rotola senza strisciare
- il disco ha massa M_d e momento baricentrico J_d.



Analisi del sistema

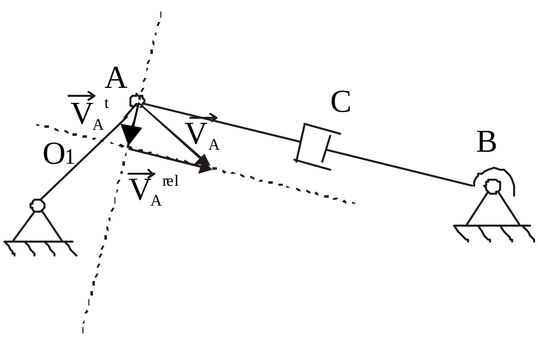
Punto del sistema	**Traiettoria assoluta**	**Velocità assoluta**	**Accelerazione assoluta**
O_1	Punto a terra	Nulla	Nulla
A	Circonferenza centrata in O_1	$\vec{\omega}\Lambda \dot{O_1A}$	$\omega^2 \cdot \overline{O_1A}\,\vec{n}$
B	Punto a terra	Nulla	Nulla
C	?	?	?
O	Parallelo al a terreno	?	?

La velocità e l'accelerazione del disco si ricavano propagando la legge del moto assoluto di A (nota) fino ad O tenendo nel debito conto i vincoli cinematici del sistema.
Procedendo a ritroso nella risoluzione del problema si può dire che:
- la velocità e l'accelerazione angolare del disco sono ricavabili nota che sia la cinematica assoluta di O;
- tale cinematica è ricavabile dalla velocità e dall'accelerazione angolare dell'asta BC imponendo ad O una traiettoria orizzontale;
- la velocità e l'accelerazione angolare dell'asta BC sono ricavabili dalla cinematica di A (nota) imponendo la rotazione dell'asta attorno a B.

Calcolo delle velocità

Con una terna rotante solidale con BC con origine in B, ricavo la velocità angolare dell'asta CB:

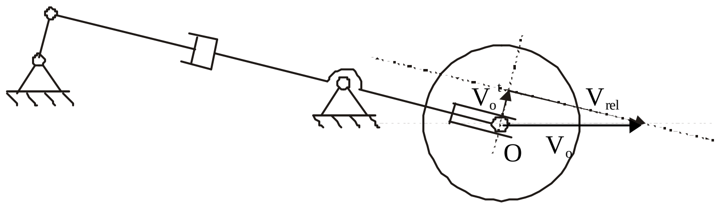
	V_A	=	V_{Atrasc}	+	V_{Arel}
	ωO_1A		?		?
D	$\perp O_1A$		$\perp AB$		$//AB$



$$\omega_B = \frac{V_{Atrasc}}{\overline{AB}}\ ;\ \text{antiorario}$$

Con la stessa terna troviamo V_0 e ω_d

	V_0	=	V_{0trasc}	+	V_{0rel}
M	?		$OB \cdot \omega_B$		?
D	ORIZ.		$\perp OB$		//OB

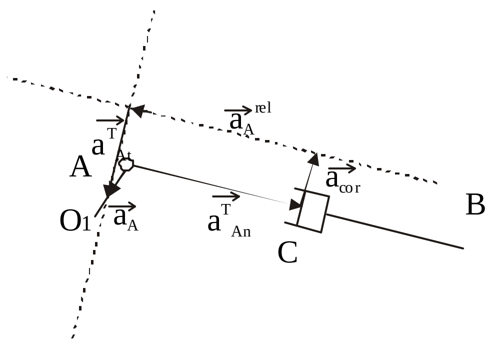


$$\omega_d = \frac{V_0}{R}$$

Calcolo delle accelerazioni

Utilizzando la stessa terna precedentemente introdotta posso esprimere l'accelerazione assoluta di A come:

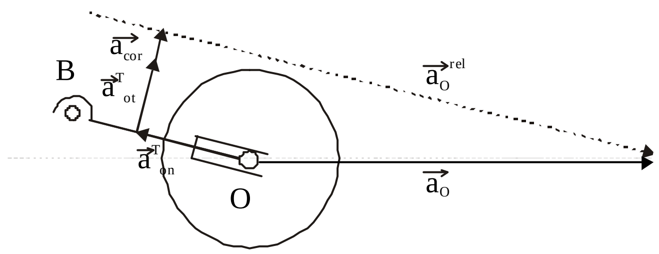
	a_{ass}	=	$A_{n\ trasc}$	+	$A_{t\ trasc}$	+	A_{rel}	+	a_{cor}
M	$\omega^2 O_1 A$		$\omega_B^2 AB$		?		?		$2\omega_B V_{rel}$
D	$//0_1 A$		//AB		$\perp AB$		//AB		$\perp \vec{\omega}_B \Lambda \vec{V}_A^{rel}$



$$\dot{\omega}_B = \frac{a^T_{At}}{AB}$$

Con la stessa terna ricavo le accelerazioni a carico di O:

	a_{ass} =	$a_{n\,trasc}$	$A_{t\,trasc}$	a_{rel}	A_{cor}
M	?	$\omega_B^2\,\overline{0B}$	$\dot{\omega}_B \cdot \overline{0B}$	?	$2\omega_1 V'$
D	ORIZ.	//0B	$\perp$OB	//OB	$\perp$V oppure in DIR. $(\overline{\omega}_1 \wedge ?)$



$$\dot{\omega}_d = \frac{a_0}{R}$$

Determiniamo la forza F.

Non essendoci per ipotesi nel sistema attriti dissipativi è possibile utilizzare il teorema delle potenze:

$$W_m - W_r - W_p = dE_{cin}/dt$$

Essendo nulli gli attriti nel sistema, ad eccezione di quello volvente, comunque modellabile, si avrà:

$$W_m - W_r = dE_{cin}/dt$$

Determiniamo il valore assunto dai singoli termini:

$$w_m = F \cdot V_A^{Rel}$$

$$w_r = -f_v \cdot N \cdot V_0 \quad \text{(N si ricaverà tramite eq. din.)}$$

$$\frac{dE_{cin}}{dt} = -w_i = m\vec{a}_o \times \vec{v}_o + J_d \dot{\vec{w}}_{disco} \times \vec{w}_{disco}$$

$$F = \frac{1}{V_A^{Rel}}\left(f_v \cdot N \cdot V_0 + m a_0 v_0 + J_d \dot{w}_{disco} w_{disco} \right)$$

Le reazioni in B

$$\equiv M_{A}^{A0} = 0$$

$$\overline{AB} \wedge R_c + \overline{AB} \wedge R_y + \overline{A0} \wedge T = 0;$$

$$\equiv M_{0_1}^{0,A0} = 0$$

$$\overline{0_1 B} \wedge R_y + \overline{0_1 0} \wedge T = 0;$$

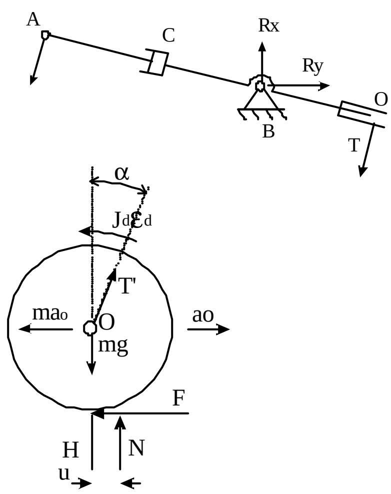
$$\equiv M_{H}^{DISCO} = 0$$

$$\overline{H0} \wedge T' - ma_0 \cdot R - J_{a\varepsilon d} - N \cdot u = 0$$

$$\equiv Y^{DISCO} = 0$$

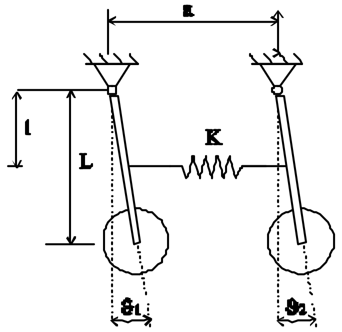
$$T' \cos\alpha + N - mg = 0;$$

$R_x, R_y\ T, N$ sono incognite.



Tema d'esame del 01/07/98
Allievi Aeronautici
prof. A. Curami

Es. Vibrazioni



DATI:
asta 1 e 2: m_a, J_a, massa omogenea
disco 1 e 2: m_d, J_d, massa omogenea
lunghezza asta L
distanza tra le cerniere a
$L = 2l$
lunghezza molla indeformata a

Il sistema è a due gradi di libertà.
Assumo come coordinate

$\theta_1 \rightarrow$ oscillazione asta 1, positiva in verso antiorario, nulla con pendolo verticale
$\theta_2 \rightarrow$ oscillazione asta 2, positiva in verso antiorario, nulla con pendolo verticale

Utilizzo il metodo di Lagrange:

$$\mathbf{E_c = E_{c\ asta\ 1} + E_{c\ disco\ 1} + E_{c\ asta\ 2} + E_{c\ disco\ 2}}$$

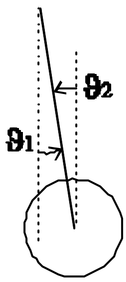
$$E_{c\ asta\ 1} = \frac{1}{2} m_a v_{G_1}^2 + \frac{1}{2} J_a \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2} m_a l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_a \dot{\theta}_1^2 = \frac{1}{2}\left(m_a l^2 + J_a\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$E_{c\ asta\ 2} = \frac{1}{2}\left(m_a l^2 + J_a\right)\dot{\theta}_2^2$$

Ponendo

$$J'_a = m_a l^2 + J_a$$

si ha:



$$E_{cin\ asta\ 1} = \frac{1}{2} J'_a\ \dot{\theta}_1^2$$

$$E_{cin\ asta\ 2} = \frac{1}{2} J'_a\ \dot{\theta}_2^2$$

$$E_{c\ disco\ 1} = E_{c\ trasl} + E_{c\ rot} =$$

$$\frac{1}{2} m_d \left(2l\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2} J_d \dot{\theta}_1^2 = 2m_d l^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_d \dot{\theta}_1^2 = \left(2m_d l^2 + \frac{1}{2} J_d\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$E_{c\ disco\ 2} = E_{c\ trasl} + E_{c\ rot} = \left(2m_d l^2 + \frac{1}{2} J_d\right)\dot{\theta}_2^2$$

Ponendo

$$J'_d = 4m_d l^2 + J_d$$

si ha:

$$E_{c\ disco\ 1} = \frac{1}{2} J'_d\ \dot{\theta}_1^2$$

$$E_{c\ disco\ 2} = \frac{1}{2} J'_d\ \dot{\theta}_2^2$$

In totale

$$\frac{1}{2} J'_a\ \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J'_a\ \dot{\theta}_2^2 + \frac{1}{2} J'_d\ \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J'_d\ \dot{\theta}_2^2 = \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J^* \dot{\theta}_2^2$$

dove:

$$J^* = J'_a + J'_d = m_a l^2 + J_a + 4 m_d l^2 + J_d$$

$$\mathbf{E_p = E_{p\ asta\ 1} + E_{p\ disco\ 1} + E_{p\ asta\ 2} + E_{c\ disco\ 2} + E_{p\ molla}}$$

$$E_{p\ asta\ 1} = m_a g l (1 - \cos\theta_1)$$
$$E_{p\ disco\ 1} = 2 m_d g l (1 - \cos\theta_1)$$
$$E_{p\ asta\ 2} = m_a g l (1 - \cos\theta_2)$$
$$E_{p\ disco\ 2} = 2 m_d g l (1 - \cos\theta_2)$$
$$E_{p\ molla} = \frac{1}{2} K \Delta l_{molla} = \frac{1}{2} K l^2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)^2$$

La relazione sopra introdotta vale nell'ipotesi di trascurare le deformazioni della molla dovute alla componente di spostamento normale al suo asse.
Le equazioni differenziali che descrivono il moto del sistema saranno:

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} = J^* \dot{\theta}_1 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} = J^* \ddot{\theta}_1$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_2} = J^* \dot{\theta}_2 \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\theta}_1} = J^* \ddot{\theta}_2$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta_1} = f$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial \theta_2} = f$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = m_a g\, l \sin\theta_1 + 2 m_d g\, l \sin\theta_1 + K l^2 \cos\theta_1 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = m_a g\, l \sin\theta_2 + 2 m_d g\, l \sin\theta_2 + K l^2 \cos\theta_2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2)$$

Le equazioni differenziali risultanti saranno:

$$\begin{cases} J^* \ddot{\theta}_1 + m_a g\, l \sin\theta_1 + 2 m_d g\, l \sin\theta_1 + K l^2 \cos\theta_1 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = f \\ J^* \ddot{\theta}_2 + m_a g\, l \sin\theta_2 + 2 m_d g\, l \sin\theta_2 + K l^2 \cos\theta_1 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = f \end{cases}$$

Per potere linearizzare il sistema nell'intorno della posizione di equilibrio statico la devo determinare:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial \theta_1} = f \\ \qquad\qquad \Rightarrow \\ \dfrac{\partial E_p}{\partial \theta_2} = f \end{cases} \qquad \begin{matrix} \theta_{1_e} = f,\ 2\pi, 4\pi \ldots \\ \\ \theta_{2_e} = f,\ 2\pi, 4\pi \ldots \end{matrix}$$

Si noti che le coppie di soluzioni:

$$\begin{cases} \theta_1 = n\pi \\ \qquad\qquad n = 1, 3, 5, \ldots \\ \theta_2 = n\pi \end{cases}$$

sono state scartate in quanto corrispondenti a posizioni di equilibrio instabile:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta_1^2} > f \qquad\qquad \frac{\partial^2 E_p}{\partial \theta_2^2} > f$$

Nel problema proposto la linearizzazione riguarderà solo l’Epotenziale:

Consideriamo i singoli termini:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot\,asta\,1}} = m_a g\, l(1 - \cos\theta_1) =$$

$$= m_a g\, l(1 - \cos\theta_{1e}) + m_a g\, l \sin\theta_{1e}(\theta - \theta_{1e}) + \frac{1}{2} m_a g\, l \cos\theta_{1e}(\theta - \theta_{1e})^2 =$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$= \qquad f \qquad\qquad f \qquad\qquad \frac{1}{2} mg\, l\, \theta_1^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m_a g\, l\, \theta_1^2$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot\,asta2}} = \frac{1}{2} m_a g\, l\, \theta_2^2$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot\,disco1}} = 2m_d g\, l(1 - \cos\theta_{1e}) =$$

$$= m_d g\, l(1 - \cos\theta_{1e}) + 2m_d g\, l \sin\theta_{1e}(\theta - \theta_{1e}) + \frac{1}{2} 2m_d g\, l \cos\theta_{1e}(\theta - \theta_{1e})^2 =$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$= \qquad f \qquad\qquad f \qquad\qquad mg\, l\, \theta_1^2 =$$

$$= m_d g\, l\, \theta_1^2$$

$$\mathbf{E}_{\mathbf{pot\,disco\,2}} = m_d g\, l\, \theta_2^2$$

$$\mathbf{E_{potmolla}} = \frac{1}{2} m\, l^2 \left(\sin \boldsymbol{q}_1 - \sin \boldsymbol{q}_2\right) =$$

$$= E_{p_m}\Big|_{\substack{q_1=f \\ q_2=f}} - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{q}_1} E_{p_m}\Big|_{\substack{q_1=f \\ q_2=f}} (\boldsymbol{q}_1) + \frac{\partial E_{p_m}}{\partial \boldsymbol{q}_2}\Bigg|_{\substack{q_1=f \\ q_2=f}} (\boldsymbol{q}_2) + \frac{\partial^2 E_{p_m}}{\partial \boldsymbol{q}_1^2}\Bigg|_{\substack{1=f \\ 2=f}} \left(\boldsymbol{q}_1 - -\boldsymbol{q}_{10}\right)^2 /2 + \frac{\partial^2 E_{p_m}}{\partial \boldsymbol{q}_2^2}\Bigg|_{\substack{1=f \\ 2=f}} (\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_{20})^2 /2 + \frac{\partial^2 E_{p_m}}{\partial \boldsymbol{q}_2 \partial \boldsymbol{q}_2}\Bigg|_{\substack{1=f \\ 2=f}} ($$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow \qquad \Downarrow$$

$$f \qquad f \qquad f \qquad + derivate\ \mathrm{sec}onde\ non\ nulle + \frac{\partial^2 E_{p_m}}{\partial \boldsymbol{q}_2 \partial \boldsymbol{q}_1}\Bigg|_{\substack{1=f \\ 2=f}} (\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_{10})(\boldsymbol{q}_2 - \boldsymbol{q}_{20})$$

$$= \frac{1}{2} \mathrm{K} l^2 \Bigg[\left(-2\cos\theta_1 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) + 2\cos\theta_1 \cos\theta_1\right)\Big|_{\substack{\theta_1=f \\ \theta_2=f}} \frac{\theta_1^2}{2} +$$

$$+ \left(2\sin\theta_2 (\sin\theta_1 - \sin\theta_2) - 2\cos\theta_2 \cos\theta_2\right)\Big|_{\substack{\theta_1=f \\ \theta_2=f}} \frac{\theta_2^2}{2} +$$

$$+ \left(-\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \cos\theta_1 \cos\theta_2\right)\Big|_{\substack{\theta_1=f \\ \theta_2=f}} \theta \cdot \theta_2 \Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{K} l^2 \theta_1^2 - \frac{1}{2}\mathrm{K} l^2 \theta_2^2 - \mathrm{K} l^2 \theta_1 \theta_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{K} l^2 \left(\theta_1^2 - \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2\right)$$

Quindi l'energia potenziale linearizzata sarà:

$$E_p = \frac{1}{2} m_a g l \boldsymbol{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_a g l \boldsymbol{q}_2^2 + m_d g l \boldsymbol{q}_1^2 + m_d g l \boldsymbol{q}_2^2 + \frac{1}{2} K l^2 \left(\boldsymbol{q}_1^2 - \boldsymbol{q}_2^2 - 2\boldsymbol{q}_1 \boldsymbol{q}_2\right)$$

e, di conseguenza:

$$\frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial \theta_1} = \mathrm{m_a} g l \theta_1 + 2\mathrm{m_d} g l \theta_1 + \mathrm{K} l^2 \theta_1 - \mathrm{K} l^2 \theta_2$$

$$\frac{\partial \mathrm{E_p}}{\partial \theta_2} = \mathrm{m_a} g l \theta_2 + 2\mathrm{m_d} g l \theta_2 + \mathrm{K} l^2 \theta_2 - \mathrm{K} l^2 \theta_1$$

per cui le equazioni linearizzate saranno:

$$\begin{cases} \mathrm{J}^* \ddot{\theta}_1 + \left(\mathrm{m_a} g\, l + 2\mathrm{m_d} g\, l + \mathrm{K} l^2\right)\theta_1 - \mathrm{K} l^2 \theta_2 = f \\ \mathrm{J}^* \ddot{\theta}_2 + \left(\mathrm{m_a} g\, l + 2\mathrm{m_d} g\, l + \mathrm{K} l^2\right)\theta_2 - \mathrm{K} l^2 \theta_1 = f \end{cases}$$

In forma matriciale si avrà

$$\mathrm{K}^* = \mathrm{m_g} g\, l + 2\mathrm{m_d} g\, l + \mathrm{K} l^2$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{J}^* & f \\ f & \mathrm{J}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathrm{K}^* & -\mathrm{K} l^2 \\ -\mathrm{K} l^2 & \mathrm{K}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = f$$

in cui le matrici di inerzia e di elasticità sono entrambe definite positive.

Posso quindi determinare le frequenze proprie del sistema annullando il determinante della matrice:

$$\left|\mathrm{M}\omega^2 - \mathrm{K}\right|$$

La soluzione, fornita dall'integrale generale,

$$[Z] = [\overline{Z}]e^{\lambda t}$$

in virtù del fatto che $[M]$ e $[K]$ sono definite positive sarà del tipo

$$[Z] = [\overline{Z}]e^{i\omega t}.$$

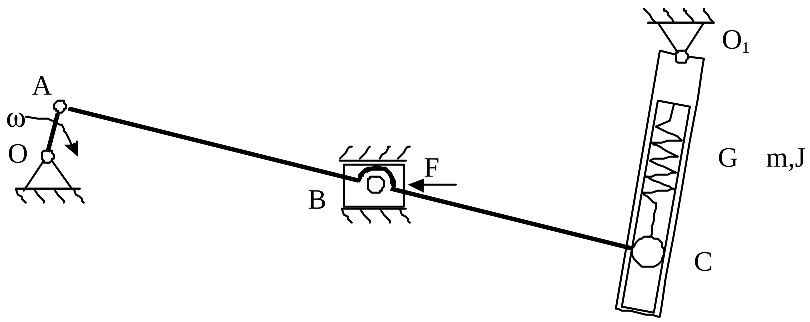
Meccanica Applicata alle Macchine - Allievi Aerospaziali
Prof. A. Curami - Appello del 15/7/98

1, Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione del glifo
- la coppia necessaria applicata sulla manovella OA
- le reazioni in O_1.

Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:

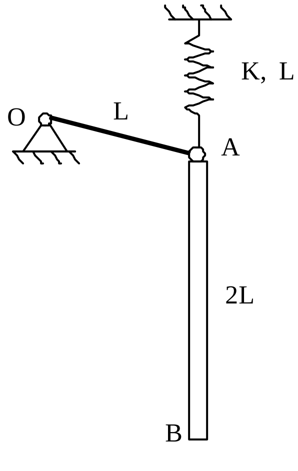
- il sistema operi in un piano verticale
- la geometria sia completamente nota
- la velocità angolare ω della manovella sia nota e costante
- la massa m e il momento d'inerzia J dell'asta O_1G siano noti
- gli artriti siano trascurabili
- la forza resistenza F applicata in B sia nota ed agente in orizzontale



2, Dato il sistema sotto raffigurato operante nel piano verticale si sviluppino i seguenti temi:

- scrivere le equazioni differenziali che descrivono le vibrazioni del sistema
- determinare le frequenze proprie del sistema
- indicare la procedura per determinare la legge del movimento

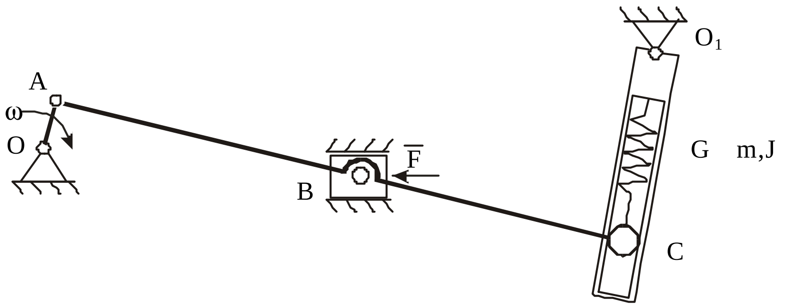
A tale fine si ritengono note: la massa m e il momento d'inerzia J dell'asta AB, la rigidezza della molla K e la lunghezza L della molla indeformata. Si trascuri la massa dell'asta OA.



3, Analizzare il movimento di un ascensore durante il moto retrogrado.

Es. 1
Dati:

ω - costante
m. J.
F.



Analisi del sistema

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità	Accelerazione
O	Punto a terra	nulla	nulla
A	Circ. centrata in O	$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OA}$	$\omega^2 \overline{OA}\vec{n}$
B	parallela a terra	?	?
C	?	?	?
O_1	Punto a terra	nulla	nulla

Calcolo delle velocità:

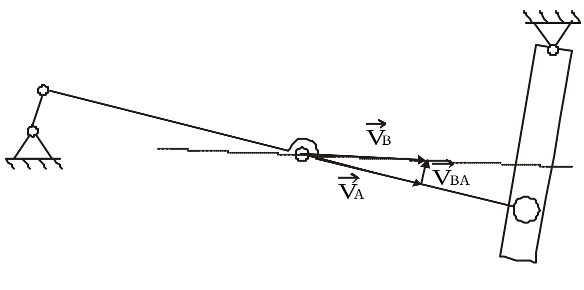
La velocità di A:

$|V_A| = \omega \cdot \overline{OA}$

La direzione è perpendicolare ad $\overrightarrow{OA}$

Con una terna traslante in A:

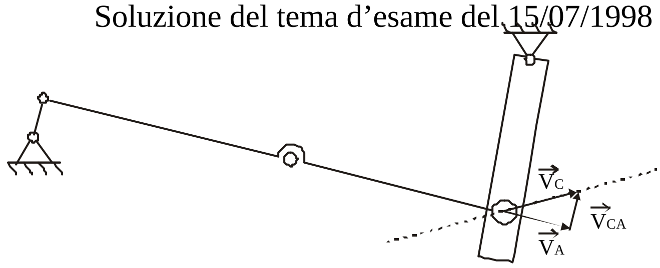
	$\mathbf{V_B}$	=	$\mathbf{V_A}$	+	$\mathbf{V_{BA}}$
Modulo	?		$\omega \cdot \overline{AO}$		$\omega_A (?) \overline{AB}$
direzione	orizz.		$\perp AO$		$\perp AB$



$$\omega_A = \frac{V_{BA}}{AB}\text{; antiorario .}$$

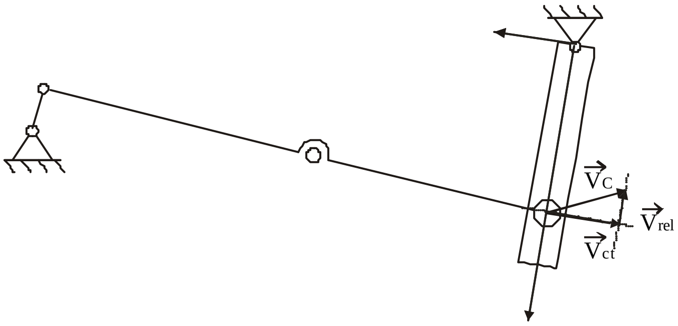
Sempre con terna traslante in A:

	$\mathbf{V_C}$	=	$\mathbf{V_A}$	+	$\mathbf{V_{CA}}$
modulo	?		$\omega \cdot \overline{AO}$		$\omega_{BA} \cdot \overline{AC}$
direzione	?		$\perp AO$		$\perp AC$



- Terna rotante solidale con O_1C con origine in O_1.

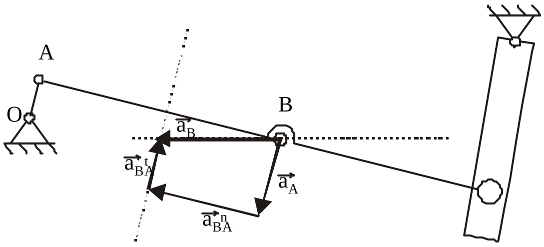
	$\mathbf{V_C}$	=	$\mathbf{V_{TRAS}}$	+	$\mathbf{V_{rel}}$
modulo	NOTO		$\omega_{0_1}(?)\overline{O_1C}$		?
direzione	NOTA		$\perp O_1C$		$//O_1C$



$$\omega_{0_1} = \frac{V_{tr.}}{\overline{O_1C}}; \quad V_G = \overline{O_1G} \cdot \omega_{0_1};$$

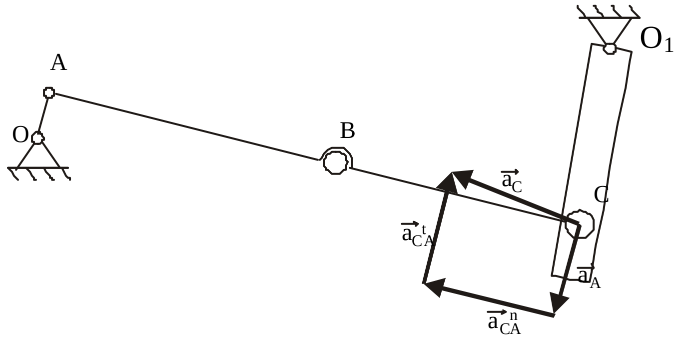
Calcolo delle accelerazioni:
Sempre con una terna traslante in A:

	$\mathbf{a_B}$	=	$\mathbf{a_A}$	+	$\mathbf{a^n_{BA}}$	+	$\mathbf{a^t_{BA}}$
modulo	?		$\omega^2 \cdot \overline{AO}$		$\omega^2_A \cdot \overline{AB}$		$\dot{\omega}_A(= ?)\overline{AB}$
direzione	orizz.		$//AO$		$//AB$		$\perp AB$



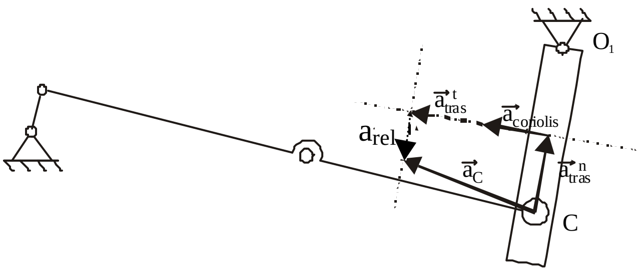
$$\dot{\omega}_A = \frac{a^t_{BA}}{\overline{BA}}, \text{ antiorario}$$

	$\mathbf{a_c}$	=	$\mathbf{a_A}$	+	$\mathbf{a^n_{CA}}$	+	$\mathbf{a^t_{CA}}$
modulo	?		$\omega^2 \cdot \overline{AO}$		$\omega^2_A \cdot \overline{AC}$		$\dot{\omega}_A \cdot \overline{AC}$
direzione	?		$//AO$		$//AC$		$\perp AC$



Con la terna rotante centrata in O_1:

	$\mathbf{a_C}$	=	$\mathbf{a^n_{tr}}$	+	$\mathbf{a^t_{tr}}$	+	$\mathbf{a_{rel}}$	+	$\mathbf{a_{cor.}}$
modulo	NOTA		$\text{ù}^2_{O_1C} \cdot \overline{O_1C}$		$\check{\text{u}}_{O_1C}(=?)\cdot\overline{O_1C}$		?		$2\text{ù}_{O_1C} \cdot V_{rel}$
direzione	NOTA		$//O_1C$		$\perp O_1C$		$//O_1C$		$\perp O_1C$



$$\dot{\omega}_{0_1} = \frac{\vec{a}^t_{c\,tr}}{O_1C}$$

Per cui $\vec{a}_G = \omega^2_{0_1}\,\overline{O_1G}\,\vec{n} + \dot{\omega}_{0_1}\,\overline{O_1G}\,\vec{t}_g$

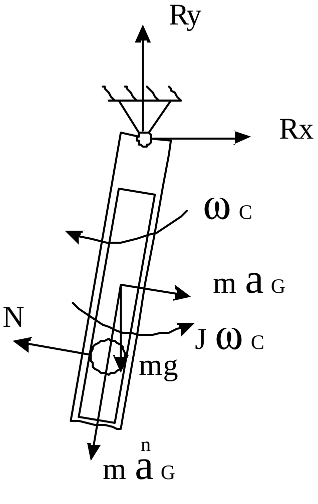
- Bilancio di potenze

$$w_m - w_r + w_i = 0$$
$$w_m = C_m \cdot \omega$$
$$w_R = -\left(m\vec{g}\times\vec{V}_G + \vec{F}\times\vec{V}_B\right) = -\left(mgV_G\cos\alpha - FV_B\right)$$
$$w_i = -\frac{dE_c}{dt} = -J\vec{\dot{\omega}}_{0_1}\times\vec{\omega}_{0_1} - m\vec{a}_G\times\vec{V}_G = J\dot{\omega}_{0_1}\omega_{0_1} + ma_GV_G$$

$$Cm = \frac{1}{\omega}\left(-mgV_G\cos\alpha + FV_B - J\dot{\omega}_{0_1}\omega_{0_1} - ma_GV_G\right)$$

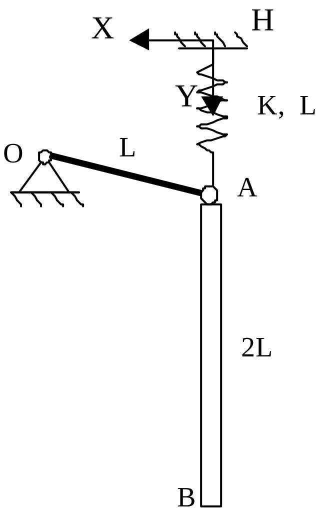
- Le reazioni in O_1

$\sum M_0 = 0 \Rightarrow$ trovo N
$\sum X = 0$
$\sum Y = 0$



Tre equazioni per ricavare N, R_x, R_y.

Tema d'esame del 15/7 – Soluzione esercizio di dinamica



Dati del problema:

- Asta OA massa e momento di inerzia trascurabile
  Lunghezza **L**
- Asta AB massa **m** e momento di inerzia baricentrico **J**
  Lunghezza **2L**
  Baricentro a distanza L da A
- Molla lunghezza della molla indeformata L
  Rigidezza K

Il sistema si presenta a due gradi di libertà; come coordinate libere assumiamo:

q - rotazione asta OA attorno ad O, positiva in verso antiorario, a partire dalla posizione orizzontale
j - rotazione asta AB attorno ad A, positiva in verso antiorario, a partire dalla posizione verticale

ed inoltre definiamo il sistema di riferimento XY con l'origine coincidente con il punto di incastro della molla, con gli assi diretti come in figura. In tale sistema di riferimento il punto O avrà ascissa a e ordinata b. Si sottolinea che entrambe le coordinate libere sono assolute.

Utilizziamo per la risoluzione il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica:

L'energia cinetica del sistema coincide con quella dell'asta AB in quanto è l'unico elemento dotato di massa e di momento di inerzia.
Per comodità calcolo l'energia cinetica totale come somma di quella dovuta alla traslazione del baricentro e di quella dovuta alla rotazione dell'asta:

Energia cinetica traslatoria:

$$E_{cin\,trasl} = \frac{1}{2} m V^2$$

V = velocità del baricentro dell'asta AB

$$V^2 = V^2 x + V^2 y$$

Entrambe le componenti della velocità sono la somma di due contributi dovuti alle singole coordinate libere. Consideriamo inizialmente il contributo dovuto all'asta OA:

$$X_A = a - L\cos\vartheta$$
$$Y_A = b - L\,\text{sen}\vartheta$$

Tale contributo esprime in pratica le coordinate del punto A. Si tratta ora di mettere in conto il contributo della rotazione dell'asta AB:

$$X_G = X_A + L\,\text{sen}\varphi = a - L\cos\vartheta - L\,\text{sen}\varphi$$
$$Y_G = Y_A + L - L\cos\varphi = b - L\,\text{sen}\vartheta + L\cos\varphi$$

La velocità si ottiene per derivazione:

$$V_{GX} = L\,\text{sen}\vartheta\,\dot{\vartheta} + L\cos\varphi\,\dot{\varphi}$$
$$V_{GY} = -L\cos\vartheta\,\dot{\vartheta} - L\,\text{sen}\varphi\,\dot{\varphi}$$

Da cui:

$$V^2 = V_{GX}{}^2 + V_{GY}{}^2 = L^2\left[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\sin(\varphi-\vartheta)\right]$$

per cui l'energia cinetica traslatoria sarà data da:

$$E_{cin\ trasl} = \frac{1}{2}mL^2\left[\dot{\vartheta}^2 + \dot{\varphi}^2 + 2\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\sin(\varphi-\vartheta)\right]$$

Energia cinetica rotazionale:

Si trova immediatamente essendo la coordinata libera φ assoluta:

$$E_{cin\ rot} = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

L'energia cinetica totale del sistema sarà quindi data da:

$$E_{cin\ sist.} = \frac{1}{2}mL^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}(mL^2+J)\dot{\varphi}^2 + mL^2\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\sin(\varphi-\vartheta)$$

Calcolo dell'energia potenziale:

L'energia potenziale del sistema è data dalla somma del contributo legato al peso dell'asta AB e di quello dovuto alla deformazione elastica della molla.

Contributo dell'asta al potenziale:

$$\Delta E_{pot\ asta\ AB} = E_{pot} - E_{pot\ iniziale}$$

La coordinata verticale del baricentro è data da:

$$Y_G = b - L\,\text{sen}\vartheta + L\cos\varphi$$

Assumendo come posizione di riferimento quella con $\vartheta = \varphi = 0$, l'innalzamento del baricentro è dato da

$$\Delta Y_G = Y_G(\vartheta,\varphi) - Y_G(0,0) = -L\,(\text{sen}\vartheta + 1 - \cos\varphi)$$

Per le convenzioni assunte (Y rivolto verso il basso), a $\Delta Y_G > 0$, corrisponde una diminuzione di energia potenziale, per cui si ha:

$$\Delta E_{pot\ asta\ AB} = -\,mg\,\Delta Y_G = mgL\,(\text{sen}\vartheta + 1 - \cos\varphi)$$

Contributo della molla all'energia potenziale:

$$\Delta E_{pot\ molla} = \frac{1}{2}\,K\,\Delta l^2$$

Si tratta di determinare l'allungamento della molla dalla condizione di molla indeformata, corrispondente alla situazione di energia potenziale nulla. In pratica si tratterà di determinare la lunghezza della molla in funzione delle coordinale libere in quanto si conosce la lunghezza della molla indeformata.
La lunghezza della molla può essere determinata ad esempio considerando il triangolo HOA e utilizzando il teorema del coseno; infatti si conosce il lato HO (d'ora in poi indicato con d, dato che $d^2 = a^2 + b^2$), si conosce il lato OA (dai dati sappiamo che è lungo L) e l'angolo compreso, dato dalla differenza di un angolo α costante con la coordinata libera θ mentre il lato HA corrisponde alla lunghezza della molla.
Indicando con L_m la lunghezza della molla si avrà:

$$L_m = (HO^2 + OA^2 - 2\,HO\,OA\,\cos(\alpha - \theta))^{\frac{1}{2}} =$$
$$= (d^2 + L^2 - 2\,d\,L\,\cos(\alpha - \theta))^{\frac{1}{2}}$$

Ricordando che la molla scarica ha lunghezza pari ad L, il suo allungamento sarà dato da:

$$\Delta L_m = L_m - L$$

Ai fini del problema, interessa il quadrato di tale grandezza:

$$\Delta L_m^2 = (L_m - L)^2 = L_m^2 + L^2 - 2\,L_m\,L =$$
$$= d^2 + L^2 - 2\,d\,L\,\cos(\alpha - \theta) + L^2 - 2\,(d^2 + L^2 - 2\,d\,L\,\cos(\alpha - \theta))^{\frac{1}{2}}\,L =$$
$$= d^2 + 2\,L^2 - 2\,d\,L\,\cos(\alpha - \theta) - 2\,(d^2 + L^2 - 2\,d\,L\,\cos(\alpha - \theta))^{\frac{1}{2}}\,L =$$

L'energia potenziale della molla sarà quindi data da:

$$\Delta E_{pot\ molla} = \frac{1}{2}K(d^2 + 2L^2 - 2dL\,\cos(\alpha-\theta) - 2\,(d^2 + L^2 - 2dL\,\cos(\alpha-\theta))^{\frac{1}{2}}\,L)$$

La variazione totale di energia potenziale del sistema nella generica configurazione è quindi data da:

$$\Delta E_{pot\ sist} = E_{pot\ asta} + E_{pot\ molla} =$$

$$= mgL\ (\text{sen}\vartheta + 1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}K(d^2 + 2L^2 - 2dL\cos(\alpha-\theta) - 2\,(d^2 + L^2 - 2dL\cos(\alpha-\theta))^{\frac{1}{2}}\,L)$$

Siamo ora in grado di scrivere le equazioni differenziali che governano il comportamento del sistema:

Prima equazione differenziale:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\vartheta} = mL^2\,[\dot\vartheta + \dot\varphi\,\text{sen}(\varphi-\vartheta)]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\vartheta}\right) = mL^2\,[\ddot\vartheta + \ddot\varphi\,\text{sen}(\varphi-\vartheta) + \dot\varphi\,(\dot\varphi - \dot\vartheta)\cos(\varphi-\vartheta)]$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \vartheta} = -\,mL^2\,\dot\varphi\,\dot\vartheta\,\cos(\varphi-\vartheta)$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \vartheta} = mgL\cos\vartheta + \frac{1}{2}K\,[-2dL\,\text{sen}(\alpha-\theta) + 2dL^2\,\text{sen}(\alpha-\theta) / (d^2 + L^2 - 2dL\cos(\alpha-\theta))^{\frac{1}{2}}]$$

Seconda equazione differenziale:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\varphi} = (mL^2 + J)\,\dot\varphi + mL^2\,\dot\vartheta\,\text{sen}(\varphi-\vartheta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot\varphi}\right) = (mL^2 + J)\,\ddot\varphi + m\,L^2\,[\ddot\vartheta\,\text{sen}(\varphi-\vartheta) + \dot\vartheta\,(\dot\varphi - \dot\vartheta)\cos(\varphi-\vartheta)]$$

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \varphi} = mL^2\,\dot\varphi\,\dot\vartheta\,\cos(\varphi-\vartheta)$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} = mgL\,\text{sen}\varphi$$

Il primo obbiettivo è adesso quello di determinare le condizioni di equilibrio statico stabile del sistema considerato. La condizione di equilibrio statico può essere trovata determinando per quali valori delle coordinate libere si annullano le derivate prime del potenziale:

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \vartheta} = 0 \quad \Rightarrow mgL\cos\vartheta + \frac{1}{2}K\,[-2dL\,\text{sen}(\alpha-\theta) + 2dL^2\,\text{sen}(\alpha-\theta) / (d^2 + L^2 - 2dL\cos(\alpha-\theta))^{\frac{1}{2}}] = 0$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \varphi} = 0 \quad \Rightarrow mgL\,\text{sen}\varphi = 0$$

La prima equazione non si presenta di facile soluzione; comunque, si intuisce che i termini "elastici" dovuti all'allungamento della molla dovranno equilibrare il termine $mgL\cos\vartheta$ dovuto al peso dell'asta verticale. Ai nostri fini possiamo supporre che esista un certo valore ϑ_0 che annulla la derivata prima e rappresenti un punto di equilibrio stabile. Tale tesi può essere avvalorata dall'osservazione diretta del sistema. La seconda equazione può al contrario essere risolta

banalmente osservando che senφ = 0 per φ = 0, come era lecito aspettarsi. Consideriamo dunque come posizione di equilibrio statico la coppia di valori (ϑ_0, 0).
Nota la posizione di equilibrio statico è ora possibile passare alla linearizzazione del sistema valida per piccole oscillazioni attorno a tale posizione. Nel caso in esame, sia l'energia cinetica che l'energia potenziale non sono forme quadratiche nelle variabili del problema; occorre dunque procedere per entrambe allo sviluppo in serie di Taylor, che verrà arrestato agli infinitesimi di secondo ordine.
L'energia cinetica è esprimibile nella forma:

$$E_{cin} = \frac{1}{2} J_{\vartheta\vartheta}(\vartheta,\varphi)\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} J_{\varphi\varphi}(\vartheta,\varphi)\,\dot{\varphi}^2 + J_{\vartheta\varphi}(\vartheta,\varphi)\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}$$

La sua forma approssimata, nell'ipotesi di piccoli spostamenti, è dunque la seguente:

$$E_{cin} \cong \frac{1}{2} J_{\vartheta\vartheta}(\vartheta_0,0)\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} J_{\varphi\varphi}(\vartheta_0,0)\,\dot{\varphi}^2 + J_{\vartheta\varphi}(\vartheta_0,0)\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi} =$$
$$= \frac{1}{2} mL^2\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}(mL^2+J)\,\dot{\varphi}^2 + mL^2\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}(-\vartheta_0) = \frac{1}{2} J_{\vartheta\vartheta}\,\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2} J_{\varphi\varphi}\,\dot{\varphi}^2 + J_{\vartheta\varphi}\,\dot{\vartheta}\,\dot{\varphi}$$

Per quanto riguarda l'energia potenziale, occorrono le derivate seconde valutate nella posizione di equilibrio statico:

$$\left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\vartheta^2}\right|_{\vartheta_0,0} = \ldots = K_{\vartheta\vartheta}\ (>0)$$
$$\left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\varphi^2}\right|_{\vartheta_0,0} = mgL = K_{\varphi\varphi}\ (>0)$$
$$\left.\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial\vartheta\partial\varphi}\right|_{\vartheta_0,0} = 0$$

L'espressione dell'energia potenziale approssimata è dunque la seguente (si osservi che i termini lineari in ϑ e φ sono nulli in quanto lo sono le derivate prime dell'energia potenziale valutate nella configurazione di equilibrio):

$$E_{pot} \cong E_{pot}(\vartheta_0,0) + \frac{1}{2} K_{\vartheta\vartheta}\,\vartheta^2 + \frac{1}{2} K_{\varphi\varphi}\,\varphi^2$$

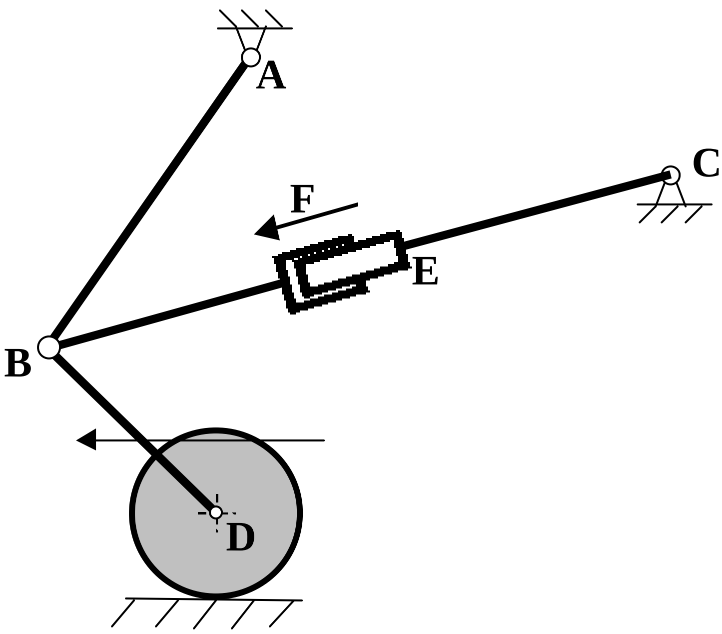
Da forme energetiche quadratiche si ottiene un sistema di equazioni lineari; gli autovalori di questo sistema consentono di ricavare le frequenze proprie richieste.

Meccanica Applicata alle Macchine – Allievi Aerospaziali
prof. A. Curami - Appello del 2 settembre 1998

Dato il meccanismo sotto raffigurato si determini, per la configurazione rappresentata:

- la velocità e l'accelerazione del punto D;
- la velocità e l'accelerazione angolare del disco
- la forza sviluppata dall'attuatore lineare (F)
- le reazioni vincolari nel punto A

e si esegua la verifica al rotolamento del disco.
Nello svolgimento dell'esercizio si supponga che:
a) AB ruoti in verso orario con velocità angolare ω nota e costante;
b) il sistema operi in un piano verticale;
c) la geometria sia completamente nota;
d) il disco abbia massa M_d e momento di inerzia baricentrico J_d;
e) l'elemento CE dell'attuatore abbia massa M_1 e momento di inerzia J_1;
f) gli attriti siano trascurabili;
g) sia noto il coefficiente di attrito disco superficie.



Soluzione proposta

Analisi del sistema

Prima di affrontare i quesiti proposti svolgiamo una breve analisi del sistema nella quale andiamo a definire, per ogni punto notevole dello stesso, la traiettoria, la velocità e l’accelerazione assolute riassunte nella tabella sottoriportata.

Punto del sistema	Traiettoria assoluta	Velocità assoluta	Accelerazione assoluta
Punto A	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto B	Circonferenza centrata in A	Nota - **w** Λ **AB**	Nota - **w** Λ (**w** Λ **AB)**
Punto C	Punto a terra	Nulla	Nulla
Punto D	Parallela a terra	?	?
Punto E	Circonferenza centrata in C	?	?

Primo quesito: la velocità e l'accelerazione del punto D;

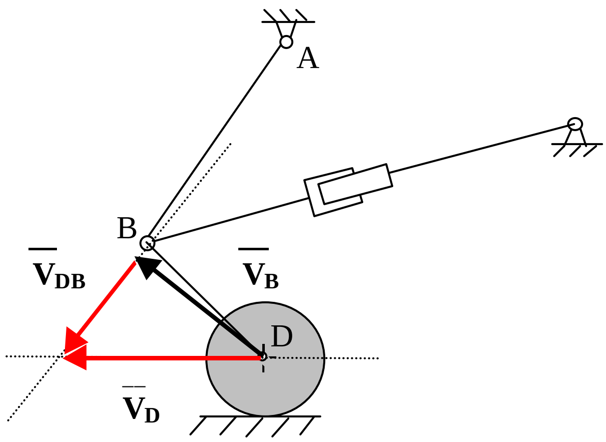
La velocità di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

- si posiziona nel punto B una terna traslante di moto circolare uniforme attorno ad A con velocità angolare ω costante in verso antiorario;
- si esprime la velocità assoluta di D come somma vettoriale della velocità di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

Riassumendo in una tabella si ottiene:

	V_D (assoluta)	**=**	**V_B (V_D trasc.)**	**V_{DB} (V_D rel.)**
modulo	?		**ωAB**	? $(ù_{BD} BD)$
direzione	// orizzontale		⊥ AB	⊥ DB

Costruendo il triangolo delle velocità si ottiene:



Per cui ricaviamo il valore di moduli di V_{DB} e V_D,
Oltre alle due velocità incognite è importante determinare anche:

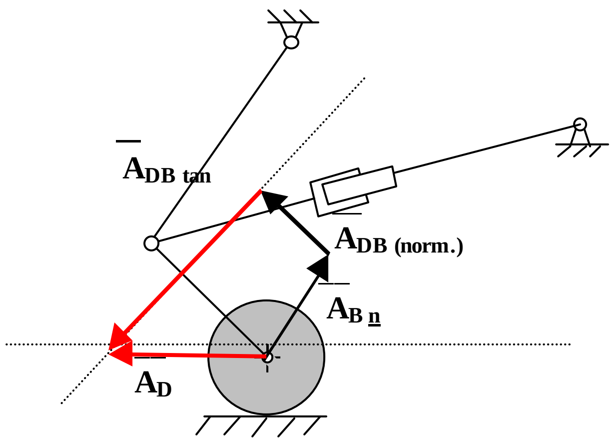
$$ù_{BD} = \frac{V_{DB}}{DB} \quad \text{verso orario}$$

che verrà utilizzato nella determinazione dell’accelerazione di D.

La accelerazione di D può essere determinata ricorrendo al teorema dei moti relativi utilizzando la stessa terna mobile precedentemente introdotta per il calcolo della velocità.
Questo significa che si esprimerà l'accelerazione assoluta di D come somma vettoriale della accelerazione di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta; avend assunto un riferimento traslante, la componente di Coriolis è nulla.
Riassumendo in una tabella si ottiene:

	A_D **(assoluta)**	=	A_B **(V_D trasc.)**		A_{DB} **(V_D rel.)**	
			norm	tang	norm	tang
modulo	**?**		$\omega^2\,\overline{\mathbf{AB}}$	/	$ù^2_{BD}\,\overline{BD}$	$ǔ_{BD}$
direzione	// orizzontale		// BA verso A	/	// BD verso B	$\perp$ BD

Costruendo un quadrilatero delle accelerazioni otteniamo il modulo $\left|\vec{A}_D\right|$ e ω il valore di $ǔ_{BD}$.



Secondo quesito: la velocità e l'accelerazione angolare del disco;

La risposta a questo quesito è molto semplice in quanto, supponendo che il disco rotoli senza strisciare, il suo movimento istantaneo è equivalente ad una rotazione attorno al suo punto di appoggio per cui si avrà:

$$\Omega_d = \frac{V_d}{R}$$

$$\dot{\Omega}_d = \frac{A_d}{R}$$

dove con R si è indicato il raggio del disco.

Terzo quesito: la forza sviluppata dall'attuatore lineare (F);

Non essendoci per ipotesi nel sistema attriti dissipativi è possibile utilizzare il teorema delle potenze:

$$W_m - W_r = \frac{dE_{cin}}{dt}$$

Determiniamo il valore assunto dai singoli termini:

Potenza motrice:

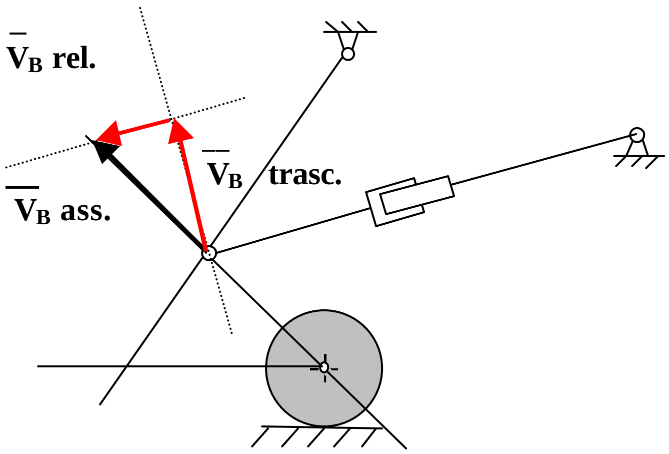
$$W_m = \vec{\mathbf{F}} \times \vec{\mathbf{V}}_r$$

dove F è l'incognita da calcolare mentre $\mathbf{V_r}$ (velocità di allungamento dell'attuatore) è determinabile in base ai dati del problema ricorrendo al teorema dei moti relativi con un procedimento in due passi:

- si posiziona nel punto C una terna rotante con velocità angolare ω_2;
- si esprime la velocità assoluta di B come somma vettoriale della velocità di trascinamento e di quella relativa rispetto alla terna sopra descritta.

La scelta della terna mobile fa in modo che la velocità relativa coincida con la V_r incognita sopra descritta.
Riassumendo in una tabella quanto detto si ottiene:

	$\mathbf{V_B}$ **(assoluta)**	=	$\mathbf{V_B}$ **trasc.**	$\mathbf{V_B}$ **rel.**
modulo	$\mathbf{w\ \overline{AB}}$		**? ($\mathbf{w_2\ \overline{BC}}$)**	**?**
direzione	$\perp$ AB		$\perp$ BC	// BC



Potenza resistente:

$$W_r = -M_1\vec{\mathbf{g}}\ \mathbf{x}\ \vec{\mathbf{V}}_G - M_d\vec{\mathbf{g}}\ \mathbf{x}\ \vec{\mathbf{V}}_D$$

Nel primo termine, M_1 è noto dai dati del problema, **g** è l'accelerazione di gravità mentre $\mathbf{V_G}$ indica la velocità del baricentro dell'asta CE; in assenza di indicazioni precise il baricentro può essere posizionato in modo arbitrario lungo l'asta CE, ad esempio dove termina il pistone ed inizia l'asta.
La $\mathbf{V_G}$ può essere determinata facilmente utilizzando la velocità di trascinamento appena calcolata. Infatti, tenendo conto che:

$$\omega_2 = \frac{V_{B\,trasc}}{BC}$$

si avrà:

$$\vec{\mathbf{V}}_G = \vec{\mathbf{w}}_2 \, \mathbf{L} \, \overrightarrow{\mathbf{CG}}$$

Il secondo termine pone meno problemi in quanto, osservando che $\vec{\mathbf{g}}$ e $\vec{\mathbf{V}}_D$ (velocità baricentro del disco) sono vettori perpendicolari tra loro, si può concludere che il prodotto scalare sarà nullo.

<u>Variazione dell'energia cinetica</u>

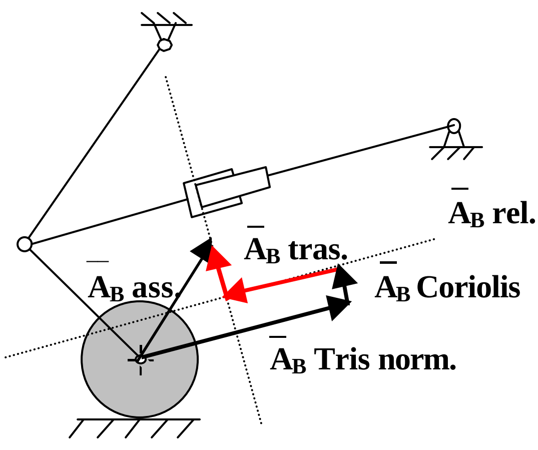
In questo termine compariranno soltanto gli elementi del sistema dotati di massa e quindi, l'asta CE ed il disco. Ricordando che l'energia cinetica ha una componente traslazionale ed una rotazionale sarà più semplice esprimerne la variazione:

$$dE_{cin}/dt = M_1 \vec{\mathbf{A}}_G \times \vec{\mathbf{V}}_G + J_1 \overrightarrow{\dot{\mathbf{w}}_2} \times \vec{\mathbf{w}} + M_d \vec{\mathbf{A}}_D \times \vec{\mathbf{V}}_D + J_1 \overrightarrow{\dot{\mathbf{W}}_d} \times \vec{\mathbf{W}}_d$$

Gli unici termini incogniti presenti nella relazione sono $\vec{\mathbf{A}}_G$ e $\overrightarrow{\dot{\mathbf{w}}_2}$; per determinarli riutilizzo la terna rotante centrata in C:

Il primo passo consiste nell'esprimere l'accelerazione assoluta di B come somma vettoriale della accelerazione di trascinamento, di quella relativa (rispetto alla terna sopra descritta) e di quella di Coriolis.
Riassumendo in una tabella si ottiene:

$\mathbf{A_B}$ **(assoluta)**	**=**	$\mathbf{A_B}$ **(trasc.)**		$\mathbf{A_B}$ **(rel.)**	$\mathbf{A_B}$ **(Coriolis)**
norm $\mathbf{w^2\,AB}$ // BA		norm $\mathbf{w_2^2\,AB}$ // BC	tang ? $\perp$ BC	**?** // BC	$\mathbf{2(w_2\ V_{rel})}$ $\perp V_{rel}$



Il termine $\dot{\omega}_2$ si determina immediatamente in quanto:

$$\dot{\omega}_2 = \frac{A_{B\ trasc}}{BC}$$

mentre per quanto riguarda l'accelerazione del baricentro, visto che ai nostri scopi interessa solo la componente parallela alla velocità, e quindi quella tangenziale, sarà data da:

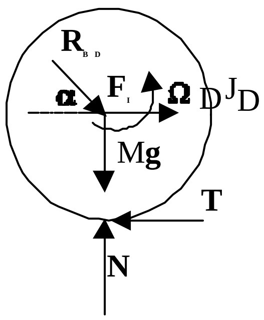
$$\mathbf{A}_{\mathbf{Gtang}} = \dot{\omega}_2 \Lambda \mathbf{CG}$$

A questo punto, nel bilancio energetico, rimane come unica incognita la forza $\vec{F}$ generata dall'attuatore che può quindi essere determinata.

Quarto quesito: le reazioni vincolari nel punto A

Il calcolo della reazioni vincolari può essere eseguito in molti modi diversi caratterizzati da diversi gradi di complessità. Prima di partire con un procedimento è quindi opportuno riflettere se si tratta o meno dell'approccio migliore.
Nel caso specifico l'osservazione di partenza è che le due aste AB e BD sono prive di massa e non caricate; agiscono quindi da bielle e la direzione della reazione è quella dell'asta stessa.

Stacchiamo il disco dal sistema sostituendo alla cerniera la reazione esercitata dalla biella:



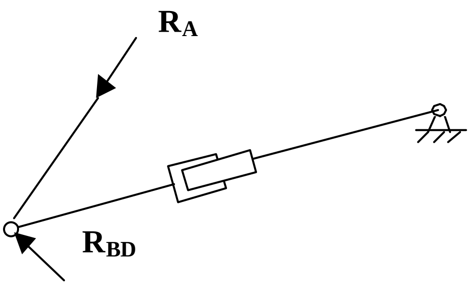
Le incognite sono la reazione orizzontale **T**, quella verticale **N** e la reazione della biella $\mathbf{R_{BD}}$, servono quindi tre equazioni:

$$\vec{\mathbf{M}}_{(D)}^{\mathbf{disco}} = \vec{\mathbf{T}} \Lambda \vec{\mathbf{R}} + \vec{\mathbf{C}}_{\mathbf{i}} = \mathbf{0} \qquad \text{ricavo il valore di } \mathbf{T}$$

$$\mathbf{R}_{(x)}^{\mathbf{disco}} = \mathbf{F_i} - \mathbf{T} + \mathbf{R_{BD}} \cos\mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad \text{ricavo } R_{BD}$$

$$\mathbf{R}_{(y)}^{\mathbf{disco}} = M_d\mathbf{g} + \mathbf{R_{BD}} \sin\alpha - \mathbf{N} = \mathbf{0} \qquad \text{ricavo N}$$

Come quarta equazione, per determinare R_A come richiesto nell'esercizio, si può scrivere il momento rispetto a C del sistema privato dell'asta BD e AB, come sotto raffigurato:



$$\vec{\mathbf{M}}_{(C)}^{ABEC} = \vec{\mathbf{R}}_{BD} \wedge \mathbf{CB} + \vec{\mathbf{R}}_{A} \wedge \mathbf{CB}$$

Quinto quesito: verifica del rotolamento del disco

Le reazioni N e T (normali e tangenziali) che il disco scambia con il terreno sono state determinate come visto sopra.
Si tratta di verificare la diseguaglianza:

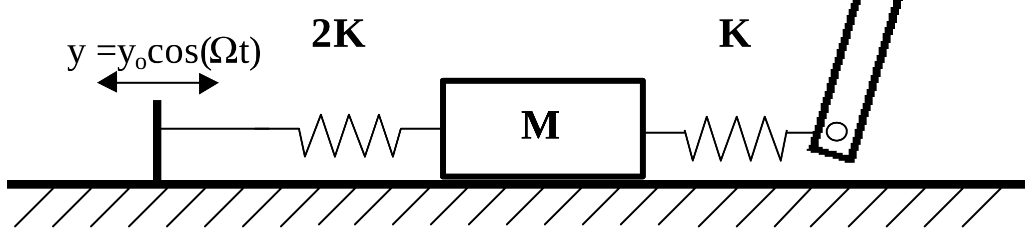
$T < f_s N$

Quesito proposto

Dato il sistema sotto raffigurato, operante nel piano verticale, si sviluppino i seguenti temi:

- Scrivere il sistema di equazioni differenziali che ne descrivono le vibrazioni;
- Scrivere il sistema di equazioni linearizzato;
- Indicare come è possibile ricavare la legge del moto del sistema;

A tal fine si ritengano note la massa (M) del carrello, la massa ed il momento di inerzia dell'asta (m, J), le costanti elastiche delle due molle, le caratteristiche geometriche del sistema e si trascurino gli attriti.



Si descriva, anche ricorrendo ad una trattazione analitica, il principio di funzionamento del sismografo e dell'accelerometro.

Soluzione proposta

Osservando il sistema si nota che esso presenta tre gradi di libertà; come coordinate libere assumiamo:

q – oscillazione asta attorno alla cerniera (positiva in verso orario)
x – spostamento assoluto del carrello (positivo verso destra)
y – spostamento assoluto del vincolo (positivo verso destra). Si noti che la legge del moto del vincolo è nota.

Utilizziamo per la risoluzione il metodo di Lagrange:

Calcolo dell'energia cinetica:

L'energia cinetica del sistema coincide con quella degli elementi dotati di massa e quindi, nel caso dell'esercizio proposto, con la somma di quella del carrello e dell'asta.

$$E_{cin\ carrello} = \frac{1}{2} M V_C^2$$ V_C= velocità del baricentro del carrello

Per comodità calcolo l'energia cinetica totale dell'asta come somma di quella dovuta alla traslazione del baricentro e di quella dovuta alla rotazione attorno alla cerniera:

Energia cinetica traslatoria:

$E_{cin\ trasl} = \frac{1}{2}\ m\ V_a^2$ V_a = velocità del baricentro dell'asta AB

$V^2 = \frac{l^2}{4}\dot{\vartheta}^2$

Anche se non fornita tra i dati dei problemi si è fatta l'ipotesi che l'asta avesse lunghezza L e che, essendo la massa distribuita in modo uniforme, il baricentro si trovi a distanza l/2 dalla cerniera.
Energia cinetica rotazionale:

Si trova immediatamente essendo la coordinata libera ϑ assoluta:

$$E_{cin\ rot} = ½\ J\ \dot{\vartheta}^2$$

L'energia cinetica totale del sistema sarà quindi data da:

$$E_{cin\ sist.} = ½\ M\ \dot{x}^2 + ½\ m\ (l/2\ \dot{\vartheta})^2 + ½\ J\ \dot{\vartheta}^2$$

Calcolo dell'energia potenziale:

L'energia potenziale del sistema è data dalla somma del contributo dovuto alle due molle aumentata della variazione di energia potenziale dell'asta; il carrello infatti non va considerato in quanto il suo movimento avviene su una superficie equipotenziale.

Contributo della prima molla al potenziale:

$$\Delta E_{pot\ molla} = \frac{1}{2}\ 2\ K\ \Delta l^2 = K\ (x - y)^2$$

Contributo della seconda molla al potenziale:

$$\Delta E_{pot\ molla} = \frac{1}{2}\ K\ \Delta l^2 = \frac{1}{2}\ K\ (x + l\sin\theta)^2$$

Contributo dell'asta al potenziale:

$$\Delta E_{pot\ asta} = E_{pot} - E_{pot\ iniziale} = \frac{mgl}{2}(1 - \cos\vartheta)$$

Si sottolinea che durante il calcolo dell'energia potenziale si è supposto che il movimento dell'asta potesse essere confuso con un movimento orizzontale e che quindi le molle agiscano entrambe rigorosamente in orizzontale.
L'energia potenziale complessiva del sistema sarà:

$$\Delta E_{pot.\ sistema} = K\ (x - y)^2 + \frac{1}{2}\ K\ (x + l\sin\theta)^2 + \frac{mgl}{2}\ (1 - \cos\vartheta)$$

Siamo ora in grado di scrivere le equazioni differenziali che governano il comportamento del sistema:

Prima equazione differenziale:

$$\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{x}} = M\dot{x}$$

derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$d\frac{\partial E_{cin}}{\partial \dot{x}}/dt = M\ddot{x}$$

Inoltre:

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x} = K\,2\,(x-y) + K\,(x + l\sin\vartheta)$$

quindi la <u>prima equazione differenziale</u> è:

$$M\ddot{x} + 3K\,x + Kl\sin\theta = 2K\,y$$

Seconda equazione differenziale:

$$\partial E_{cin}/\partial\dot{\theta} = ml/2\;\dot{\theta} + J\;\dot{\theta}$$

derivando rispetto al tempo si ottiene:

$$d(\partial E_{cin}/\partial\dot{\theta})/dt = (ml^2/4 + J)\ddot{\theta}$$

Inoltre:

$$\partial E_{cin}/\partial\theta = 0$$

$$\partial V_{pot}/\partial\theta = K\,(x + L\sin\vartheta)\,l\cos\vartheta - mgl/2\sin\vartheta$$

La <u>seconda equazione differenziale</u> è quindi determinata:

$$J^*\ddot{\theta} + K\,(x + l\sin\vartheta)\,l\cos\vartheta + mgl/2\sin\vartheta = 0$$

Il primo obiettivo è adesso quello di determinare le condizioni di equilibrio statico stabile del sistema considerato. La condizione di equilibrio statico può essere trovata determinando per quali valori delle coordinate libere si annullano le derivate prime del potenziale:

$$\partial V_{pot}/\partial x = 2K(x) + K(x + l\sin\vartheta) = 3Kx + Kl\sin\vartheta$$

$$\partial V_{pot}/\partial\vartheta = K(x + l\sin\vartheta)\,l\cos\vartheta + mgl/2\sin\vartheta = 0$$

Dalla prima equazione si ricava che:

$$x = -\frac{l \cdot \sin\vartheta}{3}$$

che, sostituito nella seconda ci dà:

$$K\frac{2}{3}l^2\cos\vartheta \cdot \sin\vartheta + \frac{mgl}{2}\sin\vartheta = 0$$

Come si vede, una soluzione corrisponde a $\vartheta = x = 0$; altre soluzioni si hanno per:

$$\cos\vartheta = -\frac{3mg}{4Kl} < 0$$

cui corrispondono valori di $\vartheta > \pi/2$, in contrasto con la geometria del problema. Consideriamo quindi la posizione $\vartheta = x = 0$. Siamo ora in grado di linearizzare l'espressione dell'energia potenziale, nell'intorno della posizione di equilibrio, nell'ipotesi di piccole oscillazioni.

L'energia potenziale è una funzione di due variabili, quindi lo sviluppo in serie sarà:

$$E_{pot} = E_{pot}\Big|_{0,0} + \frac{\partial E_p}{\partial x}\bigg|_{0,0} x + \frac{\partial E_p}{\partial \vartheta}\bigg|_{0,0}\vartheta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial \vartheta^2}\bigg|_{0,0}\vartheta^2 + \frac{\partial^2 E_p}{\partial x \partial \vartheta}\bigg|_{0,0} x\vartheta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} x^2$$

Nel tema proposto

$$E_{pot} = K(x - y)^2 + \frac{1}{2}K(x + l\sin\vartheta)^2 + mg\frac{l}{2}(1 - \cos\vartheta)$$

$$E_{pot}\Big|_{0,0} = Kx_0^2 + \frac{1}{2}K(x_0 + l\sin\vartheta_0)^2 + mg\frac{l}{2}(1 - \cos\vartheta_0) = 0$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x}\bigg|_{0,0} = 2Kx_0 + K(x_0 + l sen\theta_0) = 0$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta}\bigg|_{0,0} = K(x_0 + l\sin\vartheta_0)l\cos\vartheta_0 + mg\frac{l}{2}\sin\vartheta_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial x^2}\bigg|_{0,0} = 3K = B$$

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial \theta^2}\bigg|_{0,0} = Kl^2(\cos^2\vartheta_0 - \sin^2\vartheta_0) - Klx_0\sin\vartheta_0 + \frac{l}{2}mg\cos\vartheta_0 = Kl^2 + mg\frac{l}{2} = C$$

$$\frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial x \partial \theta}\bigg|_{0,0} = \frac{\partial^2 E_{pot}}{\partial \theta \partial x}\bigg|_{0,0} = Kl\cos\theta_0 = Kl$$

L'energia potenziale, con opportuna sostituzione, può essere vista sotto questa forma:

$$V = \frac{1}{2} B x^2 + \frac{1}{2} C \vartheta^2 + D x \vartheta$$

Le equazioni linearizzate risultano così:

$$\begin{cases} M\ddot{x} + Bx + D\vartheta = 2Ky \\ J^{*}\ddot{\theta} + C\vartheta + Dx = 0 \end{cases}$$