Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 1

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex1.1
Tre resistenze, collegate in serie e percorse da una corrente I di 2 A, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:

P1 = 20 W
P2 = 32 W
P3 = 24 W

Determinare i valori delle rispettive tensioni e delle resistenze

[V1 = 10 V, V2 = 16 V, V3 = 12 V, R1 = 5 Ω, R2 = 8 Ω, R3 = 6 Ω]
*{Si ricorda che l'espressione della potenza dissipata in un resistore si può esprimere come: P = V*I = R*I^2 = G*V^2. Quindi V1 = P1/I = 10 V, V2 = P2/I = 16 V mentre V3 = P3/I = 12 V. Le resistenze di ottengono o dall'espressione di P in funzione della resistenza e del quadrato della corrente o dalla equazione costitutiva del resistore V = R*I. Risulta R1 = V1/I = 5 W, R2 = V2/I = 8 W mentre R3 = V3/I = 6 W.}*

Ex1.2
Tre resistenze collegate in parallelo, dissipano rispettivamente le seguenti potenze:
P1 = 50 W
P2 = 25 W
P3 = 20 W
Inoltre la corrente I1 che percorre la resistenza R1 è pari a 5 A.

Determinare i valori delle resistenze R1, R2, R3 e la corrente totale.

[R1 = 2 Ω, R2 = 4 Ω, R3 = 5 Ω, Itot = 9.5 A]
*{Per ottenere i valori delle resistenze (o meglio, delle conduttanze) si sfrutta la relazione P = G*V^2. Ora, V è la stessa per tutte le resistenze in parallelo. Conoscendo la corrente in una di esse (I1) è possibile risalire quindi al valore della tensione V = P1/I1 = 10 V. Così risulta: G1 = P1/V^2 = 0.5 S da cui R1 = 1/G1 = 2 W, G2 = P2/V^2 = 0.25 S da cui R2 = 1/G2 = 4 W, mentre G3 = P3/V^2 = 0.2 S da cui R3 = 1/G3 = 5 W. Si può calcolare la corrente totale o come il rapporto tra la potenza totale e la tensione (Itot = Ptot/V = (P1+P2+P3)/V = 9.5 A) oppure come somma delle correnti di ogni resistenza (legge al nodo) Itot = I1+I2+I3 = V*G1+V*G2+V*G3 = 9.5 A. Dall'ultima espressione si nota che la corrente totale si può calcolare anche come porodotto della tensione per la conduttanza totale dell'oggetto costituito dal parallelo dei tre resistori Itot = Gtot*V = (G1+G2+G3)*V = 9.5 A.}*

Ex1.3
Dato il circuito in figura 1.1, sono noti:
P1 = 40 W
P2 = 30 W
P3 = 25 W
P4 = 35 W
I = 4 A.

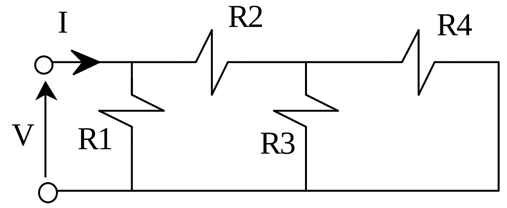


Fig. 1.1

Determinare i valori delle quattro resistenze e verificare il rapporto V/I.

[R1 = 26.41 Ω, R2 = 3.912 Ω, R3 = 18.78 Ω, R4 = 13.42 Ω, V/I = 8.125 Ω]
{Conoscendo la potenza dissipata in ogni resistore è possibile risalire al valore della totale potenza dissipata dall'oggetto a sinistra dei morsetti P = P1+P2+P3+P4 = 130W. Tale valore corrisponde anche al prodotto della tensione per la corrente; quindi V = P/I = 32.5 V. Sfruttando ora le equazioni costitutive, le leggi ai nodi e le leggi alle maglie è possibile percorrere il circuito da sinistra a destra in modo da ottenere i valori delle quattro resistenze. Di R1 si conosce potenza dissipata e tensione: G1 = $P1/V^2$ = 0.03787 S da cui R1 = 1/G1 = 26.41 W. Sfruttando la legge ai nodi e l'equazione costituiva è possibile conoscere la corrente circolante in R2:
*I2 = I-G1*V = 2.769 A. Quindi R2 = P2/I22 = 3.912 W. Ora è possibile conoscere la tensione sull'oggetto costituito dal parallelo di R3 con R4 sfruttando una legge alle maglie ed una equazione costitutiva: V34 (= V3 = V4) = V-R2*I2 = 21.67 V. Quindi G3 = $P3/V3^2$ = 0.05324 S da cui*
R3 = 1/G3 = 18.78 W e G4 = $P4/V4^2$ = 0.07453 S da cui R4 = 1/G4 = 13.42 W. La verifica del rapporto V/I = 32.5 V/ 4 A = 8.125 W si ottiene considerando che tale rapporto corrisponde al valore della resistenza totale dell'oggetto a sinistra dei morsetti. Esso è costituito dal parallelo di R1 con un oggetto a sua volta costituito dalla serie di R2 con il parallelo di R3 con R4, la cui conduttanza vale G34 = G3+G4 = 0.12777 S da cui R34 = 1/G34 = 7.827 W. La resistenza della serie vale allora R234 = R2+R34 = 11.739 W o meglio G234 = 1/R234 = 0.08519 S. La conduttanza totale vale G1234 = G1+G234 = 0.12305 S e quindi R1234 = 1/G1234 = 8.126 W, pari al valore di V/I (a parte i troncamenti effettuati).}

Ex1.4
Nel circuito in figura 1.2 sono noti:
R1 = 60 Ω, R2 = 60 Ω, R3 = 32 Ω, R4 = 80 Ω,
V = 125 V.

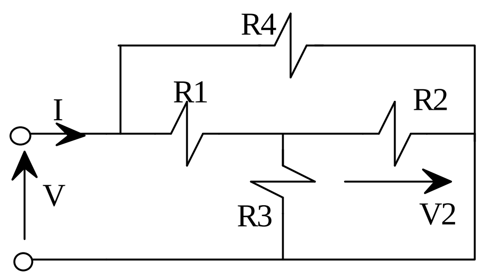


Fig. 1.2

Determinare i valori della totale corrente I e della tensione V2 ai capi della resistenza R2.

[I = 3.108 A, V2 = -32.26 V]
{La totale corrente I è facilmente calcolabile se fosse conosciuto il valore della resistenza totale dell'oggetto a destra dei morsetti. Occorre ridisegnare il circuito e notare che R4 risulta in parallelo ad un oggetto costituito dalla serie di R1 con un oggetto costituito, a sua volta, dal parallelo di R3 con R2 che possiede una conduttanza G23 = G2+G3 = 0.04792 S e quindi una resistenza
*R23 = 1/G23 = 20.87 W. Da qui, la serie di R1 con R23 equivale a R123 = R1+R23 = 80.87 W. O meglio G123 = 1/R123 = 0.01237 S. Quindi la conduttanza totale dell'oggetto a destra dei morsetti vale G1234 = G4+ G123 = 0.02487 S. Quindi I = G1234*V = 3.108 A. La tensione V2 si ottiene notando che la tensione V insiste sulla serie di R1 con l'oggetto R23 e che V2 ne è una parte (è la*

tensione sull'oggetto R23). Sfruttando la formula del partitore di tensione si ha che
*V2 = -V*R23/(R23+R1) = -32.26 V.}*

Ex1.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 1.3, con i seguenti dati:
R1 = 5 Ω, R2 = 10 Ω, R3 = 20 Ω, R4 = 30 Ω,
V1 = 10 V.

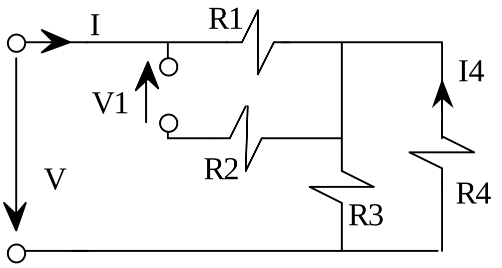


Fig. 1.3

Determinare la tensione V e la corrente I4

[V = -34 V, I4 = -0.8 A]
*{Poichè R2 non è percorso da corrente in quanto risulta in serie ad un circuito aperto, per la equazione cositutiva del resistore la tensione su R2 è nulla e quindi, per la legge alle maglie, la tensione V1 insiste sulla sola R1 ed R2 è ininfluente al problema. Di conseguenza si può facilmente calcolare la corrente I = V1/R1 = 2 A che è la stessa corrente che circola nell'oggetto ottenuto dal parallelo di R3 con R4. La sua conduttanza vale G34 = G3+G4 = 0.08333 S mentre la sua resistenza è l'inverso R34 = 1/G34 = 12 W. Per la legge alle maglie risulta, quindi, V = -R34*I-V1 = -34 V. E' possibile calcolare la corrente I4 dalla formula del partitore di corrente facendo attenzione ai segni:*
*I4 = -I*G4/(G3+G4) = -0.8 A.*
Un altro approccio potrebbe essere quello di considerare che V insiste sulla serie di R1 con un oggetto, costituito dal parallelo di R3 con R4, di resistenza R34 = 12 W. Per la formula del partitore di tensione si ha che V = -V1(R1+R34)/R1 = -34 V. La corrente I4 è facilmente calcolabile conoscendo la tensione V4 che insiste su R4: I4 = V4/R4. Ma, per la legge alle maglie, V4-V1-V = 0 da cui V4 = -24V e quindi I4 = V4/R4 = -0.8 A.}*

<u>Esercizi proposti</u>

Ex1.6

Il circuito in figura 1.4 presenta:
R1 = 20 Ω, R2 = 40 Ω, R3 = 20 Ω, R4 = 60 Ω,
V2 = 100 V.

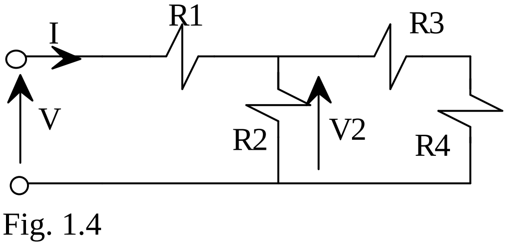


Fig. 1.4

Determinare V, I

[V = 175 V, I = 3.75 A]
{La tensione V si ottiene utilizzando la formula del partitore di tensione, considerando che V insiste su R1 e su un oggetto costituito dal parallelo di R2 con la serie di R3 ed R4. La serie di R3 con R4 equivale ad una resistenza R34 = R3+R4 =80 W mentre il parallelo tra R2 ed R34 ha una conduttanza G234 = G2 + G34 = 1/R2 + 1/R34 = 0.0375 S. La R234 = 1/G234 = 26.67 W. Quindi, poichè V2 = R234 /(R1+R234), si ha che*
V = V2(R1+R234)/R234 = 175 V. La corrente I si ottiene facilmente considerando che percorre oltre a R1 anche R234 la cui tensione vale V2. Quindi I = V2/R234 = 3.75 A.*

Un altro metodo consiste nel calcolare la corrente nella resistenza R2 come $I2 = V2/R2 = 2.5$ *A. Usando la formula del partitore di corrente è possibile ora risalire al valore della corrente I come* $I = I2*(G2+G34)/G2 = 3.75$ *A. Da qui, per la legge alle maglie, si ottiene che* $V = R1*I+V2 = 175$ *V}*

Ex1.7

Dato il circuito in figura 1.5 sono noti:
R1 = 60 Ω, R2 = 60 Ω, R3 = 32 Ω, R4 = 80 Ω,
I = 120 A.

Determinare I4.

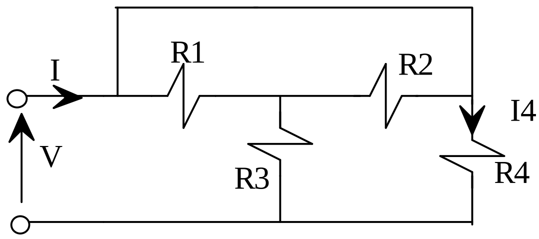


Fig. 1.5

[I4 = 52.39 A]
{R1 ed R2 sono in parallelo attraverso il cortocircuito superiore; il circuito si riduce al parallelo di R4 con un oggetto costituito dalla serie di R3 con il parallelo tra R1 ed R2; tale oggetto presenta una totale resistenza $R123 = R3+1/G12$ *dove* $G12 = G1+G2 = 0.03333$ *S. Quindi R123 = 62 W da cui* $G123 = 0.01613$ *S. Applicando la formula del partitore di corrente si ottiene:* $I4 = I * G4 /(G123+G4) = 52.39$ *A }*

Ex1.8

Date due resistenze R1 ed R2 in parallelo, sono noti: R1 = 20 Ω, P2 = 120 W, I tot = 10 A.

Determinare R2.
[R2 = 1.37 Ω oppure R2 = 292 Ω]
{Supponende di chiamare con I2 la corrente che percorre il resistore R2 si hanno due equazioni nelle due incognite I2 ed R2:
$I2 = Itot*G2/(G1+G2)$ *che deriva dalla formula del partitore di corrente e*
$P2 = R2*I2^2$*. Il sistema si puo' ricondurre ad una equazione del secondo ordine in R2. Esisteranno due soluzioni. Sono accettabili solo quelle di valore positivo.}*

Ex1.9

Il disco di un contatore di costante N=1200giri/kWh ha impiegato 40 secondi per compiere 30 giri.

Determinare la potenza.

[P=2250W]
{Occorre ricondurre il valore della costante al SI; ricordando che 1 kWh = 3600 kWs = 3600 kJ risulta N = 1200/3600 giri /kJ = 0.3333 giri/kJ; in 30 giri l'energia transitante vale $DWe = 30/N = 90$ *kJ = 90000 J. Quindi la potenza necessaria affinchè in 40 secondi vi sia il transito di 90000 J risulta* $P = DWe/40 = 2250$ *W}*

Ex1.10
Sia dato il circuito rappresentato in fig 1.6, sono noti
R1 = 4 Ω, R2 = 20 Ω, R3 = 80 Ω, R4 = 50 Ω, V = 100 V

Determinare V1 e la potenza P4 dissipata in R4

[V1 = -20V, P4 = 200W]
*{La tensione V1 si ottiene mediante l'applicazione della formula del partitore di tensione alla serie di R1 con l'oggetto costituito dal parallelo tra R2 ed R3 (R23 = 16 W). Quindi V1 = -V*R1/(R1+R23) = -20 V. La potenza dissipata in R4 (o meglio G4) si può ottenere ricordando che*
$P4 = G4 \cdot V4^2 = G4 \cdot V^2 = 200$ *W.}*

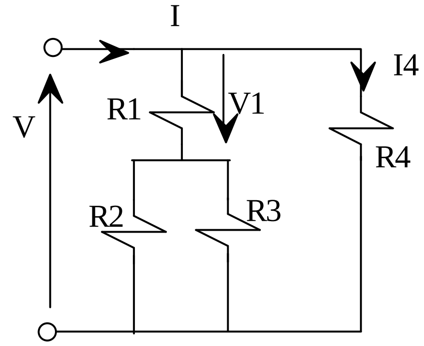


Fig. 1.6

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 2

<u>Esercizi svolti durante l'esercitazione</u>.

Ex2.1
Dato il circuito in figura 2.1, sono noti:
R1 = 40 Ω, R2 = 60 Ω, R3 = 12 Ω
R4 = 80 Ω, R5 = 70 Ω
V1 = 120 V, I4 = 50 A, I5 = 40 A.

Determinare la potenza elettrica generata dalla sorgente di corrente I4

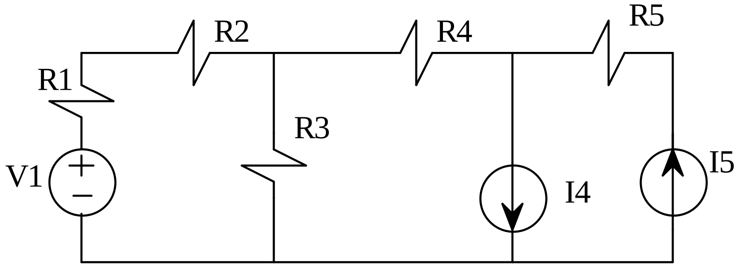


Fig. 2.1

[P_{I4} = 45.6 kW]
*{La potenza elettrica generata da I4 puo' essere calcolata in due modi: come il prodotto della tensione V4 su I4 (morsetto contrassegnato in basso) per la corrente I4 stessa o come bilancio delle potenze (potenze generate da V1 e da I5 meno le potenze dissipate nei resistori). Conviene il primo approccio. Si operano, inizialmente, tutte le semplificazioni possibili al di fuori di I4, oggetto del presente studio. Il circuito di destra e' costituito dalla serie di un generatore di corrente con un resistore. E' equivalente ad un generatore di corrente pari a I5 (basta applicare Norton e notare che la Geq è nulla, mentre la corrente di corto circuito e' proprio I5). Si nota anche che la tensione V4 risulta anche la tensione sul parallelo dei due generatori di corrente I4 e I5, che equivalgono ad un generatore di corrente equivalente I45=I4-I5 (verso il basso). La parte del circuito di sinistra e' equivalente ad un bipolo serie. Per la legge di Thevenin la resistenza equivalente R1234 è ottenuta dalla serie di R4 con il parallelo tra R3 e la serie di R1 con R2: R1234=90.71 Ω.. La tensione del generatore equivalente è pari alla tensione a vuoto ai morsetti di I45, che coincide con la tensione su R3, che, a sua volta, e' una quota parte della totale tensione V1. Applicando la formula del partitore di tensione si ha che Veq = R3*V1/(R1+R2+R3) = 12.86 V. Rimangono in gioco un generatore ideale di tensione Veq con in serie un resistore di resistenza Req ed il generatore di corrente I45. Si ha che V4 = -Veq+Req*I45 = 894.2 V. La potenza generata da I4 vale quindi P4 = I4*V4 = 45.6 kW.}*

Ex2.2
Dato il circuito in figura 2.2, sono noti:
R1 = 10 Ω, R2 = 5 Ω, R3 = 3 Ω
R4 = 4 Ω ,V1 = 30 V, V2 = 15 V, I4 = 18A.

Determinare la totale potenza dissipata nei resistori

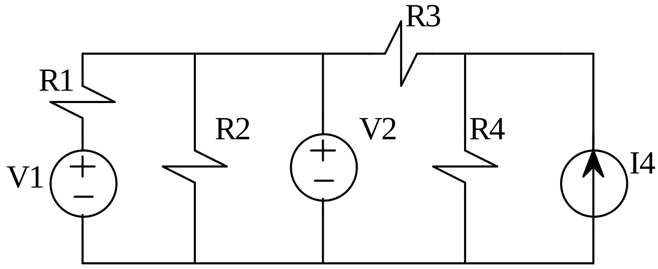


Fig. 2.2

[P_{R1} = 22.5W, P_{R2} = 45W, P_{R3} = 198.9W,
P_{R4} = 388.7 W]
{Il generatore ideale di tensione V2 fa si' che

*il circuito alla sua destra non "veda" il circuito alla sua sinistra, e viceversa. Quello che entrambi i sotto-circuiti "vedono" è semplicemente V2 (basta applicare Thevenin per accorgesi che la resistenza equivalente e' nulla). Non solo, R2 "vede" solo V2 e cosi' via. Quindi il problema si risolve studiando i tre sotto-circuiti separatamente. La potenza dissipata in R2 è semplicemente data da $P_{R2} = V2^2*G2 = 45$ W. La tensione su R1 vale (per la legge alle maglie) V1-V2. Quindi $P_{R1} = (V1\text{-}V2)^2*G1 = 22.5$ W. Il circuito di destra si puo' semplificare sostituendo il bipolo parallelo I4-G4 con l'equivalente serie V4-R4 con V4 = I4*R4 = 72 V. La tensione su R3 vale allora (partitore di tensione) V_{R3} = (V2-V4)*R3/(R3+R4) = -24.43 V, da cui P_{R3} = 198.9 W. L a potenza dissipata nella resistenza R4 dell'equivalente serie non e' la stessa della potenza dissipata nel resistore originale perche' l'equivalenza e' assicurata solo ai morsetti esterni, non interni. Infatti la potenza in R4 dell'equivalente serie vale 265.22 W (la tensione ai suoi capi vale (V2-V4)*R4/(R3+R4) = -32.57 V). La potenza richiesta, invece, puo' essere calcolata partendo dalla tensione sul bipolo parallelo che vale V2–V_{R3} = 39.43 V da cui P_{R4} =388.7 W }*

Ex2.3

Dato il circuito in figura 2.3, sono noti:
R1 = 10 Ω, R2 = 5 Ω, R3 = 3 Ω
R4 = 4 Ω, V1 = 30 V, I4 = 18 A, I3 = 6 A.

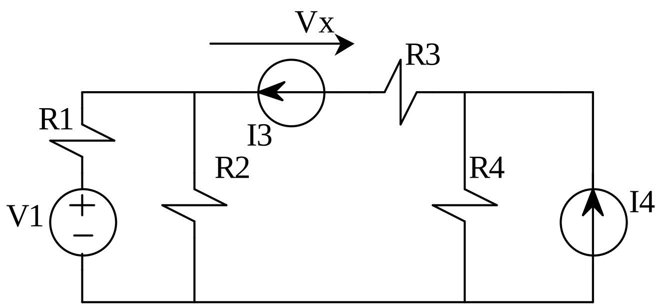


Fig. 2.3

Determinare il valore della tensione misurata Vx

[Vx = 0 V]

*{Per conoscere Vx basta semplificare il circuito intorno a I3. La parte sinistra equivale ad un bipolo serie con generatore di tensione Veq1 = V1*R2/(R1+R2)} = 10 V e resistenza equivalente Req1 = 1/(G1+G2) = 3.333 Ω. La parte di destra equivale ad un bipolo serie con generatore di tensione Veq2 = I4/G4 = 72 V e resistenza equivalente Req2 = R3+R4 = 7 Ω. Vx si ottiene, allora, con una legge all'unica maglia rimasta, sapendo che I3 percorre tutti i bipoli serie: Veq1+Req1*I3+Vx+Req2*I3-Veq2=0 da cui Vx = 0 V.}*

Ex2.4

Nel circuito in figura 2.4 sono noti:
R2 = 4 Ω, R3 = 3 Ω, R4 = 2 Ω,
R5 = 6 Ω, V1 = 30 V.

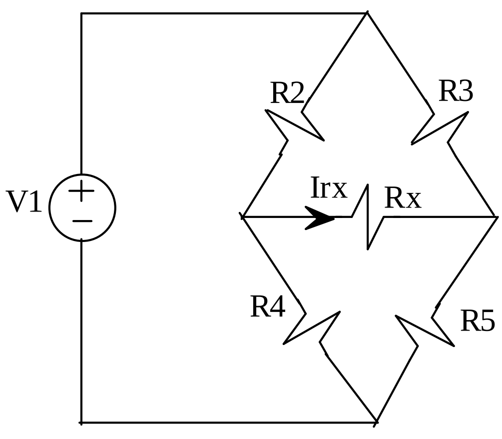


Fig. 2.4

Calcolare Rx affinchè Irx = 1A in valore assoluto.

[Rx = 6.667 Ω]

{Il problema e' localizzato su Rx. Conviene semplificare il circuito intorno a Rx utilizzando Thevenin o Norton. Il calcolo della resistenza equivalente "vista" dai morsetti di Rx può essere effettuato in due modi: o calcolando la resistenza equivalente vista dai morsetti di Rx dopo aver reso passiva la rete, o come rapporto tra la tensione del generatore equivalente (tensione a vuoto) del bipolo serie e la corrente del generatore equivalente

del bipolo parallelo (corrente di corto circuito). La tensione a vuoto si trova appoggiandosi ad una maglia (ad esempio quella costituita da R2, R3 ed il posto vuoto lasciato da Rx). Le tensioni su R2 e su R3 si trovano utilizzando la formula del partitore di tensione:
$V_{R2} = V1*R2/(R2+R4) = 20\ V$
$V_{R3} = V1*R3/(R3+R5) = 10\ V$
Vo (verso sinistra) $= V_{R3}-V_{R2} = -10\ V$
La resistenza equivalente di ottiene come serie del parallelo tra R2 e R4 e il parallelo tra R3 e R5, e vale Req = (R2//R4)+(R3//R5)= 3.333 Ω (il simbolo // viene usato per indicare il parallelo).
Considerando l'equivalente di tipo serie la corrente Ix si ottiene come Ix = Vo/(Req+Rx). Quindi Rx = Vo/Ix-Req = 6.667 Ω
L'altro metodo consiste nel calcolare la corrente di cto cto. La corrente di corto circuito (verso destra) si ottiene con una legge ai nodi (ad esempio il nodo costituito da R2, R4 e il corto circuito). Le correnti in R2 e R4 si trovano come quota parte della totale corrente erogata dal generatore V1. La resistenza totale vista da V1 è ora ottenuta dalla serie di due oggetti: il parallelo di R2 con R3 ed il parallelo tra R4 e R5. La nuova R2345 vale:
R2345 =R2//R3+R4//R5 = 3.214 Ω
Itot = V1/R2345 = 9.334 A
$I_{R2} = Itot*G2/(G2+G3) = 4\ A$
$I_{R4} = Itot*G4/(G4+G5) = 7\ A$
Icc (verso destra) $= I_{R2}-I_{R4} = -3\ A$
Quindi la resistenza equivalente vale Req = Vo/Icc = 3.333 Ω. }

Ex2.5

Sia dato il circuito rappresentato in figura 2.5, con i seguenti dati:
R1 = 5 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 3 Ω, R4 = 6 Ω,
V1 = 18 V, I1 = 12 A.

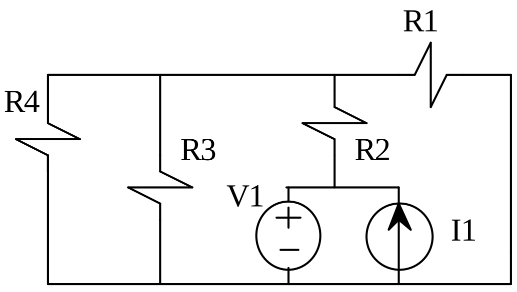


Fig. 2.5

Determinare la potenza dissipata nel resistore R4.

[P_{R4} = 1.997 W]
{Occorre semplificare il circuito esterno ad R4. Dapprima si nota che il generatore di corrente I1 si trova in parallelo al generatore di tensione V1. Agli effetti esterni equivalgono al solo generatore di tensione V1 (basta applicare Thevenin al parallelo di I1 e V1). Ora R4, R3, R1 ed il bipolo serie V1-R2 sono in parallelo. Trasformando il bipolo serie in un bipolo di tipo parallelo si ottengono quattro resistori (R1, R2, R3 e R4) in parallelo ad un generatore di corrente Ieq = V1/R2 = 3 A. La potenza dissipata in R4 si conosce se si conosce la tensione o la corrente di R4. Ma la corrente in R4 è una quota parte della corrente Ieq: $I_{R4} = Ieq*G4/(G1+G2+G3+G4) = 0.5769\ A$.
Allora $P_{R4} = R4*I_{R4}^2 = 1.997\ W$*}*

Esercizi proposti

Ex2.6

Il circuito in figura 2.6 presenta:
R1 = 5 Ω, R2 = 3 Ω, R3 = 2 Ω, R4 = 6 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 20V, I1 = 12 A.

Determinare la corrente I11 e la potenza elettrica assorbita dalla sorgente di tensione V1
[I11 = 3.625 A, P_{V1} = 65.25 W]

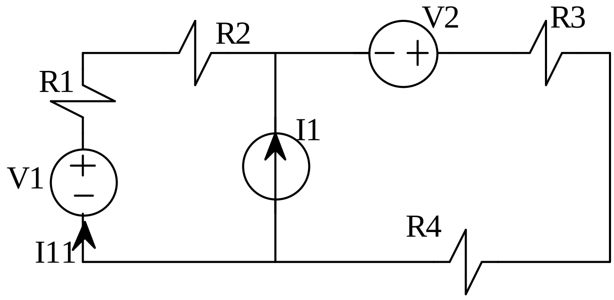


Fig. 2.6

{*Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore R12 equivalente alla serie di R1 con R2, V1 con R34, equivalente alla serie di R3 e R4, V2 e I1. Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:*
*V = (V1*G12-V2*G34+I1)/(G34+G12) = 47 V*
Tornando al circuito di fig. 2.6, è ora possibile calcolare la corrente I11:
I11 = (V1-V)/(R1+R2) = -3.625A.
*La potenza assorbita dalla sorgente V1 è allora pari a P_{V1}=-V1*I11 = 65.25W*}

Ex2.7

Dato il circuito in figura 2.7 sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 2 Ω, R4 = 5 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V.

Determinare la potenza dissipata dal resistore R4 e le potenze generate P_{V1} e P_{V2}.

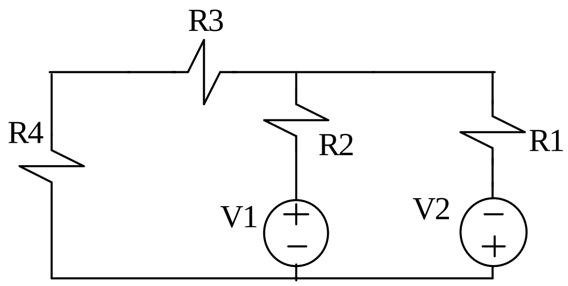


Fig. 2.7

[P_{R4} = 1.304 W, P_{V1} = 64.72 W, P_{V2} = 82.12 W]
{Nel circuito sono presenti tre bipoli in parallelo: il resistore R34 equivalente alla serie di R3 con R4, V1 con R2 e V2 con R1. Trasformando tutti i componenti in bipoli di tipo parallelo si ottiene facilmente la tensione comune ai bipoli:
*V = (V1*G2-V2*G1)/(G34+G2+G1) = -3.574 V*
Tornando al circuito di fig. 2.7, è ora possibile calcolare tutte le correnti:
I_{R4} = V/(R3+R4) = -0.5106 A; I_{V1} (verso il basso) = (V-V1)/R2 = -3.5957 A
I_{V2} (verso il basso) = -I_{R4}-I_{V1} = 4.106 A . Quindi P_{R4} = R4 I_{R4}^2 = 1.304 W;*
P_{V1} = V1(-I_{V1}) = 64.72 W; P_{V2} = V2*I_{V2} = 82.12 W; }*

Ex2.8

Dato il circuito in figura 2.8 sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 15 Ω, R3 = 5 Ω, R4 = 10 Ω,
R5 = 25 Ω, R6 = 8 Ω, V1 = 25 V, I5 = 1 A

Determinare la potenza dissipata in R6
[P6 = 16.10 W]

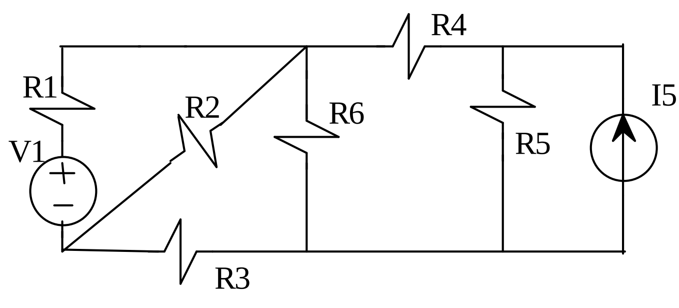


Fig. 2.8

{La potenza dissipata su R6 può essere calcolata come $P6 = R6*I6^2$ oppure come $P6 = G6*V6^2$. Conviene semplificare il circuito a sinistra e a destra del resistore R6 calcolando i parametri dei bipoli equivalenti serie o parallelo. Per quello che riguarda il circuito a sinistra si può notare che è costituito dal parallelo di V1 e R1 con R2 che sono a loro volta in serie a R3. Si può quindi calcolare il bipolo equivalente serie, la resistenza equivalente è data dalla serie del parallelo di R1 con R2 con R3:

$Req = (R1//R2)+R3 = 8.158\ \Omega$ (il simbolo // indica il parallelo).

La tensione a vuoto è la tensione sul resistore R2 e può essere calcolata con la formula del partitore di tensione come:

$Vo = V1*R2/(R1+R2) = 17.73\ V$

Il circuito di destra ouò essere trasformato nel suo equivalente serie con una resistenza equivalente Req1 pari alla serie di R4 e R5:

$Req1 = R4+R5 = 35\ \Omega$

E una tensione a vuoto pari a $Vo1 = R5*I5 = 25V$. LA tensione V6 ai capi di R6 puo' essere facilmente calcolata trasformando i bipoli serie nel loro equivalente parallelo come:

$V6 = Geq*Vo+Geq1*Vo1/(Geq+Geq1+G6) = 11.35\ V$

La potenza dissipata su R6 vale quindi $P6 = G6*V6^2 = 16.10\ W$}

Ex2.9

Dato il circuito di fig. 2.9 sono noti:

R1 = 3 Ω, R2 = 2 Ω, R3 = 5 Ω, R4 = 6 Ω,
R5 = 4 Ω, R6 = 1 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 20 V, I1 = 8A

Determinare il bipolo equivalente serie visto dai terminali P Q

[Vo = 40 V, Req = 9 Ω]

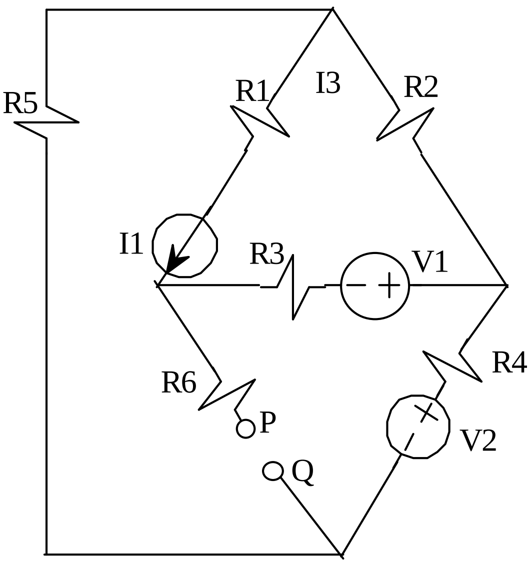


Fig. 2.9

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 8

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex8.1
Dato il circuito in figura 8.1 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 2 Ω, R3 = 7 Ω
δ1 = 1 mm, δ2 = 1.3 mm, δ3 = 1.5 mm
A = 8 cm^2, N1 = 100, N2 = 500
V1 = 30 V
Si consideri la permeabilità del ferro infinita.
Determinare la totale energia immagazzinata.
[W=0.082 J]

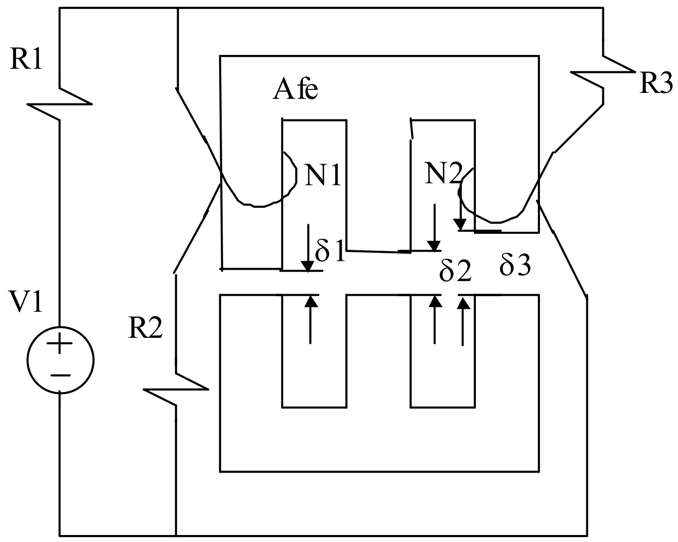


Fig. 8.1

{Per prima cosa è necessario calcolare i parametri di auto e mutua induttanza. Si disegna quindi la rete magnetica, poiché la permeabilità del ferro è ipotizzata infinita, nel circuito magnetico compariranno solo le riluttanza dei traferri. In particolare si ottiene quanto segue: $\theta 1 = \delta 1/(\mu o*Afe) = 9.957*10^5 H^{-1}$, $\theta 2 = \delta 1/(\mu o*Afe) = 1.293*10^6 H^{-1}$ $\theta 3 = \delta 1/(\mu o*Afe) = 1.492\ 10^6 H^{-1}$*, dove μo è la permeabilità dell'aria (*$\mu o = 4*p*10^{-7}$*). Le auto induttanze si trovano come rapporto tra il numero di spire al quadrato e la riluttanza equivalente vista ai morsetti di na delle due f.m.m. quando il circuito sia reso passivo. Si ottiene quindi che* $\theta eq1 = 1/(\Lambda 2+\Lambda 3)+\theta 1$ *e* $L1 = N1^2/\theta eq1 = 5.926$ *mH. Per l'auto induttanza L22 si ha che* $\theta eq2 = 1/(\Lambda 2+\Lambda 2)+\theta 3$ *e* $L2 = N2^2/\theta eq2 = 122$ *mH. Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che* $\theta eq21 = (1/(\Lambda 2+\Lambda 3)+\theta 1)*(\Lambda 3/(\Lambda 3+\Lambda 2))$ *e* $Lm = N1*N2/\theta e21q = 14$ *mH. Per il calcolo dell'energia immagazzinata è necessario calcolare la corrente Ia e Ib che percorre i due avvolgimenti. Conviene allora trasformare V1-R1 nel suo equivalente parallelo e utilizzare la regola del partitore di corrente. Si ottiene quindi* $Ia = I1*G2/(G1+G2+G3) = 2.625$ *A, e* $Ib = I1*G3/(G1+G2+G3)= 0.75$ *A. Poiché entrambe le correnti entrano nei morsetti contrassegnati si ottiene* $W = ½*L1*Ia^2+ ½*L2*Ib^2+Lm*Ia*Ib=0.082$ *J}*

Ex8.2

Dato il circuito in figura 8.2 funzionante in regime stazionario, sono noti:

R1 = 4 Ω, R2 = 3 Ω

R3 = 6 Ω,

N1 = 2000, N2 = 1500,

V1 = 200 V, V2 = 150 V, I1 = 10 A

Afe = 5 cm^2, δ = 1mm, L = 1mH, μfe infinita

Determinare la totale energia magnetica immagazzinata

[W_L = 1.25 J, Wμ = 0.681 J, Wtot = 1.931 J]

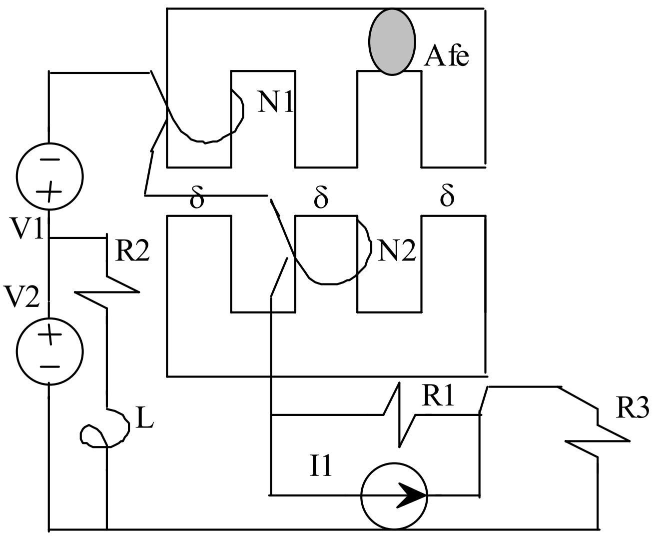


Fig. 8.2

*{Si procede con il calcolo dei parametri di auto e mutua induttanza. L'auto induttanza è data da L1 = $N1^2$/θeq1 = 1.676 H, dove la θeq1 è data dalla serie del parallelo delle due riluttanze θδ con θδ. L'auto induttanza L2 si calcola come rapporto tra il quadrato del numero di spire N2 e la riluttanza equivalente θeq2 che visto la simmetria del circuito magnetico è pari a θeq1. Si ottiene quindi L2 = $N2^2$/θeq2 = 0.942 H. Per il calcolo della mutua induttanza si alimenta uno dei due avvolgimenti lasciando a vuoto il secondo e si calcola il rapporto tra il flusso concatenato con il secondo avvolgimento e la corrente che percorre il primo avvolgimento. Si ottiene quindi che θeq21 = (3*θδ) e Lm = N1*N2/θe21q = 0.628 H. Si contrassegnano poi i morsetti dei due avvolgimenti e risulta che il morsetto superiore del primo avvolgimento e quello inferiore del secondo sono i morsetti corrispondenti. Ritornando al circuito elettrico è necessario calcolare la corrente che percorre il mutuo induttore per calcolare il contributo di energia immagazzinata legata al mutuo induttore. Trasformando il bipolo parallelo R1-I1 nell'equivalente serie si ottiene la corrente che percorre il mutuo induttore I = (V2-V1+R1*I1)/(R1+R3)=-1 A. Poiche' tale corrente entra nel morsetto contrassegnato del primo avvolgimento ed esce da quello contrassegnato del secondo, l'espressione dell'energia è la seguente: W = ½*L1*Ia^2+ ½*L2*Ib^2-Lm*Ia*Ib=0.681 J. Il contributo di energia legato all'induttanza L è dato da W_L = ½*L*I_L^2 = ½*L*$(V2/R2)^2$=1.25 J e quindi l'energia totale è data da Wtot = W+W_L = 1.931 J}*

Ex 8.3

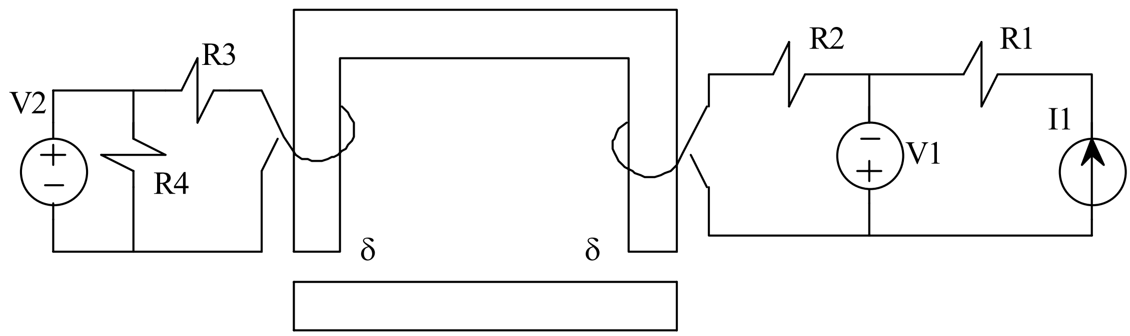


Fig. 8.3

Dato il circuito in figura 8.3 funzionante in regime stazionario, sono noti:
V2 = 40 V,
V1 = 30 V,
R1 = 6 Ω,
R2 = 10 Ω,
R3 = 4 Ω,
R4 = 2 Ω
N1 = 100, N2 = 500 Afe = 8 cm^2, I1 = 10 A
δ = 0.8 mm

Determinare i valori di auto e mutua induttanza e l'energia magnetica immagazzinata

[L2 = 157 mH, L1 = 6.283 mH, Lm = 31 mH, Wm = 0.079 J]

{Si procede con il calcolo dell'auto e mutua induttanza. L'auto induttanza L1 è data da L1 = $N1^2/(2*\theta\delta)$ = 6.283 mH, dove $\theta\delta = d/(\mu o*Afe)$. L'auto induttanza L2 è data da L2 = $N2^2/(2*\theta\delta)$ = 157 mH. La mutua induttanza Lm è data da Lm = $N1*N2/(2*\theta\delta)$= 31 mH. I morsetti ocrrispondenti sono i due superiori dei due avvolgimenti. Per calcolare l'energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare le correnti Ia e Ib che percorrono i due avvolgimenti. Sostituendo le induttanze con dei corto circuiti si ottiene Ia = V2/R3 = 10 A (entrante nel morsetto contrassegnato), Ib = V1/R2 = 3 A uscente dal morsetto contrassegnato. L'energia immagazzinata ha quindi la seguente espressione: W = $½*L1*Ia^2+ ½*L2*Ib^2-Lm*Ia*Ib$=0.079 J}

Ex8.4

Dato il circuito in figura 8.4 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 6 Ω
N = 100,
V1 = 18 V, Afe = 100 cm^2,
δ = 1mm,
C = 6 μF
μfe infinita

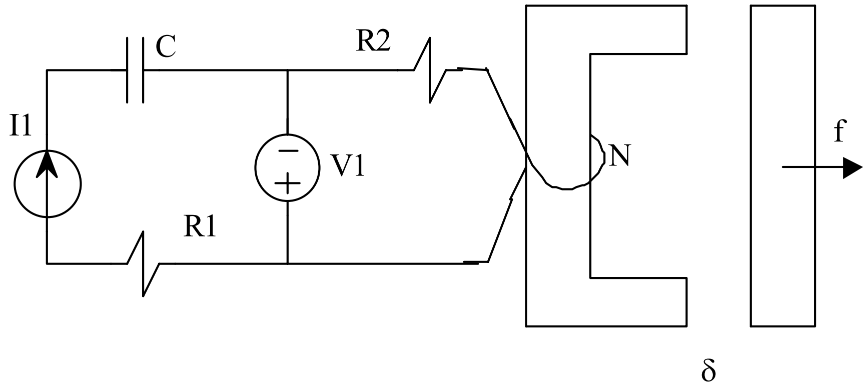


Fig. 8.4

Determinare la forza f

[f = - 282.74 N]

{Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso ϕ che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre l'avvolgimento di N spire e poi si risolverà la rete magnetica. Ricordando che in regime stazionario le capacità si comportano come circuiti aperti e le induttanze come corto circuiti, tale corrente è data da I = V1/R2 = 3 A. Se si disegna la rete magnetica, si ottiene una sola maglia e il calcolo del flusso nei traferri porta a $\phi = (N*I)/(2*\theta\delta)$ =1.885 mWb. La forza f si calcola come $f = 2*\phi^2/(2*\mu o*Afe)$ = 282.74 N (è una forza attrattiva)}

<u>Esercizi proposti</u>

Ex8.5

Dato il circuito in figura 8.5 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 6 Ω, R3 = 8 Ω
N1 = 100, N2 = 150
I1 = 18 A, Afe = 100 cm^2,
δ = 1mm,
μfe infinita

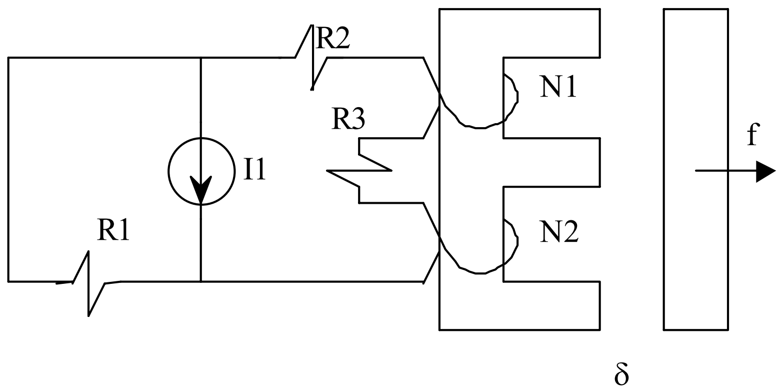


Fig. 8.5

Determinare la forza f

[f = - 898.126 N]

*{ Per il calcolo della forza è necessario calcolare il flusso f che si ha nei traferri. Si procede quindi con il calcolo della corrente che percorre l'avvolgimento di N spire e poi si risolverà la rete magnetica. Tale corrente si calcola utilizzando la regola del aprtitore di corrente ed è data da I = I1*G23/(G23+G1) = 3.176 A, dove G23 = 1/(R2+R3)=0.071 S. Se si disegna la rete magnetica, si ottengono due maglie, trasformando i due bipoli serie M1-$\theta\delta$ e M2-$\theta\delta$*

nell'equivalente parallelo si ottiene la tensione magnetica ai capi della riluttanza del ramo centrale $U = ((N1*I/\theta\delta)- (N2*I/\theta\delta))/(3/ \theta\delta) = -52.94$ Asp diretta verso sinistra. I flussi nei tre traferri sono espressi nel seguente modo $\phi 1 = (U-N1*I)/\theta\delta = -4.657$ mWb, $\phi 2 = (U)/\theta\delta = -0.6653$ mWb $\phi 3 = (U+N2*I)/\theta\delta = 5.322$ mWb. La forza f si calcola come $f = (\phi 1^2+ \phi 2^2+ \phi 3^2)/(2*mo*Afe) = 898.12$ N (è una forza attrattiva)}

Ex8.6

Dato il circuito in figura 8.4 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 5 Ω
N1 = 100, N2 = 500,
V1 = 20 V, Afe = 8 cm^2,
L = 2mH, C = 8 μF
μfe infinita
δ = 1.5 mm

Determinare l'energia magnetica immagazzinata

[WL = 0.8579 J, W = 0.016 J, Wtot = 0.874 J]

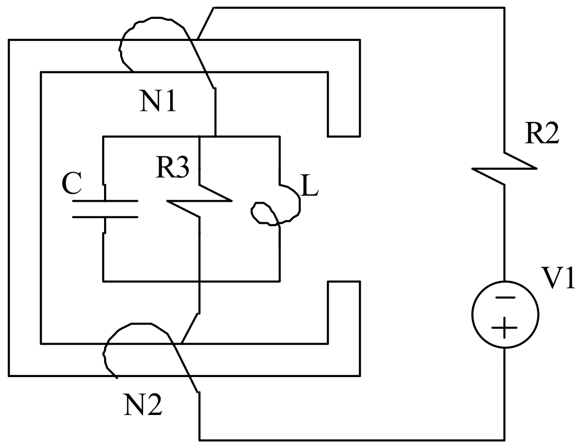
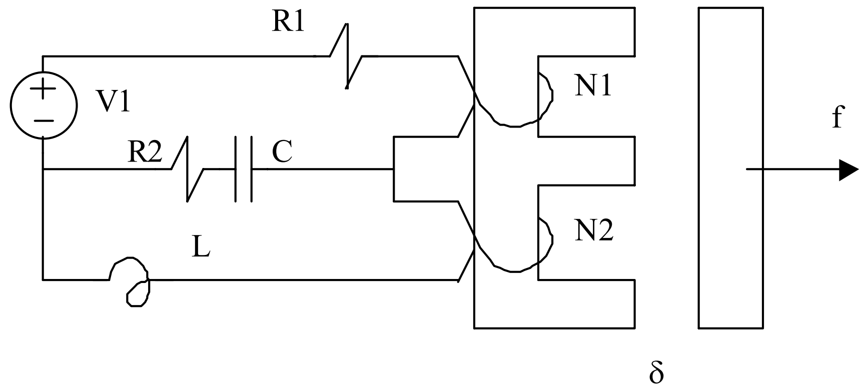


Fig. 8.6

{Per il calcolo delle auto e mutue induttanze è necessario tracciare la rete magnetica. Si ottiene quindi che $L1 = N1^2/(\theta\delta) = 6.702$ mH, $L2 = N2^2/(\theta\delta) = 168$ mH. Il coefficiente di mutua induttanza è pari a $Lm = N2*N1/(\theta\delta) = 34$ mH. I morsetti corrispondenti sono quello inferiore dell'avvolgimento N1 e quello superiore dell'avvolgimento N2. Per calcolare la totale energia magnetica immagazzinata è necessario calcolare la corrente che percorre l'induttanza L e la corrente del mutuo induttore. Poiché il condensatore in regime stazionario equivale ad un circuito aperto, la resistenza R3 risulta corto circuitata e il circuito elettrico è costituito da una sola maglia che comprende V1 e R2. Tale corrente è pari a $I = V1/R2 = 4$ A. L'energia immagazzinata nell'induttanza L è quindi pari a $W_L = ½*L*I^2= 0.016$ J e l'energia immagazzinata nel mutuo induttore è pari a $W = ½*L1*I^2+ ½*L2* I^2-Lm* I^2=0.8579$ J. Quindi la totale energia immagazzinata è data dalla somma dei due contributi ed è pari a Wtot = 0.874 J }

Ex8.7
Dato il circuito in figura 8.7 funzionante in regime stazionario, sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 7 Ω,
N1 = 100, N2 = 250
L = 3 mH, C = 4 μF,
Afe = 18 cm^2,
δ = 1.75 mm,
μfe infinita
V1 = 20 V



Determinare la forza f agente sulla struttura di sinistra

[f = 384.045 N]

Fig. 8.7

*{ Per il calcolo della forza è necessario calcolare i flussi nei traferri. Essendo il regime stazionario si ha che la corrente I è pari a I = V1/R1 = 4 A. La rete magnetica è costituita da 2 maglie, e trasformando tutti i bipoli nel loro equivalente parallelo è possibile calcolare la tensione magnetica tra i due nodi della rete magnetica. Questa vale U = ((N1*I/θδ)- (N2*I/θδ))/(3/ θδ) = –200 Asp. Da cui è possibile calcolre i flussi ϕ1 = (N1*I-U)/θδ = 0.77552 mWb, ϕ2 = -(U)/θδ = -0.2585 mWb ϕ3 = (U+N2*I)/θδ = 1.034 mWb. La forza f di natura attrattiva è allora pari a come f = ($\phi1^2$ + $\phi2^2$ + $\phi3^2$)/(2*mo*Afe) = 384.045 N}*

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 7

<u>Esercizi svolti durante l'esercitazione</u>.

Ex7.1
Dato il circuito in figura 7.1 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
R1 = 0.1 Ω, R2 = 5 Ω, R3 = 5 Ω
X4 = 3 Ω, X5 = 4 Ω
Xc = 6 Ω
$\overline{Vs}$ =50+j80 V, $\overline{Is}$ = 10 A
k = 0.8

Determinare la potenza dissipata su R1.
[P_{R1}=6.4 W]

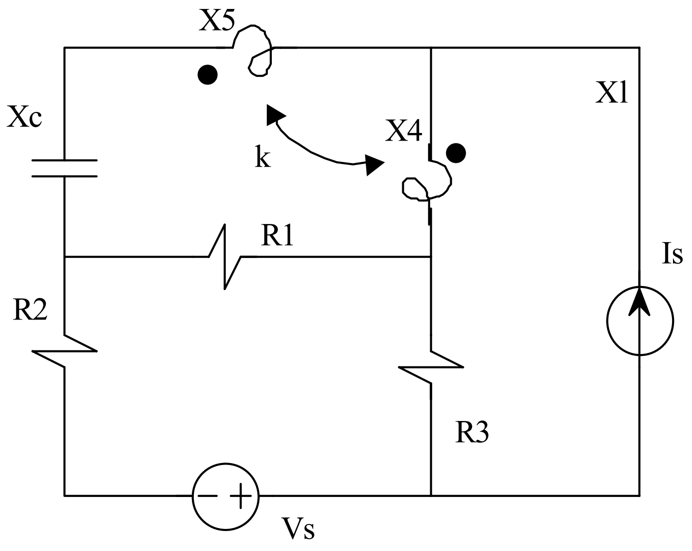


Fig. 7.1

{Conviene determinare il bipolo equivalente serie ai morsetti del resistore R1. E' quindi necessario determinare la tensione a vuoto e la resistenza equivalente.
Per determinare la tensione a vuoto conviene scrivere una legge alla maglia che comprende i resistoriR2, R3 e il generatore Vs. Ipotizzando che la corrente I3 che percorre R3 si diretta verso il basso e la corrente I4 che percorre R4 sia diretta verso l'alto, e calcolando la tensione a vuoto diretta verso sinistra, si ottiene la seguente equazione fasoriale:
*Vv = -(Vs+R2*I5+R3*I4). E' quindi necessario determinare le due correnti. Per fare questo si scrive una equazione alle maglie più esterna e al nodo e si ottiene quanto segue:*
$Vs+V_{R3}+V_{X4}+V_{X5}+V_{XC}+V_{R2} = 0$
$Is = I4-I5$
I diversi contributi che compaiono nelle due equazioni sono i seguenti:
V_{R3} *=R3*I3,* V_{R2}*=R2*I2,* V_{Xc} *= -j*Xc*I5,* V_{X4} *= j*X4*I4+j*X45*I5,* V_{X5} *= j*X45*I4+j*X5*I5 (dove* $X45 = k*\sqrt{X4*X5} = 2.77\ \Omega$*. Si ottengono quindi due equazioni in due incognite, e sostituendo si ottiene I5 = (Vs+(R3+j(X4+X45)) *Is)/(R2+R3+j*(X4+X5+2*X45-Xc))= -13.31-j5.06 A e I4 = Is+I5=-3.31-j5.06 A.*
Sostituendo si ottiene allora la tensione a vuoto che e' pari a Vv = 33.12-j29.38 V.
Per determinare l'impedenza equivalente si rende la rete passiva, si impone una corrente sonda I e si calcola la tensione V* che ne segue. Si trova quindi che l'impedenza equivalente Zeq = V*/I* e' data dal parallelo della resistenza R23 = R2+R3 con l'impedenza Z = j*(X4+X5+2*X45-Xc), si ottiene allora Zeq = 1/(1/Z+1/R23) = 3+j4.58 Ω. La potenza dissipata e' data da* $P_{R1} = R1 + I_{R1}^2$ *il modulo della corrente che percorre la resistenza R1 è pari a* $I_{R1} = |Vv|/|Zeq+R1| = 8$ *A da cui* P_{R1} *= 6.4 W}*

Ex7.2
Dato il circuito in figura 7.2 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
R1 = 5 Ω, R2 = 9 Ω
C = 200 μF, Ll = 1 mH, L2 = 3 mH, k = 0.85
V = 80 V, A = 10 A, $\phi = \pi/3$, f = 100 Hz

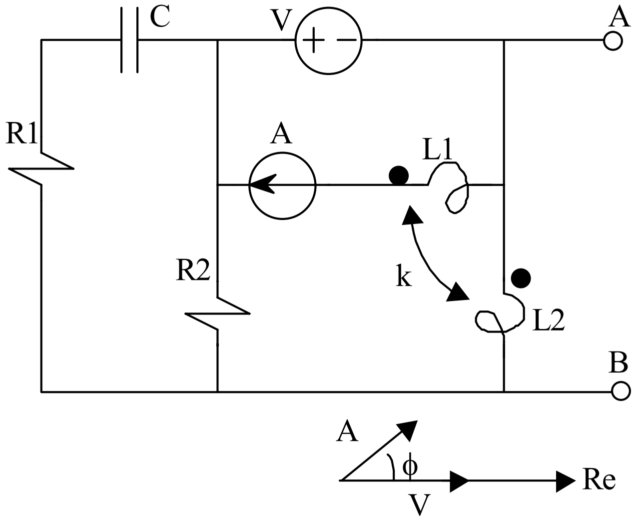


Fig. 7.2

Determinare il bipolo equivalente serie visto ai morsetti AB

[Vv = 10.735-j40.125 V, Zeq = 0.755-j1.983 Ω]

*{i fasori rappresentativi dei due generatori sono i seguenti: A = $A*e^{j\phi}$ = 5+j*8.667 A, V = 80 V. La mutua induttanza e' data da Lm = $k*\sqrt{L1*L2}$ = 1.472 mH. Da cui si ricavano le rispettive reattanze: X1 = ωL1 = 0.628 Ω, X2 = ωL2 = 1.885 Ω, Xm = ωLm = 0.925 Ω, inoltre Xc = 1/(ωC) = 7.958 Ω. Prima di cercare l'equivalente serie, e' possibile semplificare la rete sostituendo a R1-Xc-R2 l'impedenza equivalente data dal parallelo della serie di Xc -R1 con R2, chimando questa impedenza z1 si ottiene Z1= 1/(Y1+1/R2) = 4.627-j*2.486 Ω, dove Y1 = 1/(R1-jXc). La tensione a vuoto e' la tensione VX2 ed è pari a VX2 = jX2*I2-jXm*A (con I2 diretta verso il basso). E' quindi necessario calcolare la corrente I2, conviene considerare la maglia esterna costituita da Z1, V, X2. La corrente che percorre Z1 è ancora I2 e dalla legge alla maglia si ricava I2 = (jXm*A-V)/(jXL2+Z1) = -18.83-j1.445 A. La tensione a vuoto risulta allora pari a Vv = 10.735-j40.125 V. Per il calcolo di Zeq si impone una tensione sonda V* e si calcola la tensione I* che ne deriva una volta che si sia resa la rete passiva. Si ottiene Zeq = V*/I* = 1/((1/Z1)+1/(jX2))= 0.755+j1.983 Ω}*

Ex 7.3
Dato il circuito in figura 7.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
V = 20 V, R = 5 Ω, Xc = 2 Ω
X1 = 4 Ω, X2 = 5 Ω, k = 0.9
f = 50 Hz, $\delta = \pi/6$

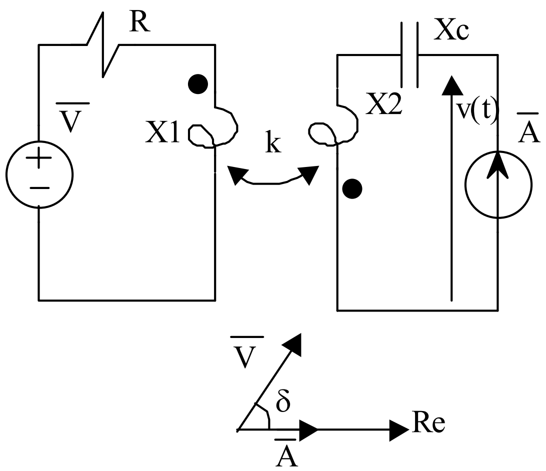


Fig. 7.3

Determinare la tensione v(t)

[v(t) = 19.733*cos(314.15t-0.077) V]

{Si calcola il bipolo equivalente serie visto ai morsetti del generatore di corrente. La tensione a vuoto è data dalla sola V2 = -jXmI1. La corrente I1 si trova scrivendo una

*legge delle tensioni alla prima maglia che risulta la seguente: V = R*I1+jX1*I1, da cui I1 = V/(R+jX1) = 3.088-j0.47 A (presa entrante nel morsetto contrassegnato) e Vv = -1.893-j12.43 V. Per il calcolo dell'impedenza equivalente si impone una corrente sonda I* e si calcola la tensione V* che ne risulta, la Zeq è data dal loro rapporto (Zeq = V*/I*). Imponendo tale corrente si ottengono le seguenti due equazioni:*
*jX1*I1-jXm*I*+R1*I1= 0*
V = jX2I*-jXmI1-jXc+I**
Da cui si ricava V/I* = jX2+Xm^2/(R1+jX1)-jXc = 1.976+j*1.42 Ω*
*Il fasore rappresentativo della tensione V richiesta è pari a V = Vv+Zeq*A = 13.953*e$^{-j0.077}$, da cui si ottiene la seguente espressione in funzione del tempo: v(t) = 19.733*cos(314.15t-0.077) V}*

Ex7.4

Dato il circuito in figura 7.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$\overline{A1}$ = 5-j5 A, $\overline{V1}$ = 40 V

$\overline{V2}$ =j30 V, R = 4 Ω,

X1 = 2 Ω, X2 = 8 Ω, k = 0.9

$\overline{Z1}$ = 3 Ω, $\overline{Z2}$ = j2 Ω,

$\overline{Z3}$ = j2 Ω, $\overline{Z4}$ = 1Ω

Determinare la potenza dissipata sul resistore R.

[P_R = 23.75 W]

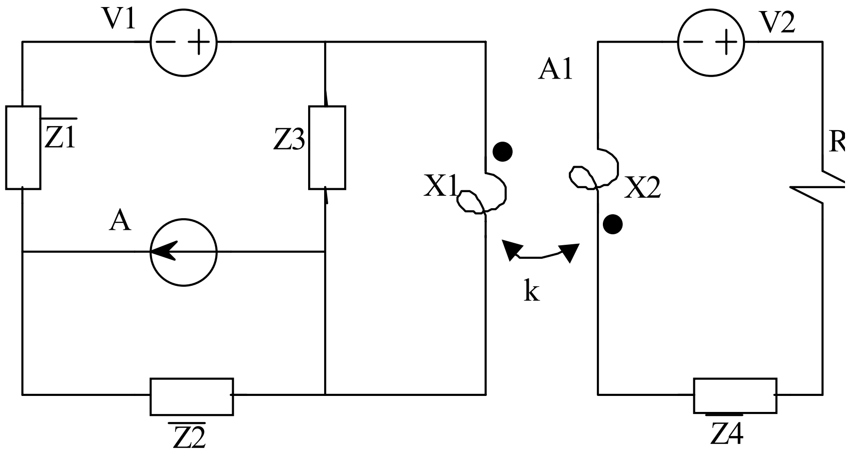


Fig. 7.4

*{Conviene calcolare il bipolo equivalente serie visto ai morsetti del resistore R. Procedendo per semplificazioni successive si trova il bipolo equivalente serie ai morsetti di X1 e poi quello a i morsetti di R. Per il calcolo del bipolo equivalente serie ai morsetti di X1, si calcola la tensione a vuoto Vv1e l'impedenza equivalente Zeq1. La tensione a vuoto è data da Vv1 = Z3*I3, trasformando il bipolo parallelo A-Z2 nel suo equivalente serie si trova con la legge del partitore di tensione la tensione a vuoto Vv1 = (V1+Z2*A)*Z3/(Z3+Z1+Z2) = 13.6+j*15.2 V. L'impedenza equivalente eì data dal parallelo di Z3 con la serie di Z1 e Z2, Zeq1 = 1/((1/Z3)+1/(Z1+Z2)) = 0.48+j*1.36 Ω. Si calcola ora il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del resistore La tensione a vuoto è pari alla somma di V_{X2} e di V2. La tensione Vx2 è data da V_{X2} = -jXmI1. La corrente I1 si calcola scrivendo una legge alla maglia, si ottiene quindi la seguente relazione jX1*I1-Vv1+Zeq1*I1 = 0, da cui I1 = 5+j*3.33 A, sostituendo si ottiene la tensione a vuoto Vv = -12+j12 V. Per il calcolo dell'impedenza equivalente si impone una corrente sonda I* entrante nel morsetto superiore e si calcola la tensione V* diretta verso l'alto che ne deriva, l'impedenza equivalente è data dal rapporto di tale tensione e della corrente sonda. Si ottiene V* = jX2*I*-jXm*I1+Z4*I*, dove la corrente I1 (diretta verso il morsetto contrasseganto) puo' essere calcolata considerando la prima maglia dalla seguente legge delle tensioni jX1*I1-jXm*I*+Zeq1*I1, da cui I1 = jXm+I*/(Zeq1+jX1), sostituendo si ottiene l'impedenza equivalente Zeq = jX2+Xm^2/(Zeq1+jX1)+Z4 = 1.54+j4.22 Ω. La potenza dissipata e' data dal prodotto della resistenza per il modulo della corrente al quadrato, si ottiene alloro $P_R = R*\left|\frac{Vv}{R+Zeq}\right|^2$ = 23.75 W}*

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 6

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex6.1
Dato il circuito in figura 6.1 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 4 Ω, R3 = 5 Ω
R4 = 4 Ω, Xc1 = 2 Ω, Xc2 = 3 Ω
Xl = 2 Ω, Iz = 20 A, Pz = 400 W
Qz = 300 Var (ind)

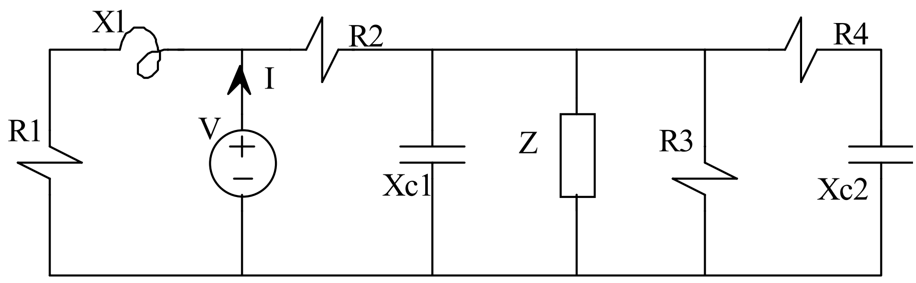


Fig. 6.1

Determinare i valori della tensione del generatore V, della corrente da esso erogata e del loro sfasamento reciproco.

[V = 125.78 V, I = 57.38 A, $\phi = 18.97^{o}$ (ind.)]

{Si procede seguendo il metodo di Boucherot. Per trovare la tensione V è necessario trovare la potenza attiva, reattiva e apparente totale ai morsetti del generatore. Per fare questo conviene dividere la rete in tre sezioni:

- *sez a comprende Xc1, Z, R3, R4 e Xc2*
- *sez. b comprende R2;*
- *sez. c comprende R1 e Xl*

Alla sez. a la potenza attiva totale è la somma di diversi contributi:
Pa = Pz+PR3+PR4
dove Pz = 400 W, $P_{R3} = V_{R3}^2/R3$, $P_{R4} = R4*I_{R4}^2$ *. La tensione ai capi di R3 è la stessa che c'e' ai capi di Z e vale* $V_{R3} = \sqrt{Pz^2+Qz^2}/Iz = 25$ *V. La corrente su R4 è pari a*
$I_{R4} = Vz/\sqrt{R4^2+Xc2^2} = 5A$ *quindi Pa = 625 W.*
Mentre la potenza reattiva è la seguente:
$Qa = -Q_{Xc2}+Qz-Q_{Xc1}$*, dove* $Q_{Xc2} = Xc2*IR4^2 = 75$ *Var,* $Q_{Xc1} = Vz^2/Xc1 = 312.5$ *Var, da cui Qa = -87.5 Var.*
Alla sez. b si ha Qb = Qa, $Pb = Pa+R2*I2^2$*. La corrente I2 è data da*
$I2 = \sqrt{Pa^2+Qa^2}/Vz = 25.24$ *A. Quindi Pb = 3174 W.*
Alla sez. c Pc = Pb+P1, Q1 = Qb+Q1. Dove $P1 = R1*I1^2$ *e* $Q1 = Xl*I1^2$*. Per il calcolo della corrente I1 conviene calcolare la tensione ai capi dell'impedenza R1-Xl (che e' la stessa che c'e' ai capi del generatore V). Questa tensione è pari a* $V1 = \sqrt{Pb^2+Qb^2}/I2 = 125.78$ *V. Nota V1 la corrente I1 risulta pari a* $I1 = V1/\sqrt{R1^2+Xl^2} = 34.89$ *A. Risulta allora Pc = 6825 W e Qc = 2346.5 Var. La potenza apparente totale è pari a* $Ac = \sqrt{Pc^2+Qc^2} = 7217.1$ *VA, la tensione del generatore vale V = V1 = 125.78 V, la corrente ai capi del generatore è pari a I = Ac/V =57.38 A, lo sfasamento è pari a* $\phi = acos(Pc/Ac) = 0.311\ rad = 18.97^{o}$*}*

Ex6.2

Dato il circuito in figura 6.2, sono noti:
R1 = 50 Ω, R2 = 2 Ω, R3 = 4 Ω, R4 = 4 Ω,
Xc1 = 3 Ω, Xl = 6 Ω,
Pz = 1600 W, $\cos\phi_z$ = 0.8 (ind.) Vz = 100V
f = 50 Hz.

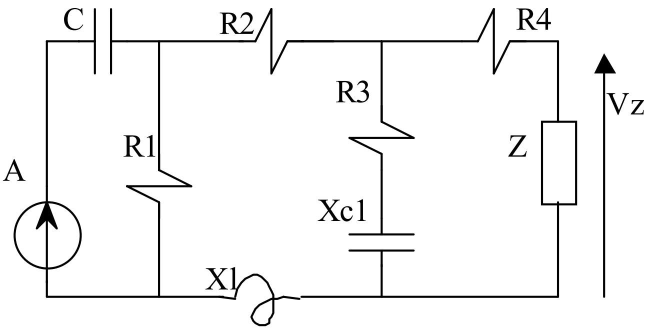


Fig. 6.2

Determinare il valore della capacità C affinché il fattore di potenza (cosϕ) del generatore A risulti pari a 0.9 (ind.)

[C = 2.131 mF]

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot per calcolare il fattore di potenza che risulta ai capi del generatore A quando non sia presente il condensatore C, e successivamente si calcola il valore della capacità C tale da avere un cosϕ *= 0.9 ind.*
Si divide la rete nelle seguenti sezioni:

- *sez a -> impedenza Z e R4*
- *sez b -> impedenza R3-Xc1*
- *sez. c -> impedenza R2-Xl*
- *sez. d-> R1*
- *sez. e -> C*

Alla sez. a si ha $Pa = Pz + R4*Iz^2 = 3.2$ *kW,* $Qz = Pz*\tan(\phi) = 1.2$ *kVar,* $Ia = Iz = P/(V*\cos\phi) = 20$ *A,* $Va = \sqrt{Pa^2+Qa^2}\ /Iz = 170.88$ *V. Alla sez. b si ha* $Pb = Pa+PR3$, $Qb = Qa-Q_{Xc1}$*. Ma* $PR3 = R3*I_{32}$*, dove* $I_{R3} = Va/\sqrt{R3^2+Xc1^2} = 34.176$ *A, quindi Pb = 7.872 kW e Qb = -2.304 kVar e* $Ib = \sqrt{Pb^2+Qb^2}\ /Va = 48$ *A.*
Alla sez. c si ha $Pc = Pb+P_{R2}$ *e* $Qc = Qb+Q_{Xl}$*. Dove* $P_{R2} = R2*I2^2$ *e* $Q_{Xl} = Xl*I2^2$*. La corrente I2 è pari a Ib quindi Pc = 12.48 kW e Qc = 11.52 kVar. Alla sezione c si ha inoltre Ic = Ib, e* $Vc = \sqrt{Pc^2+Qc^2}\ /Ic = 353.84$ *V. Nella sez. d si ha* $Pd = Pc+Vc^2/R1 = 14.98$ *kW e Qd = Qc. Si ha inoltre Vd = Vc e* $Id = \sqrt{Pd^2+Qd^2}\ /Vc = 53.42$ *A*
In assenza del condensatore il $\cos\phi$ *è pari a* $\cos\phi = Pd/\sqrt{Pd^2+Qd^2} = 0.793$*. Se si aggiunge il condensatore, nella sez. e si ha* $Qe = Pd*\tan\phi^* = Qd-Q^* = 7.257$ *kVar quindi Q* = 4.263 kVar (cap) da cui si ricava* $C = Id^2/(\omega*Q^*) = 2.131$ *mF}*

Ex 6.3

Dato il circuito in figura 6.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:

$\overline{V}$ = 40-j10 V, R = 20 Ω, Xc = 12 Ω

X1 = 4 Ω, X2 = 8 Ω, k = 0.9

Determinare la corrente I

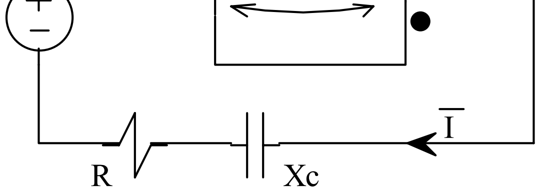


Fig. 6.3

Si consideri poi il caso in cui si abbia lo stesso circuito ma con il puntino su X2 posizionato in alto.
[CASO 1: $\overline{I}$ = *1.386-j1.206* A
CASO 2: $\overline{I}$ = *1.79+j0.412*A]

{Scrivendo la legge alla maglia si ottiene: $\overline{V} = \overline{V1} + \overline{V2} - jXc\overline{I} + R\overline{I}$ *del resto le tensioni V1 e V2 sono date da* $\overline{V}1 = jX1\overline{I}1 + jXm\overline{I2}$ *e* $\overline{V}1 = jXm\overline{I}1 + jX2\overline{I2}$ *dove Xm =* $k\sqrt{X1X2}$ *=5.091 Ω. La corrente I e' data da* $\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{j(X1 + 2Xm + X2 - Xc) + R}$ *= 1.386-j1.206 A.*
Se il puntino su X2 è posizionato in alto le relazioni sul mutuo induttore diventano le seguenti:
$\overline{V}1 = jX1\overline{I}1 - jXm\overline{I2}$ *e* $\overline{V}1 = jXm\overline{I}1 - jX2\overline{I2}$ *e quindi*
$\overline{I} = \dfrac{\overline{V}}{j(X1 - 2Xm + X2 - Xc) + R}$ *= 1.79+j0.412 A}*

Ex6.4
Dato il circuito in figura 6.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
$\overline{A1}$ = 40-j10 V, R = 20 Ω,
X1 = 4 Ω, X2 = 8 Ω, k = 0.9
f = 50 Hz

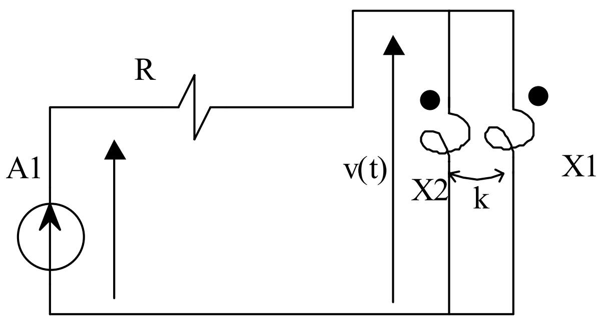


Fig. 6.4

Determinare la tensione v(t)

[*v(t) = 195.04*cos(314.15*t+1.326)* V]

*{Il fasore tensione V è dato da V = jX1*I1+jXm*I2 = jX2*I2+jXm*I1. E' quindi necessario calcolare le due correnti I1 e I2. Invertendo la relazione tensioni (V1, V2) e (I1, I2) si ottiene: I1 = j(X2-Xm)*V/(Xm2-X1*X2) e I2 = j(X1-Xm)*V/(Xm*^{2}*-X1*X2). Introducendo la legge al nodo si ottiene A1 = V*(j*(X1+X2-2Xm)/(Xm*^{2}*-X1X2)) si ottiene quindi V = A1* j(X1X2-Xm*^{2}*)/(X2+X1-2Xm) = 33.45+j133.79 e quindi v(t) = 195.07*cos(314.15*t+1.326)}*

Esercizi proposti

Ex 6.5
Dato il circuito in figura 6.5, sono noti:
Vu = 280 V Pu = 1 kW
ϕu = π/4 (ind) f = 50 Hz R1 = 17 Ω
Xc = 200 Ω, R2 = 10 Ω

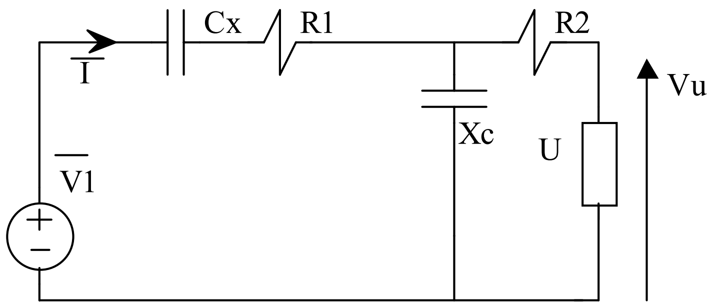


Fig. 6.5

Determinare il valore della capacità Cx in modo che la corrente I sia in fase con la tensione V1

[C = 115.91 μF]

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot. Si individuano le seguenti sezioni:

- *sez a -> R-U*
- *sez b -> Xc*
- *sez c -> R1*
- *sez d -> Cx*

*Alla sez a si ha Pa = Pu+PR2 = Pu+R2*Iu^2,ma Iu = Pu/(Vu*cosϕ) = 5.051 A, quindi Pa =1.255 kW Qa=Qu = Pu*tanϕ = 1 kVar, Va = $\sqrt{Pa^2+Qa^2}$ /Iu = 317.72 V. Nella sez. b si ha Pb = Pa, Qb = Qa-Va^2/Xc = 495.2 Var e Ib = $\sqrt{Pb^2+Qb^2}$ /Va = 4.247 A. Il condensatore Cx deve fornire una potenza reattiva pari a Qb e quindi Cx = Ib^2/(ω*Qb) = 115.91 μF.*
*L'esercizio poteva essere risolto anche in altro modo calcolando il modulo dell'impedenza Zu come Zu = Vu/Iu e poi calcolando la parte reale e immaginaria di tale impedenza (Ru = Zu*cosϕ e Xu = Zu*sinϕ). Affinché la corrente e la tensione siano in fase la parte immaginaria dell'impedenza vista ai morsetti di V1 deve essere nulla. Imponendo questa condizione si trova la soluzione}*

Ex 6.6
Dato il circuito in figura 6.6, sono noti:
V = 200 V, I = 5 A ind. P = 800 W
R1 = 10 Ω, Xc = 100 Ω Xl = 5 Ω
R2 = 50 Ω

Determinare l'impedenza Z

[Z = 11.574 + j21.546 Ω]

{Si utilizza il metodo di Boucherot partendo da sinistra}

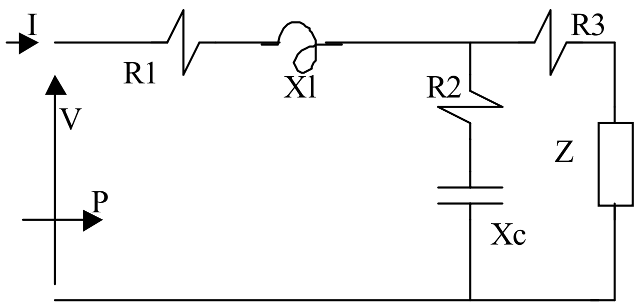


Fig. 6.6

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 5

<u>Esercizi svolti durante l'esercitazione</u>.

Ex5.1
Dato il circuito in figura 5.1, sono noti:
R = 6 Ω, L = 1 mH, C = 12 μF
f = 50 Hz, δ = π/6
V1 = 18 V, I1 = 18 A

Determinare la tensione v(t) e lo sfasamento di Vr rispetto a Ic..

[v(t) = 131.27*cos(314.15*t+0.598) V
ϕ = 1.477 rad]

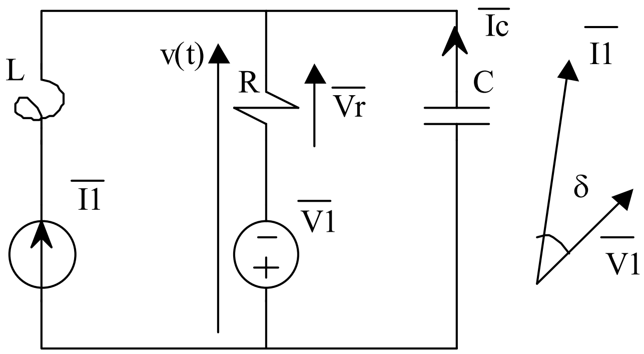


Fig. 5.1

{Scegliendo di posizionare l'asse reale allineato con il fasore tensione $\overline{V}1$*, si ottiene che la tensione* $\overline{V}1$ *nel dominio fasoriale vale 18 V mentre la corrente* $\overline{I}1 = 18 \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = 15.59 + j9$ *A. La rete è costituita dal parallelo di* $\overline{I}1$ *,* $\overline{V}1 - \overline{Zr}$ *(dove* $\overline{Zr}$ *= R),* $\overline{Zc}$ *= -j Xc. La reattanza Xc può essere facilmente calcolata come Xc = 1/(ωC) = 265.3 Ω, (ω = 2*π*f). Xl, essendo in serie ad un generatore di corrente, non viene visto ai morsetti esterni..*
La tensione v(t) richiesta è quella ai capi di Xc, che può essere calcolata in diversi modi: si puo' infatti semplificare la parte rimanente della rete cercando il bipolo equivalente serie oppure si può trasformare il bipolo $\overline{V}1 - \overline{Zr}$ *nel suo equivalente parallelo riducendo così la rete nel parallelo di I1, V1/R1-Y1, Yc. Ricordando la relazione* $\overline{I} = \overline{Y} \cdot \overline{V}$ *si può calcolare la tensione richiesta come* $\overline{V} = (\overline{I}1 - (\overline{V}1/\overline{Zr}))/((1/\overline{Zr}) + 1/(\overline{Zc}))$ *= 76.71+j52.26 V, la tensione v(t) risulta allora pari a v(t) =* $\left|\overline{V}\right|\sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + a\tan(\mathrm{Im}(\overline{V})/\mathrm{Re}(\overline{V})))$ *= 131.274*cos(314.15*t+0.598) V*
La tensione $\overline{Vr}$ *si trova scrivendo la legge delle tensioni e risulta pari a* $\overline{Vr} = \overline{V} + \overline{V}1$ *= 94.71+j52.265 V. La corrente* $\overline{Ic}$ *risulta* $\overline{Ic} = -\overline{V}/\overline{Zc}$ *= 0.197-j0.289 A. L'angolo* ϕ *richiesto è pari a* ϕ *= arg(*$\overline{Vr} \cdot \underline{Ic}$*) = 1.477 rad}*

Ex5.2

Dato il circuito in figura 5.2, sono noti:
$\overline{V1}$ = 10 V, $\overline{V2}$ = j*12 V, R1= 2 Ω, R2 = 4 Ω
R3 = 5 Ω, R4 = 10 Ω, Xc = 2 Ω, Xl = 3 Ω,
f = 50 Hz.

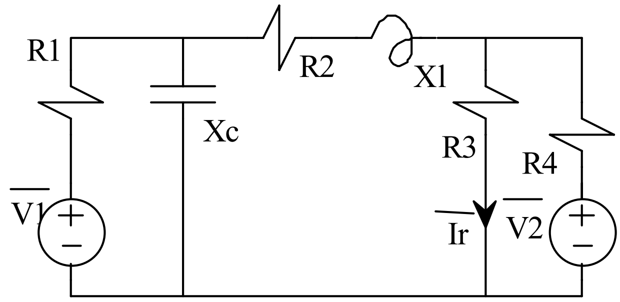


Fig. 5.2

Determinare ir(t)

[ir(t) = 0.306*cos(314.15*t+0.132) A]

{Conviene semplificare la parte di rete di sinistra (costituita dal bipolo i tipo serie cstituito dal generatore di tensione $\overline{V1}$ e dall'impedenza $\overline{Z1} = R1$, in parallelo a $\overline{Zc}$ = -j Xc , in serie a $\overline{Z2} = R2 + jXl$). La tensione a vuoto si trova con la regola del partitore di tensione e vale $\overline{Vv} = \overline{V1} \cdot \overline{Zc}/(\overline{Zc} + \overline{Z1})$ = 5-j5 V, l'impedenza equivalente è data dalla serie di $\overline{Z2}$ e del parallelo di $\overline{Z1}$ e $\overline{Zc}$, $\overline{Zeq} = 5 + j2$ Ω. La corrente $\overline{Ir}$ può essere calcolata trasformando i due bipoli $\overline{Vv} - \overline{Zeq}$ e $\overline{V2} - \overline{Z4}$ ($\overline{Z4} = R4$) nel loro equivalente parallelo e applicando la regola del partitore di corrente, (dove $\overline{Yeq} = 1/\overline{Zeq}$, $\overline{Y3} = 1/\overline{Z3}$, ($\overline{Z3} = R3$) $\overline{Y4} = 1/\overline{Z4}$) si ottiene quindi:
$\overline{Ir} = ((\overline{Vv}/\overline{Zeq}) + (\overline{V2}/\overline{Z4})) * \overline{Y3}/(\overline{Y3} + \overline{Y4} + \overline{Yeq})$ = 0.215+j0.028 A.
*La corrente ir(t) risulta allora pari a ir(t)= 0.306*cos(314.15*t+0.132) A}*

Ex5.3

Dato il circuito in figura 5.3 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
$\overline{Z1}$ = 1-j Ω, $\overline{Z2}$ = 2+j Ω, $\overline{Z3}$ = 1-j2 Ω,
$\overline{Z4}$ = 3+j2 Ω V = 120 V,
I1 = 80 A, I2 = 50 A

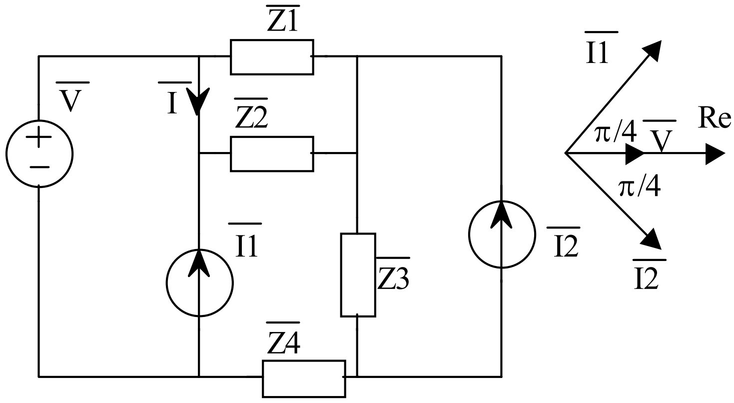


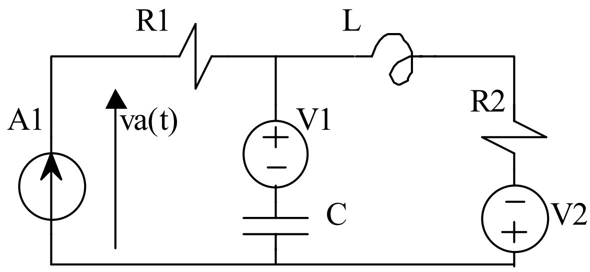
Fig. 5.3

Determinare in modulo e fase la corrente I

[$\overline{I}$ = -39-j58.68 A]

{Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie visto dai morsetti del ramo percorso dalla corrente I.
L'impedenza equivalente è data da
$\overline{Zeq}$ = ($\overline{Z3} + \overline{Z4}$)// $\overline{Z1} + \overline{Z2}$ = 2.923+j0.385 Ω (dove // indica il parallelo). Per il calcolo della tensione a vuoto conviene trasformare il bipolo parallelo $\overline{I2}$ - $\overline{Z3}$ nel suo equivalente serie $\overline{V2}$ - $\overline{Z3}$ dove $\overline{V2} = \overline{I2} * \overline{Z3}$. Si osserva a questo punto che l'impedenza $\overline{Z3}$ risulta in serie a $\overline{Z4}$ e che la rete è quindi costituita dal parallelo di $\overline{V}$ - $\overline{Z1}$, $\overline{I1}$ - $\overline{Z2}$ e $\overline{V2}$ -($\overline{Z3}$ + $\overline{Z4}$).
La tensione a vuoto può essere calcolata una volta nota la tensione Vu sul bipolo V1-Z1, che risulta pari a $\overline{Vu}$ = ($\overline{I1}$ + $\overline{V}$ / $\overline{Z1}$ + $\overline{V2}$ /($\overline{Z3}$ + $\overline{Z4}$))/(1/$\overline{Z1}$ +1/($\overline{Z3}$ + $\overline{Z4}$)) = 154.86+j16.83 V, risulta allora che la tensione a vuoto è pari a $\overline{Vv}$ = $\overline{V}$ - $\overline{Vu} - \overline{Z2} * \overline{I1}$ = -91.43-j186.5 V.
*La corrente $\overline{I}$ richiesta è allora data da $\overline{I}$ = $\overline{Vv}$ / $\overline{Zeq}$ = -39-j58.68 A = 70.46*$e^{-j123.6}$ A.}*

Ex5.4
Dato il circuito in figura 5.4 funzionante in regime sinusoidale, sono noti:
v1(t) = $\sqrt{2}$ *200*sin(500*t) V, v2(t) = $\sqrt{2}$ *300*cos(500*t) V
a1(t) = $\sqrt{2}$ *10*sin(500*t-π/4) A
R1 = 5 Ω, R2 =10 Ω, L = 20 mH,
C = 100 μF



Determinare la tensione va(t)

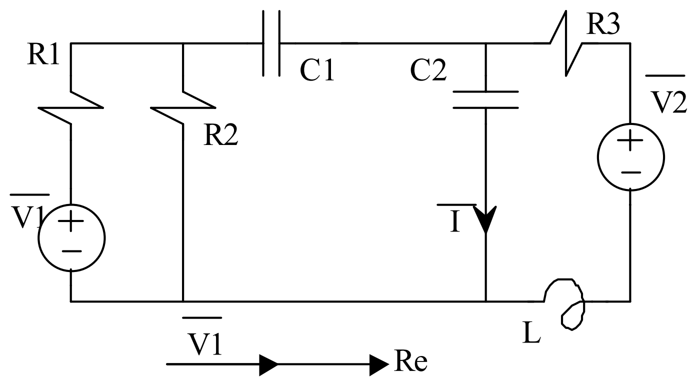
[va(t) = 428.46*cos(500*t+2.723) V]

{I generatori di tensione e corrente espressi in regime fasoriale sono pari a :
V1 = -j200 V, V2 = 300 V,
*A1= 10*$e^{-j(\pi/4+\pi/2)}$ A. Conviene semplificare la rete di destra cercando il bipolo equivalente serie. Detti Zr = R1, Zc = -j/(ω*C) (con ω = 500 rad/s), Z2 = R2+j*ω*L2, l'impedenza equivalente Zeq è data dalla serie di Zr con il parallelo di Zc e Z2. Zeq = Zr+(Zc//Z2) = 25 Ω.*
La tensione a vuoto è data dalla legge alla maglia e vale
Vv = V1-Zc(V1+V2)/(Z2+Zc) = -100+j300V.*
*La tensione Va = Vv+Zeq*A1 = -267.78+j123.22 V. Ritornando nel dominio del tempo si trova va(t) = 428.46*cos(500*t+2.723) V}*

Fig. 5.4

Esercizi proposti

Ex5.5
Dato il circuito in figura 5.2, sono noti:
V1= 10 V, R1= 5 Ω, R2 = 20 Ω
R3 = 6 Ω, R4 = 10 Ω, C1 = C2 = 1 mF
L = 0.1 H, ω = 100 rad/s.



Calcolare V2 in modulo e fase rispetto a V1 in modo che I = 0.

[v2(t) = 12.25*cos(100*t-0.921) V]

Fig. 5.5

{Affinché la corrente I sia pari a zero dovrà essere I = Vc2/Zc2 = 0 e quindi dovrà essere nulla la tensione ai capi di C2.
*Conviene semplificare la parte di rete di sinistra, costituita da V1-R1, R2, C1. Detti Z1 = R1, Z2 = R2, Zc = -j/(ω*C2), l'impedenza equivalente risulta la serie di Zc con il parallelo di Z1 e Z2, Zeq = (Z1//Z2)+Zc = 4-j*10 Ω. La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione e risulta pari a Vv = V1*Z2/(Z2+Z1) = 8 V. La parte di rete di destra è costituita*

dall'impedenza Z3 = R3+j(ω*L) e dal generatore di tensione V2. Imponendo che la tensione ai capi di C2 sia nulla si ottiene: Vc2 = Vv-Zeq*(Vv-V2)/(Zeq+Z3) = 0, da cui si ottiene V2 = 5.241-j6.897 e quindi v2(t) = 12.25*cos(100*t-0.921) V}*

Ex5.6

Dato il circuito in figura 5.6, sono noti:
v1(t)= 14.139*sin(10*t) V, R1= 2 Ω, R2 = 1 Ω
R3 = 4 Ω, C1 = C2 = 0.1 F
L1 = 0.1 H, L2 =0.5 H.

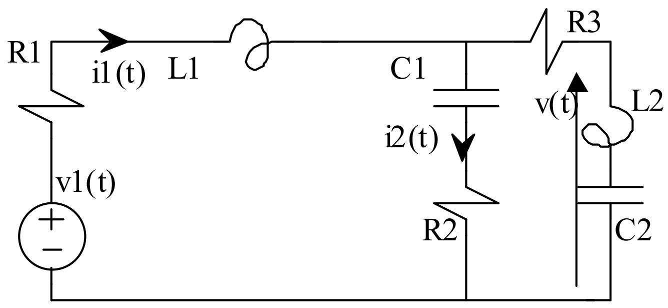


Fig. 5.6

Calcolare i1(t), i2(t), v(t).

[i1(t) = 4.432*cos(10*t-1.663) A,
i2(t) = 4.3*cos(10*t-1.418) A,
v(t) = 4.3*cos(10*t+1.418) V]

*{Il generatore di tensione v1(t) in regime fasoriale è pari a V1 = -j9.99 V. La rete è costituita dal parallelo di 3 bipoli: V1-Z1, Z2, Z3, dove Z1 = R1+j*ω*L, Z2 = R2-j/(ω*C1), Z3 = R3 +j*(ω*L2-1/(ω*C2)). Per calcolare la tensione V conviene trasformare V1-Z1 nel suo equivalente parallelo e notare che in tal modo si ottiene dalla relazione I = Y*V che la tensione Vu ai capi di Z2 è pari a Vu =(V1/Z1)/(1/Z1+1/Z2+1/Z3) = -2.543-j3.467 V. La tensione V si trova applicando la regola del partitore di tensione ed è pari a V = Vu*(j(ω*L2-1/(ω*C2)))/(Z3) = 0.462-j3.005 V, la corrente I2 è pari a I2 = Vu/Z2 = 0.462-j3.005 A, la corrente I1 = (V1-Vu)/Z1 =-0.289-j3.121 A. Ritornando nel dominio del tempo si ottiene: i1(t) = 4.432*cos(10*t-1.663) A, i2(t) = 4.3*cos(10*t-1.418) A, v(t) = 4.3*cos(10*t+1.418) V}*

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 4

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex4.1

Dato il circuito in figura 4.1, sono noti:
R = 8 Ω, L = 10 mH, C = 100μF.
v(t) = 50*cos(300*t+π/6) V

Determinare la corrente , le tensioni sul resistore, sul condensatore e sull'induttore nel dominio del tempo ed in quello fasoriale.

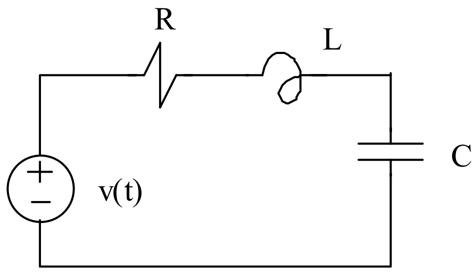


Fig. 4.1

[i(t) = 1.594*cos(300*t+1.8387) A,
vr(t) = 12.751*cos(300*t+1.837) V,
vl(t) = 4.782*cos(300*t+3.407) V,
vc(t) = 53.13*cos(300*t+0.266) V]

{E' necessario esprimere la sorgente di tensione nel dominio fasoriale. In tale dominio $\bar{V} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\frac{\pi}{6}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \cdot (\cos\frac{\pi}{6} + j \cdot sin\frac{\pi}{6}) = 30.62 + j*17.68$ *V. La pulsazione è pari a ω=300 rad/s. Si può ricavare la reattanza induttiva Xl = ω*L = 3 Ω, la reattanza capacitiva è pari a Xc = 1/(ω*C) = 33.33 Ω. Scrivendo la legge alla maglia si ottiene la corrente* $\bar{I}$ *=* $\bar{V}$ */(R+j*(Xl-Xc)) = -0.296+j*1.087 A. La tensione ai capi del resistore è pari a* $\overline{Vr}$ *= R**$\bar{I}$ *= -2.368+j*8.7 V, la tensione sull'induttore vale* $\overline{Vl}$ *= jXl**$\bar{I}$ *= -3.262-j*0.888 V, la tensione sul condensatore vale* $\overline{Vc}$ *= -jXc**$\bar{I}$ *= 36.249+j*9.866 V. Per trasformare le grandezze trovate nel dominio del tempo si procede nel medesimo modo per tutte le grandezze. Ad esempio per la corrente si ha:*

*i(t) = IM*cos(wt+f), dove* $I_M = \sqrt{2} \cdot \left\{\sqrt{\mathrm{Re}(\bar{I})^2 + \mathrm{Im}(\bar{I})^2}\right\}$ *e* $\varphi = a\tan(\frac{\mathrm{Im}(\bar{I})}{\mathrm{Re}(\bar{I})})$*, se la parte reale è positiva, e* $\varphi = a\tan(\frac{\mathrm{Im}(\bar{I})}{\mathrm{Re}(\bar{I})}) + \pi$ *se è negativa. Si ottiene allora:*

*i(t) = 1.594*cos(300*t+1.8387) A,*
*vr(t) = 12.751*cos(300*t+1.837) V,*
*vl(t) = 4.782*cos(300*t+3.407) V,*
*vc(t) = 53.13*cos(300*t+0.266) V}*

Ex4.2

Dato il circuito in figura 4.2, sono noti:
I1 = 18 A, X1 = 3 Ω, R = 4 Ω
Xc = 1 Ω, ω = 200 rad/s.

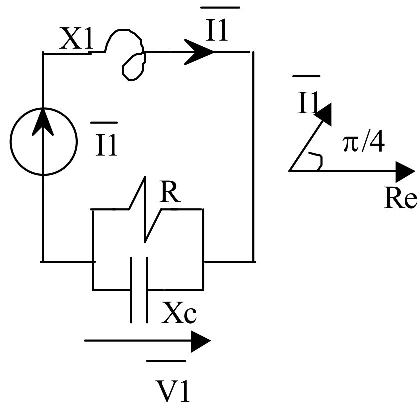


Fig. 4.2

Determinare lo sfasamento tra I1 e V1, e v1(t)

[sfas = 1.326 rad, v1(t) = 24.696*cos(200*t –0.54) V]

*{Il fasore $\overline{I1}$ è pari a $\overline{I1}$ = 18*$e^{j*\pi/4}$ = 18*(cos(π/4)+j*sin(π/4)) = 12.73+j*12.73. R e Xc sono in parallelo di conseguenza equivalgono ad una impedenza $\overline{Zpar}$ = 1/$\overline{Ypar}$, dove $\overline{Ypar}$ = G+(-1/(j*Xc)), $\overline{Zpar}$ = 0.235-j*0.941 Ω. La tensione $\overline{V1}$ è apri a $\overline{V1}$ = $\overline{I1}$ *$\overline{Zpar}$ = 14.974-j*8.984 V. La tensione $\overline{V1}$ nel dominio del tempo è pari a v(t) = 24.696*cos(200*t –0.54) V. Lo sfasamento di $\overline{I1}$ rispetto a $\overline{V1}$ è pari alla differenza della fase della corrente e di quella della tensione: sfas =π/4-(-0.54) = 1.325 rad}*

Ex4.3

Dato il circuito in figura 4.3, sono noti:
X1 = 30 Ω, R1 = 7 Ω, R2 = 10 Ω, Xc = 18 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V, δ = π/3
ω = 100 rad/s

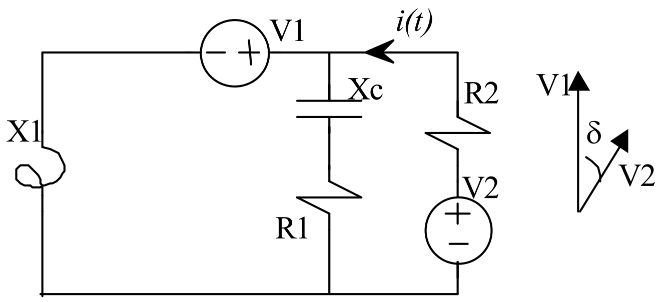


Fig. 4.3

Determinare la corrente i(t) e il suo fasore rappresentativo

[$\overline{I}$ = -0.057+j*0.511 A,
i(t) = 0.727*cos(100*t+1.682) A]

*{Poiché è dato lo sfasamento relativo tra $\overline{V1}$ e $\overline{V2}$ è necessario scegliere dove porre l'asse reale, la scelta più furba consiste nel posizionare tale asse su uno dei due fasori. Se si posiziona l'asse reale coincidente con $\overline{V2}$ si ottiene: $\overline{V2}$ = 20 V, $\overline{V1}$ = 18*$e^{j*\delta}$ V = 9+j*15.59 V. A questo punto conviene semplificare la rete di sinistra che comprende V1-X1, R1 – Xc, trasformandolo nel bipolo equivalente serie. La tensione a vuoto può essere calcolata con la regola del partitore di tensione, $\overline{Vv}$ = $\overline{V1}$ *(R1-j*Xc)/(j*X1+R1-j*Xc) = 9.174-j*23.28 V. L'impedenza equivalente è pari al parallelo di X1 con la serie di R1 e Xc: $\overline{Zeq}$ = 1/(1/(j*X1)+1/(R1-j*Xc))= 32.64-j*25.96 Ω. A questo punto il fasore corrente può essere calcolato scrivendo una legge alla maglia e si ottiene: $\overline{I}$ = ($\overline{V2}$ - $\overline{Vv}$)/(R2+ $\overline{Zeq}$) = -0.057+j*0.511 A. Tornando nel dominio del tempo si ottiene i(t) = 0.727*cos(100*t+1.682) A}*

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 3

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex3.1
Dato il circuito in figura 3.1, sono noti:
R1 = 3 Ω, R2 = 5 Ω, R3 = 2 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20 V, I1 = 8 A,
I2 = 6 A, I3 = 4 A.

L'interruttore S è aperto da un tempo infinito. Determinare alla chiusura di S il transitorio di v(t) e tracciarne l'andamento in modo qualitativo

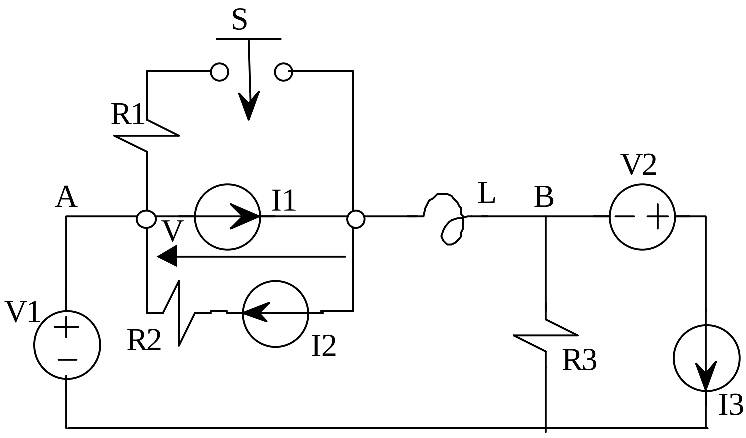


Fig. 3.1

[v(t) = 13.2*(1-$e^{(-t/\tau)}$), τ = 200 μs]
*{Conviene semplificare il circuito cercando il bipolo equivalente serie o parallelo visto ai morsetti AB . La parte a destra è data dal generatore I3 con in parallelo R3, la parte a sinistra è data dal solo generatore V1; la tensione a vuoto (che punta verso A) si trova quindi scrivendo una legge delle tensioni e risulta pari a Veq = V1+R3*I3 = 26 V. La resistenza equivalente può essere calcolata in due modi differenti:*
come resistenza vista ai morsetti AB quando la rete sia resa passiva o come rapporto tra la tensione a vuoto e la corrente di corto circuito.
*Seguendo il primo procedimento si trova subito che Req è pari alla sola R3. Seguendo il secondo procedimento si calcola la corrente di corto circuito Icc che dalla legge al nodo B risulta pari a Icc = I3 + V1*G3 = 13 A da cui la Req = Veq/Icc = 2W = R.3*
Si può poi calcolare il bipolo equivalente parallelo di I1 e I2-R2 che risulta essere Ieq = I1-I2 = 2A e che è diretto verso sinistra, Geq = 0 S.
*All'istante t_{0-} si calcola la corrente nell'induttore i_{L0-} = Ieq = 2 A; la tensione richiesta risulterà quindi pari a v_{0-} = Veq – Req*Ieq = 22V.*
All'istante t_{0+} per la continuità sulla variabile di stato (i_{L0-} = i_{L0+}) si sostituisce l'induttore con un generatore di corrente pari a 2 A; la tensione v_{0+} risulta data da v_{0+} = R1(Ieq-i_{L0+}) = 0V.*
All'istante t_{inf} si sostituisce l'induttore con un corto circuito e la tensione richiesta si può calcolare trasformando il bipolo serie Veq-Req nel bipolo parallelo Ieq1 = Veq/Req e Geq = 1/Req. Risulta quindi v_{inf} =(-Ieq+Ieq1)/(G1+Geq)=13.2 V. La costante di tempo è pari a t = L/Req_L, dove ReqL è la resistenza della rete resa passiva vista dai morsetti dell'induttore ed è pari a Req_L=Req+R1=5W, quindi t = 200 ms. La tensione richiesta è così espressa: v(t) = (v_{0+}-v_{inf})$e^{(-t/t)}$+v_{inf} = 13.2*(1-$e^{(-t/t)}$)}*

Ex3.2

Dato il circuito in figura 3.2, sono noti:
R1 = 4 Ω, R2 = 6 Ω, V1 = 18 V, V2 = 24 V,
I1 = 6 A C = 6μF.

Determinare alla chiusura di S la tensione v(t) ed il valore assunto per t = 6μs

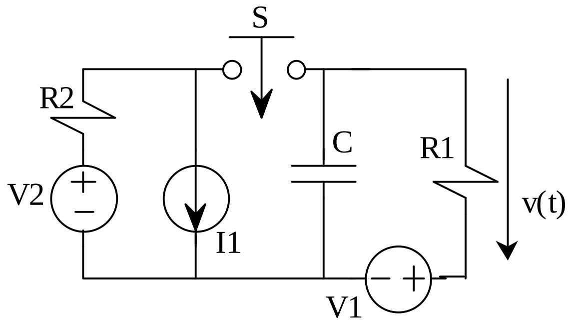


Fig. 3.2

[v(t) = -12*$e^{(-t/\tau)}$+12 V, τ=7.2μs, v(6μs) = 6.785 V]

*{Conviene semplificare la parte di sinistra del circuito trasformandola nel bipolo equivalente serie; si ottiene allora che Veq = V2-R2*I1 = -12 V e Req = R2 = 6W . All'istante t_{0-} il condensatore si comporta come un circuito aperto e la tensione ai suoi capi (diretta verso l'alto) è pari a V1, vc0-=18 V e la tensione richiesta v(t_{0-}) = 0 V. All'istante t = 0+ si sostituisce il condensatore con un generatore di tensione pari a vc0- e si calcola la tensione richiesta. Si può notare in tal caso che Veq-Req risulta in parallelo ad un generatore di tensione (vc_{0-}) e quindi agli effetti esterni equivale al solo generatore di tensione. A questo punto v(t_{0+}) = V1-vc_{0-}=0V*
*A regime il condensatore si comporta come un circuito aperto, la tensione vinf può essere calcolata osservando che Veq e V1 risultano in serie e con la regola del partitore di tensione si ottiene: v_{inf} = (V1-Veq)*R1/(R1+Req) = 12V. Per il calcolo della costante di tempo è necessario calcolare la Geqc vista dei morsetti del condensatore a manovra avvenuta e con la rete resa passiva; risulta quindi che Geqc è pari al parallelo del reistore Req e del resistore R1, Geqc = Geq+G1 = 0.417S la costante di tempo t = C/Geqc = 7.2ms. Segue v(t) = -12*$e^{(-t/t)}$+12 V. v(6ms) = 6.785 V}*

Ex3.3

Dato il circuito in figura 3.3, sono noti:
R1 = 2 Ω, R2 = 3 Ω, R3 = 5 Ω
V1 = 8 V, V2 = 10 V, L = 1 mH.

Determinare i(t) e stabilire il suo valore per t = 2τ

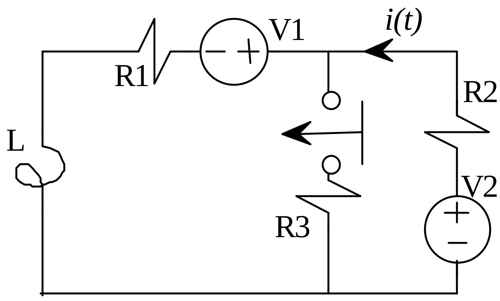


Fig. 3.3

[i(t) = 0.5323*$e^{(-t/\tau)}$+0.9677 A, τ = 258.1 μs,
i(2τ) = 1.0397 A]

*{La rete e' gia' abbastanza semplificata. Se si suppone che il circuito fosse a regime prima dell'evento, per t=0- la tensione sull'induttanza è nulla. La corrente nell'induttanza prima dell'evento (corrisponde anche alla corrente richiesta) è sostenuta dai due generatori V1 e V2 (in serie) e limitata dalla serie dei due resistori R1 ed R2. Quindi vale i(0-) = (V2-V1)/(R1+R2) = 0.4 A. Al fine di risolvere il circuito all'istante t=0+, l'induttanza può essere sostituita da un generatore di corrente Is = 0.4 A (verso il basso), che risulta, agli effetti esterni, in parallelo al resistore R3. Trasformando in equivalente serie, i(0+) = (V2+Is*R3)/(R2+R3) = 1.5 A. A regime il circuito si presenta come parallelo di tre bipoli di tipo serie. La tensione ai loro capi (verso l'alto) si trova trasformandoli in bipoli di tipo parallelo: V = (V1*G1+V2*G2)/(G1+G2+G3) = 7.097 V. Quindi i(+¥) = (V2-V)/R2 = 0.9677 A. La costante di tempo t si ottiene come L/Req, dove Req è la resistenza "vista" da L dopo aver reso passiva la rete Req = R1+(R2//R3) = 3.875 W; da cui t = 258.1 ms. Segue i(t) = 0.5323*$e^{(-t/t)}$+0.9677 A. i(2t) = 1.0397 A }*

Ex3.4
Dato il circuito in figura 3.4, sono noti:
R1 = 2 Ω, R2 = 3 Ω, R3 = 1 Ω
R4 = 5 Ω, R5 = 4 Ω, V1 = 10 V,
V2 = 12 V, V3 = 80 V, C = 3μF.

L'interruttore S è chiuso da lungo tempo.
Determinare all'apertura di S il transitorio di i(t) e tracciarne l'andamento in modo qualitativo

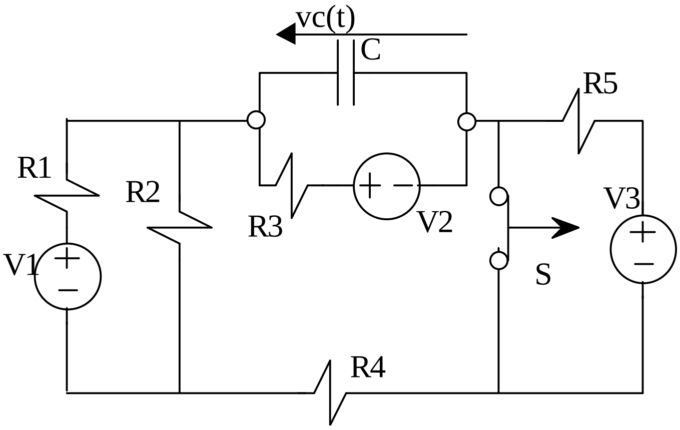


Fig. 3.4

[v(t) = 4.321+6.845*$e^{(-t/\tau)}$ V, τ=2.732 μs]

*{A t=0- rimangono tre bipoli di tipo serie in parallelo tra loro: (V1,R1), (R2) e (V2,R3+R4). La comune tensione vale V=(V1*G1+V2*G34)/(G1+G2+G34)= 7 V, da cui $v_C(0-)$ = V2+R3*(V-V2)/(R3+R4) = 11.167 V. A t=0+ sono sempre tre i bipoli in parallelo: (V1,R1), (R2) e (V3+$v_C(0-)$,R5+R4). A regime nel condensatore non circola corrente; i tre bipoli in parallelo sono (V1,R1), (R2) e (V3+V2,R3+R5+R4).*
*V=(V1*G1+(V3+V2)*G345)/(G1+G2+G345)= 15.214 V, da cui si può calcolare la tensione sul condensatore che è pari a : vc(inf) = (V-V3-V2)*R3/(R3+R4+R5)+V2 = 4.321 V*
. La costante di tempo si ottiene come t = C/Geq = 2.732 ms.}

<u>Esercizi proposti</u>

Ex3.5
Nel circuito in figura 3.5 sono noti:
R1 = 8 Ω, R2 = 3 Ω, R3 = 5 Ω,
V1 = 20 V, V2 = 22 V, I1 = 12 A, L = 20mH

Determinare v(t) e tracciarne l'andamento in funzione del tempo

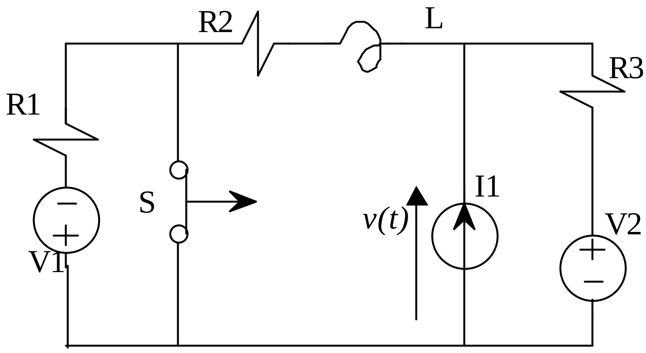


Fig. 3.5

[v(t) = 50.125-19.365*$e^{(-t/\tau)}$ V, τ=1.25 ms]
*{A t=0- rimangono tre bipoli in parallelo: R2, I1 e R3,V2. Trasformando V2-R2 nell'equivalente parallelo si può facilmente calcolare la corrente ; $i_L(0-)$= (I1+V2/R3)*G2/(G2+G3) = 10.25 A (verso sinistra).*
La tensione v(0-)= R2 $i_L(0-)$= 30.75 V.*
*All'istante t = 0+ rimangono tre bipoli in parallelo: un generatore di corrente pari a $i_L(0-)$, I1 e R3-V2. La tensione v(0+) può essere calcolata trasformando il bipolo serie V2-R3 nell'equivalente parallelo e risulta pari a v(0+) = (I1+V2*G3- $i_L(0-)$)/(G3) =30.75V;*
*La v(inf) si calcola osservando che a tinf restano tre bipoli in parallelo: V1-R1+R2, I1 e V3-R3. Si trova allora v(inf) = (-G12*V1+I1+V2*G3)/(G12+G3)= 50.125 V dove G12 = 1/(R1+R2); Req = 16W; t = 1.25 ms}*

Ex3.6

Sia dato il circuito rappresentato in figura 3.6, con i seguenti dati:
R1 = 18 Ω, R2 = 5 Ω, R3 = 3 Ω, R4 = 7 Ω,
V1 = 18 V, V2 = 22V, L = 1 mH.

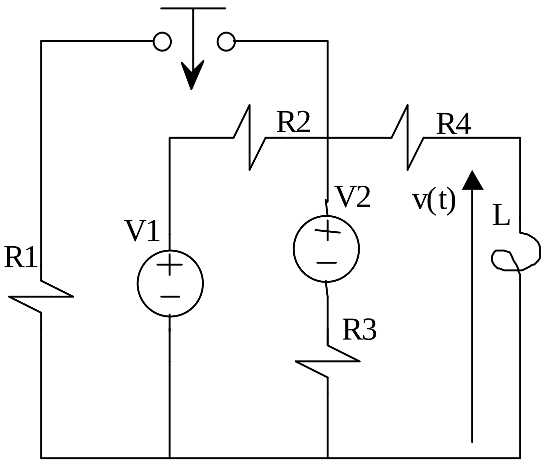


Fig. 3.6

Determinare la tensione v(t) alla chiusura dell'interruttore

[v(t) = -1.525*$e^{(-t/\tau)}$ V, τ = 114.97 μs]

{All'istante t=0- rimangono tre bipoli in parallelo: V1-R2, V2-R5, R4. La corrente i_{L0-} *= (G2*V1+V2*G3)*G4/(G2+G3+G4) = 2.31 A (diretta verso il basso). La tensione v0- = 0. A t = 0+ rimangono quattro bipoli in parallelo: R1, V1-R2, V2-R3,* I_{L0-} *-R4. La tensione su R4-*I_{L0-} *è pari a V = (V1*G2+V2*G2-iL0-)/(G1+G2+G3) = 14.64 V, la tensione v(0+)= V-R4**i_{L0-} *= -1.525 V. A regime la tensione è nulla.*
La costante di tempo t = L/Req, Req = R4+(1/(G1+G2+G3))=8.698W, t = 1.1497*10^{-4} s *}*

Ex3.7

Il circuito in figura 3.7 presenta:
R1 = 6 Ω, R2 = 8 Ω
V1 = 18 V, V2 = 20V, V3 = 22V, I1 = 12 A.
C = 10μF
L'interruttore è chiuso da tempo infinito.
A t = 0 s si apre l'interruttore, determinare la tensione sul condensatore nel verso indicato in figura
[vc(0-) = vc(0+) = -20 V, vcinf = 40.86 V, τ = 3.429*10^{-5}.]

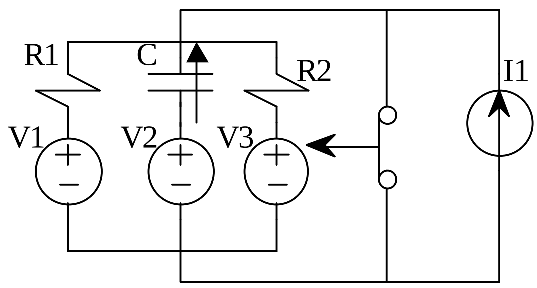


Fig. 3.7

*{All'istante t = 0- resta V2 in serie ad un circuito aperto e un corto circuito, vc0- = -V2 = -20V (diretto verso l'alto). All'istante tinf il condensatore è un circuito aperto, la tensione ai capi di V2-C si trova trasformando i bipoli nel loro equivalente parallelo ed è pari a V = (V1*G1+V3*G2+I1)/(G1+G2) = 60.86 V; la tensione vcinf vale : V-V2=40.86 V. La costante di tempo t = C/Geq, Geq = G1+G2 = 0.292 S, t = 34.29 ms, v(t) = -60.86*$e^{-t/t}$+40.86}*

Corso di **Principi di Ingegneria Elettrica**
Allievi Meccanici
a.a. 2001/2002

ESERCITAZIONE 9

Esercizi svolti durante l'esercitazione.

Ex9.1
Dato il circuito trifase in figura 9.1, sono noti:
Z = 30+j15 Ω Vf1 = Vf2 = Vf3 =100 V (in modulo)

Determinare le correnti I1, I2 e I3 in modulo e fase.

[I1 = 8-j4 A = 8.944*e$^{-j0.464}$ A,
I2 = -7.464-j4.928 A= 8.944*e$^{-j2.558}$ A,
I3 = -0.536+j8.928 A = 8.944*e$^{j1.631}$ A]

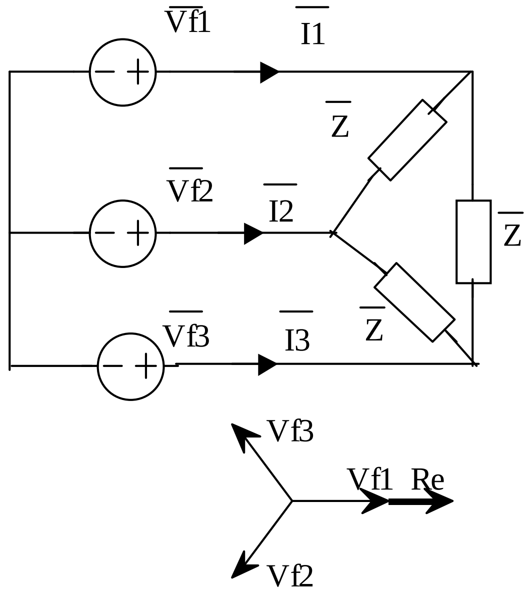


Fig. 9.1

*{Poichè il sistema è simmetrico ed equilibrato conviene risolvere il circuito monofase equivalente. E' necessario trasformare il carico a triangolo nel suo equivalente a stella; ricordando che per carichi equilibrati l'impedenza della stella è un terzo di quella del triangolo si ottiene Ztr = 10+j5 Ω. . Risolvendo si ottiene che la corrente della fase 1 è pari a I1 = Vf1/Z1 = 8-j4 A. Le correnti delle altre due fasi si ottengono da I1 introducendo gli sfasamenti in ritardo e in anticipo di 2π/3. In particolare I2 = I1*e$^{-j2\pi/3}$, I3 = I1*e$^{j2\pi/3}$}*

Ex9.2
Dato il circuito trifase in figura 9.2, sono noti:
Vf1 = Vf2 = Vf3 = 220 V (in modulo)
R = 10 Ω, R2 = 15 Ω
L = 6 mH, L2 = 4 mH
C = 5 μF
f = 50 Hz

Determinare le tre correnti I1, I2, I3 in modulo e fase

[I1 = 16.563*$e^{j0.324}$ A,
I2 = 29.928*$e^{-j2.548}$ A
I3 = 14.634*$e^{j0.9}$ A]

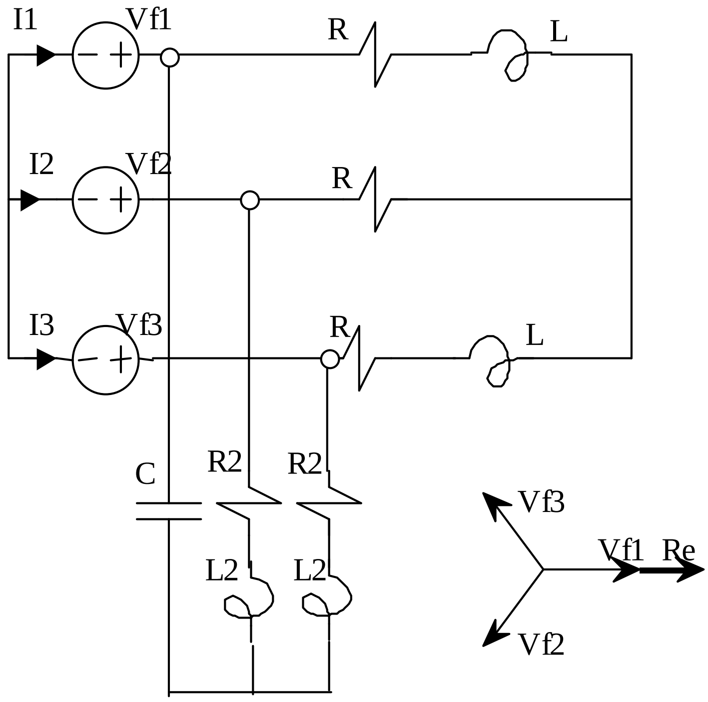


Fig. 9.2

{La terna di tensioni è data da Vf1 = 220 V, Vf2 = 220*$e^{-j2\pi/3}$ V, *Vf2 =* 220*$e^{j2\pi/3}$ V. *Chiamiamo le tre impedenze longitudinali Z1=R+jωL=10+j1.885 Ω, Z2=R=10Ω, Z3 = R+jωL =10+j1.885 Ω,(Y1, Y2 e Y3 sono le rispettive ammettenze) e le tre impedenze trasversali Za = -j/(ωC) = -j*636.61 Ω, Zb = R2+jωL2 = Zc = 15+1.257 Ω. (Ya, Yb e Yc sono le rispettive ammettenze).*
*Si calcola la tensione tra il centro stella della terna di tensioni e quello delle impedenze Z1, Z2 e Z3 Voo = (Vf1*Y1+Vf2*Y2+Vf3*Y2)/(Y1+Y2+Y3) = 70.66-j78.875 V. La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle impedenze Za, Zb e Zc è pari a Voo1 = (Vf1*Ya+Vf2*Yb+Vf3*Yc)/(Ya+Yb+Yc) = -15.927-j*98.603 V.*
Le tre correnti richieste si possono calcolare con una legge al nodo considerando il contributo nei due carichi. Le tre correnti Iz1, Iz2 e Iz3 che percorrono le tre impedenze Z1, Z2 e Z3 si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a Iz1 = (Vf1-Voo)/Z1 = 15.857+j4.898 A, Iz2 = (Vf2-Voo)/Z2 = -18.066-j11.165 A , Iz3 = (Vf3-Voo)/Z3 = 2.209+j6.267 A. Le tre correnti Iza, Izb e Izc che percorrono le tre impedenze Za, Zb e Zc si calcolano con una legge alla maglia e sono pari a Iza = (Vf1-Voo)/Za = -0.155+j0.371 A, Izb = (Vf2-Voo)/Zb = -6.738-j5.564 A , Izc = (Vf3-Voo)/Zc = 6.893+5.193 A. Le tre correnti richieste si calcolano con una legge al nodo nel seguente modo:
*I1 = Iz1+Iza = 16.563**$e^{j0.324}$ *A, I2 = Iz2+Izb = 29.928**$e^{-j2.548}$ *A , I3 = Iz3+Izc =14.634**$e^{j0.9}$ *A }*

Ex 9.3

Dato il circuito trifase in figura 9.3, sono noti:
Vf1 = Vf2 = Vf3 = 220 V (in modulo),
Z1 = 30 + j10 Ω,
Z2 = 15 + j5 Ω,
I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico

Determinare l’indicazione del wattmetro

[Pw = 12.62 kW]

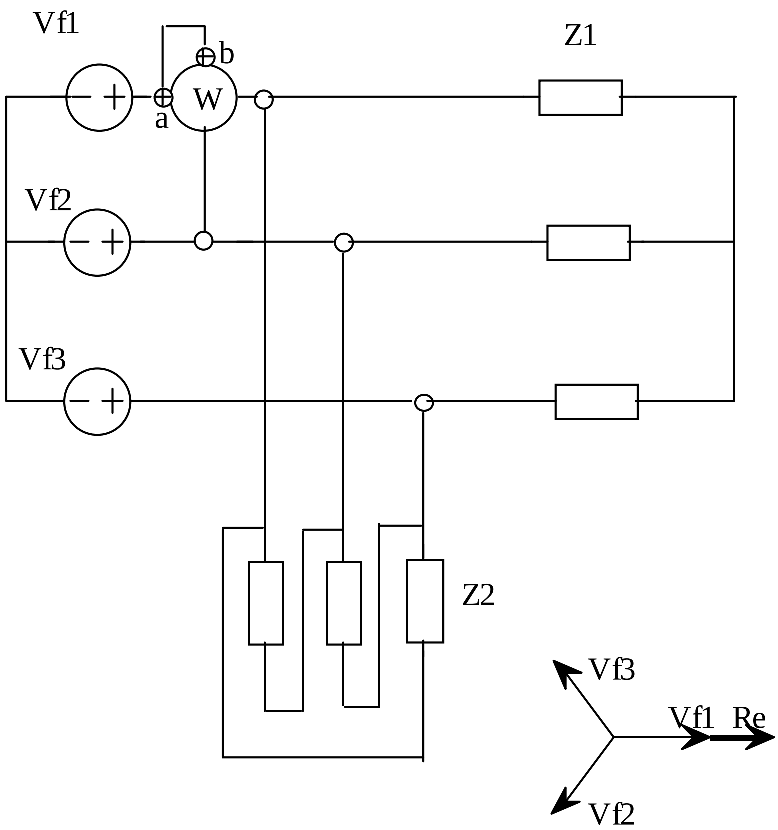


Fig. 9.3

{Il wattmetro fornisce un’indicazione di potenza attiva. Nel caso dell’esercizio per calcolare tale potenza attiva è necessario calcolare la corrente nella fase 1 entrante nel morsetto amperometrico contrassegnato e la tensione Vw. In particolare tale tensione è la tensione di linea V12 = Vf1-Vf2 = 330+j190.526 V. Per calcolare la corrente Iw misurata dal wattmetro conviene considerare il circuito monofase equivalente essendo la rete simmetrica ed equilibrata. E’ necessario trasformare il carico trasversale nel suo equivalente a stella, si ottiene quindi Z2s = Z2/3 = 5+j1.667Ω . La rete monofase equivalente è costituita dal generatore di tensione Vf1 e dal parallelo di Z1 e Z2s. La corrente richiesta è quindi data da Iw = Vf1(Y1+Y2s) =48-j17.6 A dove Y1 e Y2s sono le ammettenze corrispondenti a Z1 e Z2s rispettivamente. La potenza attiva misurata dal wattmetro è data da Pw = Re(Vw*$\underline{Iw}$)= 12.62 kW}*

Ex9.4
Dato il circuito trifase in figura 9.4, sono noti:
Vf1 = 100 V, Vf2 = 200 V, Vf3 = 150 V
R = 30 Ω, Xl = 10 Ω

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico Determinare l'indicazione del wattmetro

[Pw = 1.875 kW]

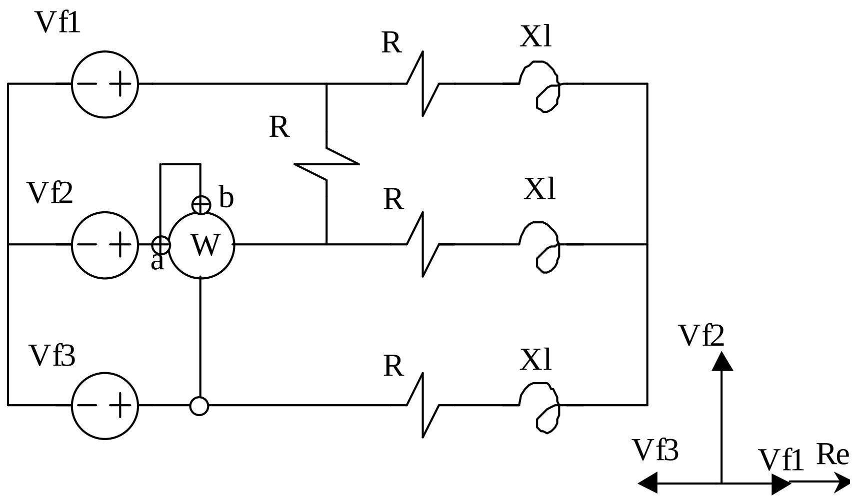


Fig. 9.4

*{Per calcolare la potenza attiva misurata dal wattmetro è necessario calcolare la corrente Iw entrante nel morsetto amperometrico contrassegnato e la tensione Vw. Tale tensione è pari a Vw = Vf2-Vf3 = 150+j200 V, dove Vf1 =100 V, Vf2 = j200 V, Vf3 = -150 V. La corrente Iw è data dalla somma algebrica di due contributi: quello che percorre l'impedenza Z2 = R+jXl e quello che percorre la resistenza trasversale R. Chiamiamo Z1 l'impedenza della fase 1 pari a Z1 = R+jXl, Z2 quella della fase 2 pari a Z2 = R+jXl e Z3 quella della fase 3, pari a Z3 = R+jXl. La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello delle tre impedenze Z1, Z2 e Z3 è pari a Voo = (Vf1*Y1+Vf2*Y2+Vf3*Y3)/(Y1+Y2+Y3) =-16.667+j66.667 V, essendo Y1, Y2 e Y3 le tre ammettenze delle tre impedenze Z1, Z2 e Z3. La corrente che percorre l'impedenza Z2 verso destra è pari a I2 = (Vf2-Voo)/Z2 = 1.833+j3.833 A. La corrente che percorre la resistenza R trasversale è pari a Ir = (Vf2-Vf1)/R =-3.33+j6.667 A diretta verso l'alto. La corrente entrante nel morsetto amperometrico del wattmetro è pari a Iw = Ir+I2 = -1.5+j10.5 A. La potenza misurata è pari a Pw = Re(Vw** $\underline{Iw}$ *)= 1.875k W*
}

Ex9.5
Dato il circuito trifase in figura 9.5, sono noti:
V = 380 V (valore efficace della terna simmetrica di tensioni di linea)
R1 = R3 = 10 Ω
L1 = L2 = 31.83 mH
C = 100 μF
Pm = 2266 W,
Qm = -1632 Var

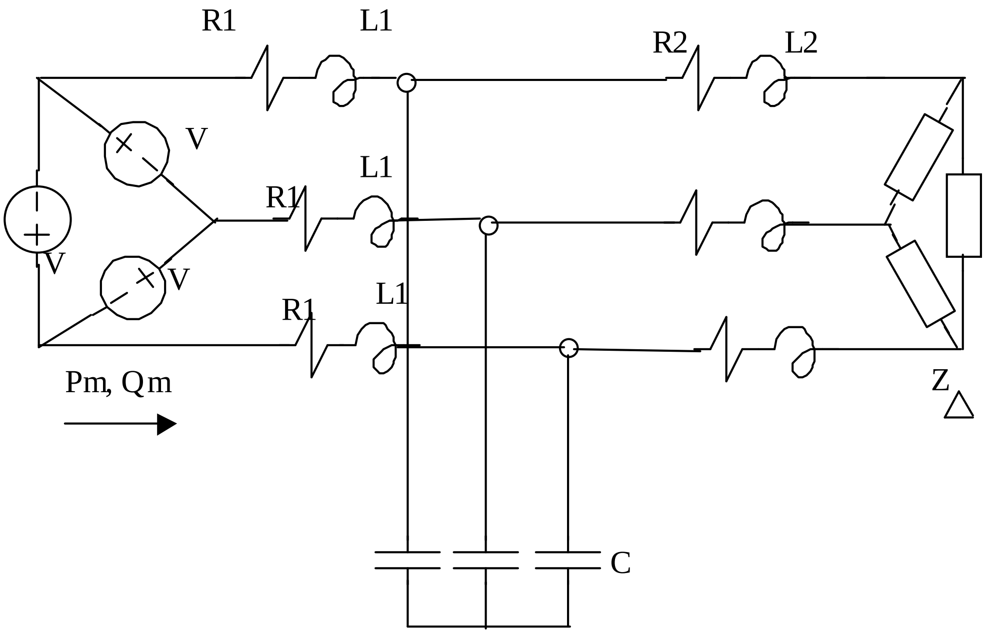


Fig. 9.5

Determinare l'impedenza Z del carico a triangolo a valle

[Z = 58.978+j88.848 Ω]

{Il sistema è simmetrico e equilibrato, conviene quindi considerare il circuito monofase equivalente. Per fare questo è necessario trasformare le tensioni di linea nelle corrispondenti tensioni di fase e trasformare tutti i carichi a triangolo nel loro equivalente a stella. Si ottiene un circuito monofase costituito dal parallelo di tra rami: il primo è costituito da un generatore di tensione con in serie l'impedenza Z1 = R1+jωL1, il secondo da una impedenza Zc = -jXc e il terzo dalla serie di Z2 = R2+jωL2 e dall'equivalente a stella del carico incognito.
Nel circuito monofase la potenza attiva e reattiva fornite dal generatore sono pari a un terzo di quella relativa al circuito trifase. Si divide ora il circuito monofase in sezioni e si utilizza il metodo di Boucherot per la risoluzione. Si hanno le seguenti sezioni:
Sez A: Vf1
Sez B: Z1
Sez. C: Zc
Sez. D: Z2
Sez E: Z incognita.
*Per la sez. A sono note la tensione Vf1 = V/$\sqrt{3}$ = 219.393 V, Pa = Pm/3 =755.333 W, Qa = Qm/3 = -544Var.La corrente Ia si calcola nel seguente modo: Ia = $\sqrt{Pa^2+Qa^2}$ /Vf1 = 4.243 A. Per la sezione B si ha Pb = Pa-R1*Ia^2 = 575.32 W, Qb = Qa-X1*Ia^2= -724.008 Var. Ib = Ia e Vb = $\sqrt{Pb^2+Qb^2}$ /Ib= 217.96 V . Per la sezione C si ha Pc = Pb, Vc = Vb, Qc = Qb+Vb_2/Xc = 768.452 Var e Ic = $\sqrt{Pc^2+Qc^2}$ /Vc = 4.404 A. Per la sezione D si ha Id = Ic, Pd = Pc-R2*Id^2= 381.344 W, Qd = Qc-X2*Id^2= 574.482 Var, Vd = $\sqrt{Pd^2+Qd^2}$ /Id = 156.56 V. La corrente che interessa la sezione D è pari a Ic, di conseguenza si ricava che la resistenza e la reattanza del carico a stella equivalente risultano pari a Rs = Pd/Ic^2 = 19.659 Ω, Xs = Qd/Ic^2 = 29.616 Ω. Ritornando al carico a triangolo si ottiene Rt = 3*Rs = 58.978 Ω, Xt = 3*Xs = 88.848 Ω. }*

Ex9.6

Dato il circuito trifase in figura 9.6 sono noti:

$v1(t) = \sqrt{2}\ 220*\cos(\omega t)$

$v2(t) = \sqrt{2}\ 220*\cos(\omega t+\pi/2)$

$v3(t) = \sqrt{2}\ 220*\cos(\omega t-\pi/3)$

R = 10 Ω L1 = 5mH,

L2 = 10mH. L3 = 15mH

f = 50 Hz

Determinare la corrente I.

[I = 7.748+j0.866A]

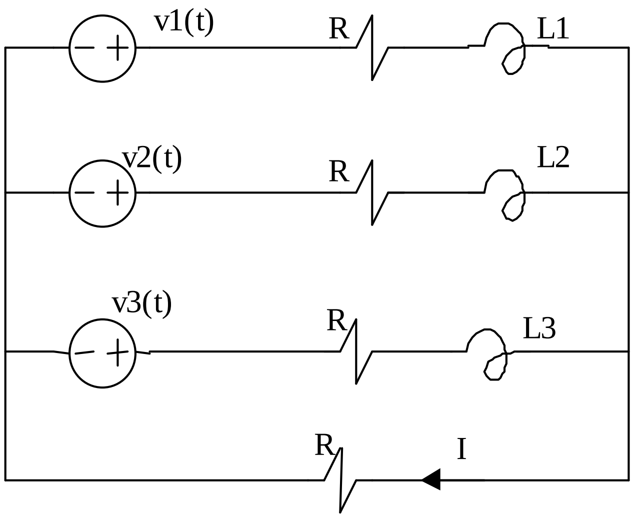


Fig. 9.6

{Per prima cosa è necessario passare dal dominio del tempo a quello fasoriale e si ottiene $Vf1 = 220$ *V,* $Vf2 = 220*e^{j\pi/2}$ *V,* $Vf3 = 220*e^{-j\pi/3}$ *V. Chiamiamo Z1, Z2, Z3 le impedenze delle tre fasi e Zo = R. La tensione tra i due centri stella è data da Voo = (Vf1*Y1+Vf2*Y2+Vf3*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Yo) = 77.477+j8.665 V dove Y1, Y2, Y3, Yo sono le ammettenze corrispondenti alle impedenze Z1, Z2, Z3 e Zo. La corrente richiesta è pari a I = Voo/R = 7.748+j0.866 A}*

Ex9.7
Dato il circuito trifase in figura 9.7, sono noti:
Vf1 = 80 V, Vf2 = 100 V, Vf3 = 120 V
R = 7 Ω, Z1 = 10+j20 Ω
Z2 = 30 Ω, Z3 = -j15 Ω
Z0 = 3+j Ω

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico

Determinare l’indicazione del wattmetro

[P = 218.908 W]

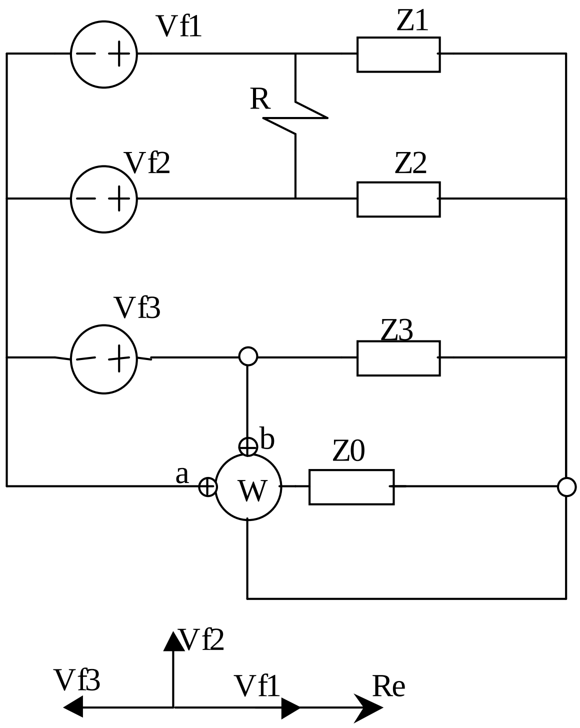


Fig. 9.7

{E’ necessario calcolare la corrente Iw e La tensione Vw entranti nei morsetti contrassegnati. La tensione Vw è quella che si ha ai capi di Z3 diretta verso sinistra, la corrente Iw è quella che percorre l’impedenza Zo verso destra.
*La tensione tra il centro stella delle tensioni e il centro stella di Z1, z2, Z3 e Zo è data dalla seguente espressione: Voo = (Vf1*Y1+Vf2*Y2+Vf3*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Y0) = 8.772-j20.444V dove Y1, Y2, Y3, Y0 sono le ammettenze corrispondenti. LA tensione Vw è pari a Vw = Vf3-Voo = -128.771+j20.444 V. La corrente Iw è pari a Iw = -Voo/Z0 = -0.587+j7.01 A. La potenza è allora pari a Pw= Re(Vw* Iw)= 218.908 W}*

Ex9.8

Dato il circuito trifase in figura 9.8, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:

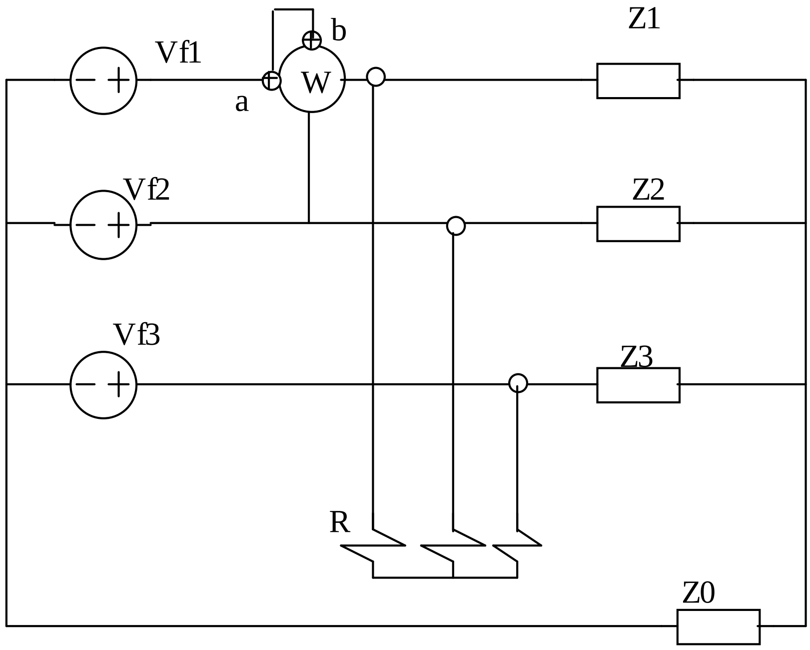
Vf = 100 V

R = 20 Ω, Z1 = 2+j5 Ω

Z2 = 3-j7 Ω, Z3 = 4 Ω

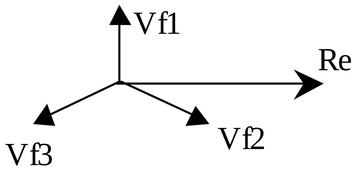
Z0 = j9 Ω

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltemtrico del wattmetro.



Determinare l'indicazione del wattmetro

[P = 710.537 W]



*{E' necessario calcolare la corrente Iw e la tensione Vw entranti nei morsetti contrassegnati. La corrente Iw è quella relativa alla fase 1, la tensione è pari a Vw = Vf1-Vf2 = -86.603+j150 V. Per calcolare Iw è necessario calcolare i due contributi di corrente che percorrono Z1 e il carico trasversale R. La corrente che percorre Z1 può essere calcolata una volta che sia nota la tensione tra il centro stella delle tensioni e quello dei carichi longitudinali. Tale tensione è pari a Voo = (Vf1*Y1+Vf2*Y2+Vf3*Y3)/(Y1+Y2+Y3+Y0) = 11.557+j11.18 V. La corrente che percorre Z1 è data da Iz1 = (Vf1-Voo)/Z1 = 14.517+j8.118 A (diretta verso sinistra). La tensione tra il centro stella delle tensioni e quello del carico trasversale è nulla essendo la terna simmetrica e il carico equilibrato, tale corrente è allora paria Ir = Vf1/R = j5 A. La corrente Iw si ottiene con una legge al nodo Iw = Ir+Iz1 = 14.517+j13.118 A. La potenza è allora pari a Pw= Re(Vw*$\underline{Iw}$)= 710.537 W*

}

Esercizi proposti

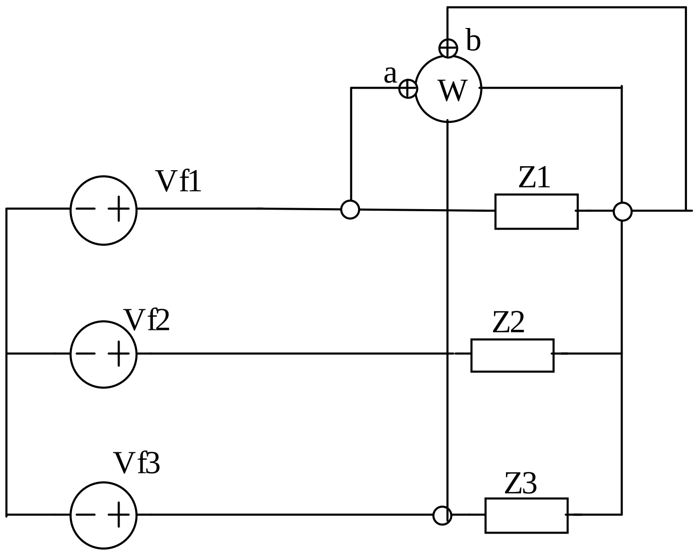
Ex9.9

Dato il circuito trifase in figura 9.9, alimentato da una terna simmetrica di tensioni, sono noti:
Vf = 150 V
Z1 = 20+j15 Ω
Z2 = 5-j8 Ω, Z3 = 10+j2 Ω

I morsetti *a* e *b* designano i morsetti contrassegnati amperometrico e voltmetrico del wattmetro.

Determinare l'indicazione del wattmetro

[Pw = 3.132 kW]



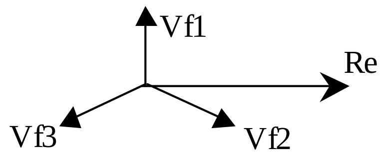


Fig. 9.9

{ E' necessario calcolare la corrente Iw e la tensione Vw entranti nei morsetti contrassegnati.
*La corrente Iw è pari alla corrente che percorre il corto circuito in parallelo all'impedenza Z1. La tensione Vw è data da Vw = Vf1-Vf3 = 129.904+j225 V. La corrente Iw si può calcolare con una legge al nodo come somma algebrica dei due contributi relativi alle fasi 2 e 3. La tensione tra i due centri stella è infatti pari a Vf1, essendo cortocircuitata l'impedenza Z1. Si ottiene allora I2 = (Vf1-Vf2)/Z2 = -27.523+j0.964 A, diretta verso sinistra e I3 = (Vf1-Vf3)/Z3 = 16.818+j19.136 A, diretta verso sinistra. La corrente Iw è data da Iw = I2+I3 = -10.705+j20.1 A. La potenza è allora pari a Pw= Re(Vw*Iw)= 3.132 kW }*

Ex9.10

Dato il circuito trifase simmetrico ed equilibrato in figura 9.10, sono noti:
V2 = 500 V,
P2 = 10 kW (potenza attiva del carico Z2)
Q2 = 8 kVar (potenza reattiva del carico Z2)
P3 = 20 kVar (potenza attiva del carico Z3),
cosϕ3 = 0.809 ind.
Z1 = 0.4+j0.3 Ω
f = 50 Hz

Determinare il modulo della tensione V e la capacità C dei tre condensatori affinché il cosϕ totale sia pari a 0.9.

[V = 537.519 V, C = 31.580 μF]

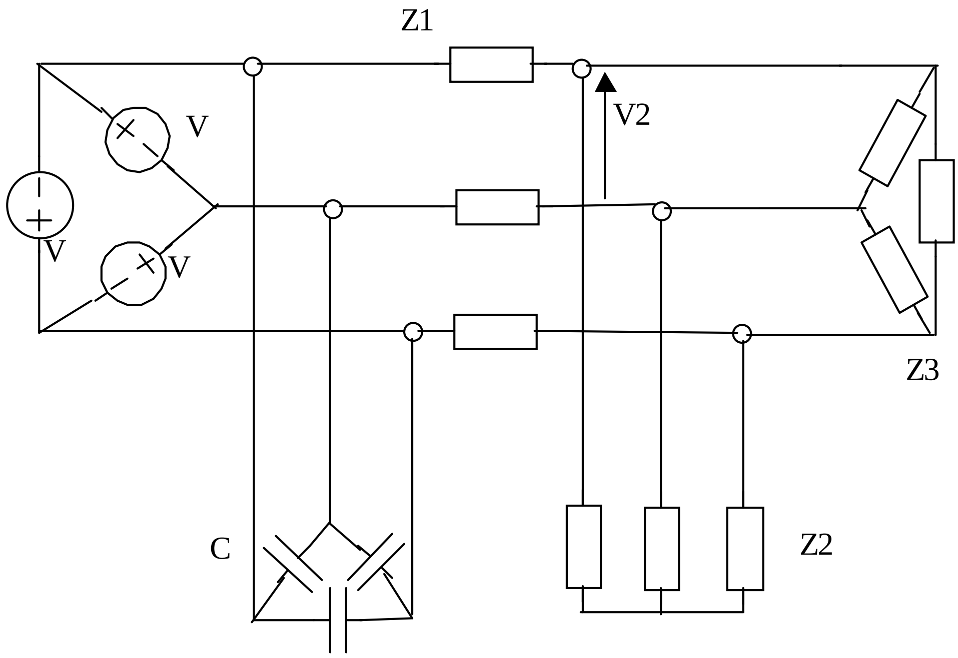


Fig. 9.10

{Si procede utilizzando il metodo di Boucherot. Si divide la rete nelle seguenti sezioni:
sez A: carico Z3
Sez B: carico Z2
Sez C: carico Z1
Sez. D condensatori C.
*Alla sezione B la potenza attiva totale Pb è data dalla somma dei due contributi P2 e P3; stesso discorso vale per la potenza reattiva. In particolare la potenza reattiva del carico Z3 si può ricavare da P3 e da cosϕ3 nel seguente modo: Q3 = P3*tanϕ3 = 14.53 kVar. Risulta quindi Pb = P3+P2 = 30 kW, Qb = Q2+Q3 = 22.53 kVar. Il modulo della corrente che interessa le impedenze Z1 è pari a Ib = ($\sqrt{Pb^2+Qb^2}$)/(V2*$\sqrt{3}$) = 43.323 A. Alla sez. C la potenza attiva vale Pc = Pb+Re(Z1)*Ib^2*3 = 32.25 kW e la potenza reattiva vale Qc = Qb+Im(Z1)*Ib^2*3 = 24.22 kVar. La tensione V richiesta vale allora V = ($\sqrt{Pc^2+Qc^2}$)/(Ib*$\sqrt{3}$) = 537.519 V.*
*Nella sez. D la potenza attiva è pari a quella che si ha nella sez. C, la potenza reattiva è data da Qd = Pd*tanϕ = 15.62 kVar. I tre condensatori devono allora fornire un contributo di potenza reattiva pari a Qcon = Qc-Qd = 8.6 kVar. Poiché i tre condensatori sono connessi a triangolo Qcon = 3V^2/Xc, di conseguenza la reattanza di ciascuno di essi è pari a Xc = 100.793 Ω e la capacità di ciascuno è pari a C = 1/(ω*Xc) = 31.58 μF}*