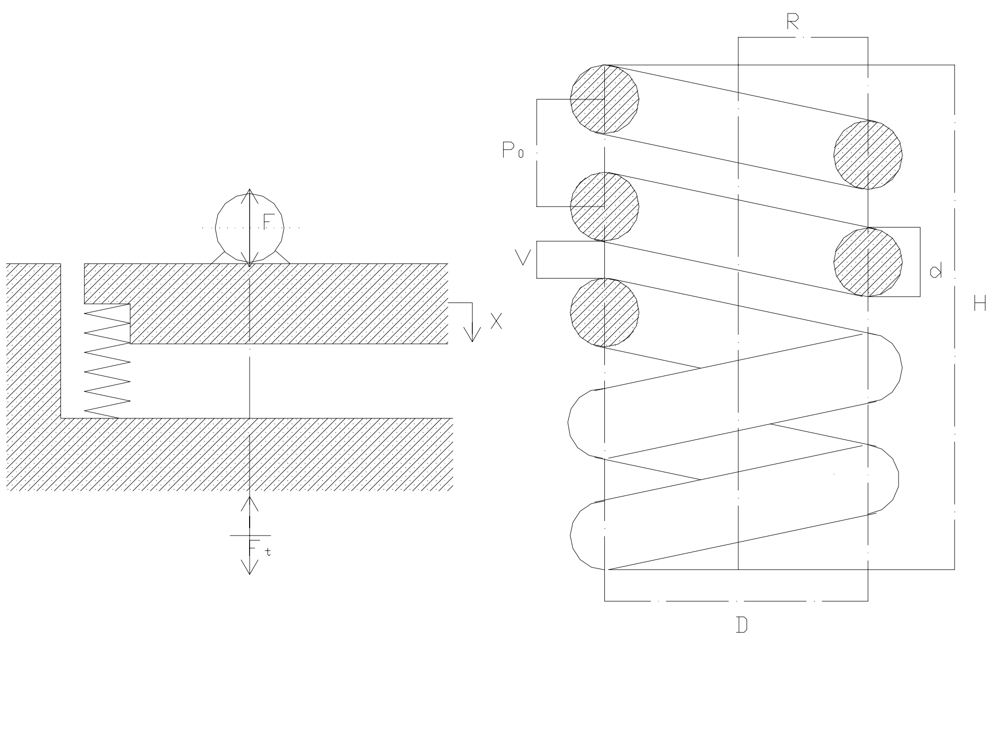
Esercitazione n°2

<u>Molla ad elica cicilindrica</u>

In figura è rappresentato un basamento sospeso antivibrante di una macchina nella quale viene originata una forza perturbante alternata sinusoidale di intensità massima F_0 di frequenza n diretta verticalmente.
La sospensione è realizzata mediante una piastra alla quale è ancorata rigidamente la macchina, appoggiata su quattro molle di torsione ad elica cilindrica.
Con le ipotesi che la vibrazione eccitata sia solo di traslazione verticale, che il carico si ripartisca uniformemente sulle quattro molle uguali e che il basamento sia stabile senza l'intervento di guide laterali, si dimensioni il sistema (massa sospesa, rigidezza delle molle) in modo che l'intensità massima della perturbazione F_t trasmessa al terreno sia uguale a F_0/η_t e che la semiampiezza del moto vibratorio del sistema sia X_0.
Eseguire il dimensionamento di massima delle molle, scegliendo un materiale tra quelli proposti, con le seguenti ipotesi:

- le molle possano chiudersi a pacco senza superare la tensione ammissibile di snervamento ($\tau_{amm,sn}=\tau_{lim,sn}/1.5$);
- per effetto del carico statico applicato la fraccia sia uguale a 0.7 la freccia massima a pacco;
- il rapporto caratteristico sia uguale a c = D/d sia compreso tra 4 (minore ingombro diametrale) e 7 (minore ingombro assiale).



Dati

Intensità massima della forza perturbante	$F_0 = 2453$ N
Frequenza della forzante	n = 800 cicli/min
Semiampiezza del moto della macchina	$\eta_t = 15$
Rapporto di trasmissione della perturbazione	$X_0 = 0.16$ mm

Materiali (UNI 3545-80)

48 Si 7	$R_m = 1300$ MPa	$R_{p0.2} = 1100$ MPa	A = 6 %
52 SiCrNi 5	$R_m = 1400$ MPa	$R_{p0.2} = 1220$ MPa	A = 5 %
60 SiCr 8	$R_m = 1450$ MPa	$R_{p0.2} = 1250$ MPa	A = 5 %

Simboli

d	Diametro del file della molla
D = 2R	Diametro del cilindro sul quale è avvolto l'asse del filo della molla
p_0	Passo della molla scarica
α	Angolo di avvolgimento
v	Spazio interspira a molla scarica
P	Forza sulla molla (sull'asse)
i	Numero di spire (e frazioni di spira) attive
$L = 2\pi Ri$	Lunghezza del filo

Norme UNI di riferimento

UNI 3545-80	(Materiali)
UNI 8736-85	(Materiali)
UNI 7900-79	(Calcolo molle a compressione)
UNI 8525-84	(Caratteristiche costruttive molle ad elica cilindrica a compressione)

Svolgimento

Dato il nostro sistema scriviamone l'equilibrio dinamico:

$$M\ddot{x} + 4Kx = F_0 \sin(\omega t)$$

Dove **M** è la massa sospesa, **K** la rigidezza delle molle, **x** la coordinata verticale con origine sulla mezzeria del basamento e rivolta verso il basso, $\mathbf{F_0}$ l'intensità massima della forza perturbante e **ω** la frequenza della forzante (in rad/s).
La soluzione dell'equazione differenziale è formata dalla soluzione dovuta all'integrale generale e da quella dovuta all'integrale particolare. Poiché le oscillazioni dovute all'integrale generale (*oscillazioni libere*) vengono smorzate, noi considereremo solo l'integrale particolare, ovvero quelle oscillazioni che sono sempre presenti a sollecitare la nostra struttura (*oscillazioni forzate*).
Soluzione dell'equazione sarà quindi:

$$x_p = -X_0 \sin(\omega t)$$

Sostituendo nell'equazione d'equilibrio dinamico otteniamo quindi:

$$X_0 = \frac{F_0}{4K}\left(\frac{1}{\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1}\right) \quad \text{con} \quad \Omega = \sqrt{\frac{4K}{M}}$$

dove **Ω** è la frequenza propria del nostro sistema.
Si può dimostrare (ma noi non lo faremo) che:

$$\eta_t = \left(\frac{\omega^2}{\Omega^2} - 1\right)$$

Sostituendo questa espressione, in quella precedente, ricaviamo la prima equazione di nostro interesse che ci permette di determinare la rigidezza delle molle, ovvero:

$$K = \frac{F_0}{4X_0\eta_t}$$

Sfruttando ancora l'equazione di equilibrio dinamico, possiamo ricavarci l'equazione che ci permette di trovare il valore della massa sospesa del nostro sistema:

$$M = \frac{4K}{\omega^2}(\eta_t + 1)$$

Adesso passiamo al dimensionamento statico.

Definiamo carico statico la quantità

$$P_0 = \frac{Mg}{4}$$

e $\mathbf{f_0}$ la sua corrispondente freccia statica.
Se la nostra molla è sottoposta ad un carico **P** avremo all'interno di essa degli sforzi dovuti alle azioni interne presenti. In particolare se l'angolo di avvolgimento è piccolo (e in una molla è sempre minore di 6°) queste diventano tutte trascurabili tranne il taglio **T** ed momento torcente **Mt**. Inoltre, essendo le τ dovute al momento torcente molto maggiori rispetto a quelle dovute al taglio, possiamo trascurare il contributo di quest'ultimo e quindi calcolarci il solo momento torcente che sarà pari a **PD/2**.
Passiamo ora predimensionare la nostra molla, ricordandoci che la richiesta è che le molle possano chiudersi a pacco senza superare la tensione ammissibile di snervamento.
Ricaviamo quindi la $\boldsymbol{\tau_{max}}$ che, sotto l'ipotesi di piccola curvatura, per un corpo a sezione cicolare è:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} y_{\max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}$$

Mettiamoci ora nella condizione peggiore ovvero che la nostra $\boldsymbol{\tau_{max}}$ sia uguale alla $\boldsymbol{\tau_{amm,sn}}$ e ricaviamo il valore del diametro come

$$d \geq \sqrt{\frac{8 P_0 c}{0{,}7 \pi \tau_{amm,sn}}}$$

dove **c** è il rapporto caratteristico scelto da noi, $\mathbf{P_0}$ il carico statico e la $\boldsymbol{\tau_{amm,sn}}$ (dipendente dal materiale utilizzato) la calcoliamo attraverso la seguente norma UNI

$$\tau_{amm,sn} = \frac{\tau_{\lim,sn}}{1{,}5} \qquad \text{con} \qquad \tau_{\lim,sn} = 0{,}58 R_{p0.2}$$

Il valore del diametro così ottenuto va arrotondato all'intero successivo, in quanto le industrie ci forniscono solo diametri interi (rispetto al mm). Il valore di **D** lo ricavo tramite **c** una volta calcolato **d**. Adesso dobbiamo calcolare il numero di avvolgimenti (o spire), indicato con la lettera **i.**
Per far questo dobbiamo scrivere l'uguaglianza tra lavoro esterno ed interno dovuto al momento torcente causato dal carico **P** sul tondino del filo della molla. Se indichiamo con φ l'angolo di torsione sul tondino possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2} P f = \frac{1}{2} M_t \varphi$$

ed essendo $\varphi = \frac{M_t}{G J_p} L$, dove **L** è lunghezza del filo, ricaviamo con semplici considerazioni geometriche, che:

$$i = \frac{G d}{8 c^3 K}$$

La nostra molla è ora completamente dimensionata.
Per completezza ricaviamo anche **v**, lo spazio interspira a molla scarica, **h**, l'altezza della molla scarica, $\mathbf{p_0}$, il passo a molla scarica e α l'angolo di avvolgimento

$$v = \frac{f_{\max}}{i}$$
$$p_0 = v + d$$
$$h = i p_0$$
$$\alpha = \arctan\left(\frac{p_0}{2D}\right)$$

Rimuovendo le ipotesi iniziali di taglio trascurabile e curvatura piccola, notiamo che la nuova $\tau_{T,C}$ è proporzionale alla nostra τ_{Mt} tramite un coefficiente $\mathbf{K_2}$ sperimentale dato dalla formula:

$$K_2 = \frac{4c-1}{4(c-1)} + 0.615\frac{1}{c}$$

Poichè $\tau_{T,C}$ indica un valore piu' realistico dello sforzo agente sulla molla, non resta che rapportarla alla $\tau_{amm,sn}$ dovuta al materiale da noi scelto, ricavando così un valore, che per noi è indice di sicurezza (o da un altro punto di vista di cedimento del materiale) e deve rimanere superiore a circa 1,15.

Qui di seguito vengono riportati i risultati ottenuti su foglio elettronico per tutte le scelte possibili di **c** e per tutti i materiali proposti.
I fattori di sicurezza colorati in rosso indicano una situazione di cedimento del materiale

Dati	Valore	Unità	Conversione	in
F_0	2453	N		
n	800	cicli/min	83,7758041	rad/s
X_0	0,16	mm	0,00016	m
η_t	15			
G	79230,76923	MPa		
K	255520,8333	N/m	255,5208333	N/mm
M	2330,070595	Kg		
P_0	5714,498134	N		
f_0	0,022364118	m	22,36411826	mm
P_{max}	8163,568763	N		
f_{max}	0,03194874	m	31,94874037	mm

Materiale	48 Si 7	$R_{p0.2}$	1110	MPa

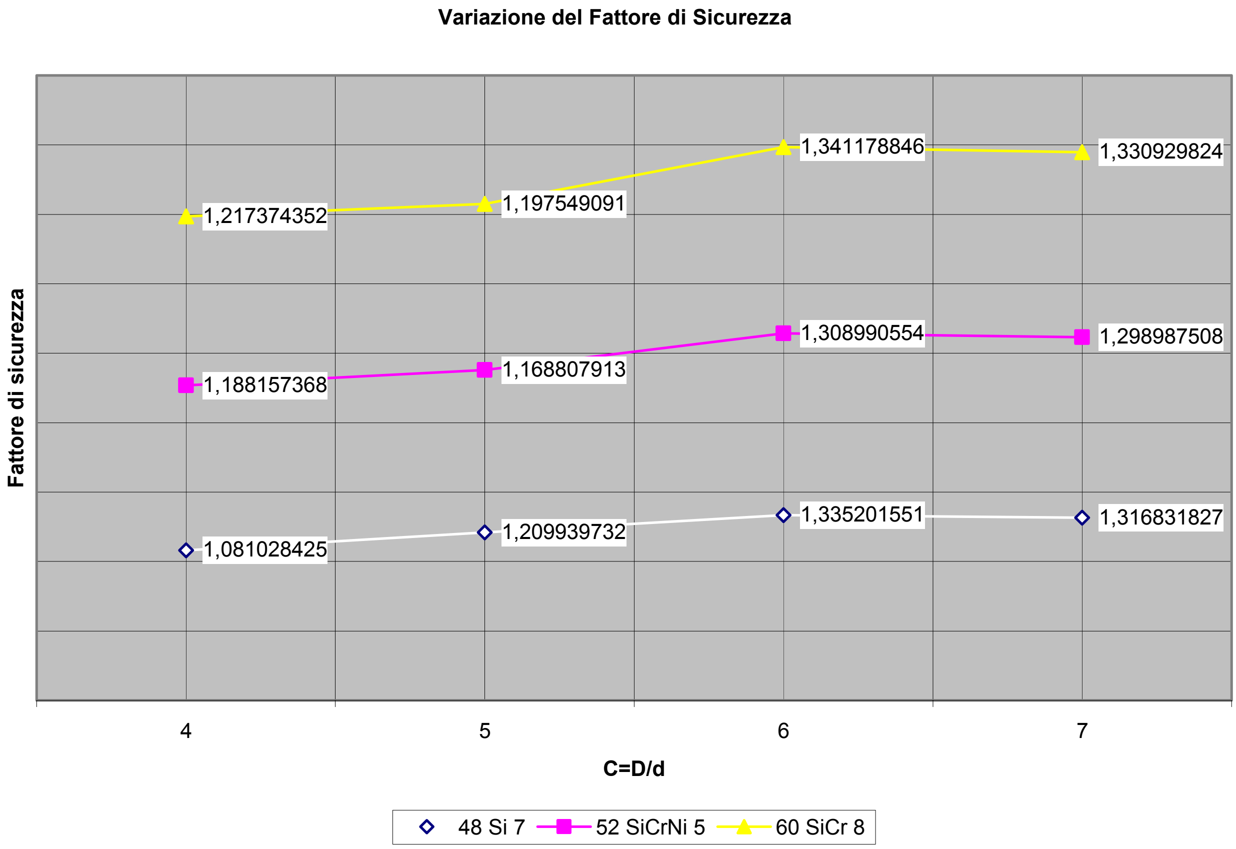
C=D/d	d [mm]	D [mm]	I	v [mm]	p_0 [mm]	L [mm]	α [rad]
4	14	56	8,478628994	3,768149	17,76815	1491,638	0,15733302
5	16	80	4,961209194	6,439708	22,43971	1246,888	0,13933934
6	18	108	3,229953903	9,891392	27,89139	1095,898	0,12841624
7	19	133	2,147024752	14,88047	33,88047	897,0953	0,12668804
h [mm]	TAU_{MT} [MPa]	K_2	$TAU_{T,C}$ [MPa]	TAU_{lim} [MPa]	Fattore Sicurezza		
150,6495	424,2521868	1,40375	595,5440072	643,8	1,081028425		
111,3281	406,0226006	1,3105	532,0926181	643,8	1,209939732		
90,08791	384,9695769	1,2525	482,174395	643,8	1,335201551		
72,74221	403,0983381	1,212857	488,9006987	643,8	1,316831827		

Materiale	52 SiCrNi 5	$R_{p0.2}$	1220	MPa

C=D/d	d [mm]	D [mm]	I	v [mm]	p_0 [mm]	L [mm]	α [rad]
4	14	56	8,478628994	3,768149	17,76815	1491,638	0,15733302
5	15	75	4,65113362	6,869022	21,86902	1095,898	0,14477348
6	17	102	3,050512019	10,47324	27,47324	977,5135	0,13386731
7	18	126	2,034023449	15,70716	33,70716	805,1492	0,13296934
h [mm]	TAU_{MT} [MPa]	K_2	$TAU_{T,C}$ [MPa]	TAU_{lim} [MPa]	Fattore Sicurezza		
150,6495	424,2521868	1,40375	595,5440072	707,6	1,188157368		
101,7157	461,9634923	1,3105	605,4031566	707,6	1,168807913		
83,80744	431,59219	1,2525	540,569218	707,6	1,308990554		
68,56116	449,131173	1,212857	544,7319513	707,6	1,298987508		

Materiale	60 SiCr 8	$R_{p0.2}$	1250	MPa

C=D/d	d [mm]	D [mm]	i	v [mm]	p_0 [mm]	L [mm]	α [rad]
4	14	56	8,478628994	3,768149	17,76815	1491,638	0,15733302
5	15	75	4,65113362	6,869022	21,86902	1095,898	0,14477348
6	17	102	3,050512019	10,47324	27,47324	977,5135	0,13386731
7	18	126	2,034023449	15,70716	33,70716	805,1492	0,13296934
h [mm]	TAU_{MT} [MPa]	K_2	$TAU_{T,C}$ [MPa]	TAU_{lim} [MPa]	Fattore Sicurezza		
150,6495	424,2521868	1,40375	595,5440072	725	1,217374352		
101,7157	461,9634923	1,3105	605,4031566	725	1,197549091		
83,80744	431,59219	1,2525	540,569218	725	1,341178846		
68,56116	449,131173	1,212857	544,7319513	725	1,330929824		



Qui sopra è riportato l'andamento del fattore di sicurezza al variare di **c** per tutti i materiali proposti