

**Esercitazioni**  
**di**  
**Costruzione di Macchine**

**A.A. 2002 - 2003**

## Esercitazione n°1

### Manovellismo ordinario centrato

Una macchina per prove di fatica su molle a balestra aziona, attraverso un giunto che trasmette solo momento torcente, un manovellismo ordinario centrato.

Il piede di biella collegato alla mezzeria della molla a balestra, appoggiata agli estremi, imprime ad essa uno spostamento  $f$  variabile fra 0 e  $2r$ , corrispondente alle posizioni di punto morto interno ed esterno rispettivamente.

Essendo il rapporto  $\lambda = r/l = 0.05$  si può approssimare  $\lambda = 0$  (biella di lunghezza infinita) e quindi ritenere che lo spostamento del piede di biella avvenga normalmente all'asse della balestra.

Nella posizione di punto morto interno la molla a balestra è nella posizione indeformata con asse rettilineo.

Nell'ipotesi di non tener conto delle azioni di inerzia, vengono richiesti:

- 1) i diagrammi delle azioni interne sull'albero di manovella per  $\Phi = 0$  e  $\Phi = \pi/2$ ;
- 2) il calcolo degli sforzi nei punti caratteristici delle sezioni H-H e K-K, poste a metà lunghezza dei tratti in oggetto

### Dati

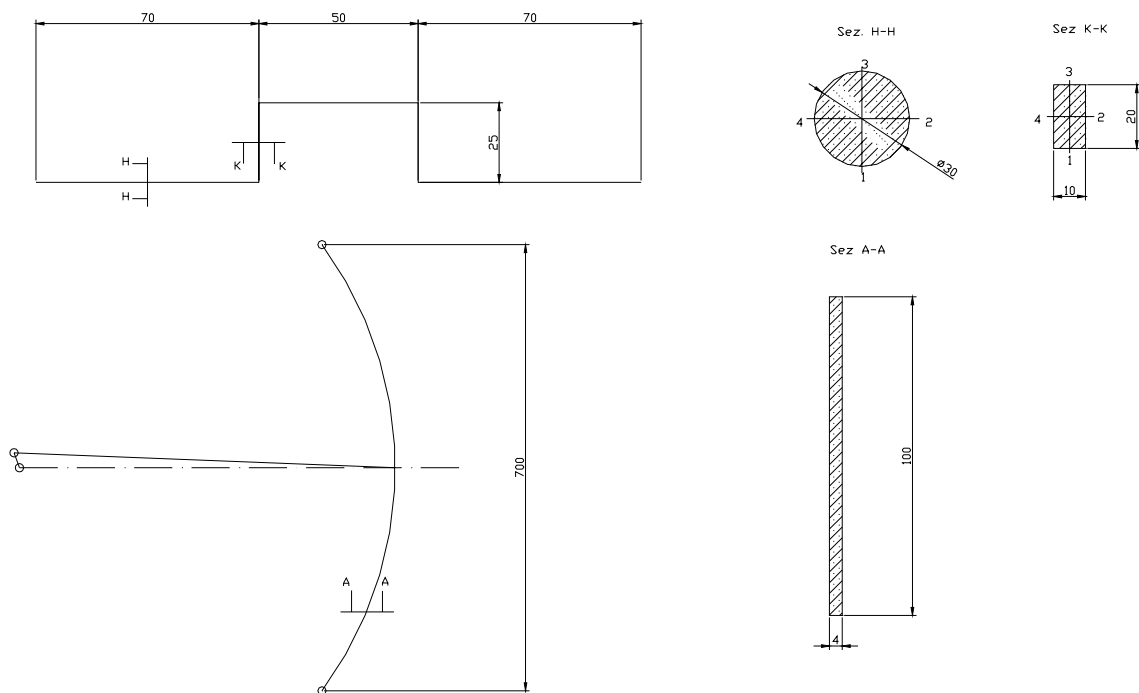
$r = 25$  mm  
 $a = 70$  mm  
 $b = 50$  mm

$c = 700$  mm  
 $s = 100$  mm  
 $h' = 20$  mm

$d = 15$  mm  
 $s' = 10$  mm  
 $h = 4$  mm

Materiale della molla a balestra  
Materiale dell'albero di manovella  
Materiale della biella

48 Si 7  
39 NiCrMo 3  
16 NiCr 11



### Breve Richiamo di Scienza delle Costruzioni

Si considerino per lo studio di tale problema le seguenti ipotesi (De Saint Venant):

- corpo continuo dotato di tre dimensioni;
- corpo costituito di materiale omogeneo, isotropo, linearmente elastico;
- sezione trasversale del corpo qualsiasi ma compatta e non dispersa;

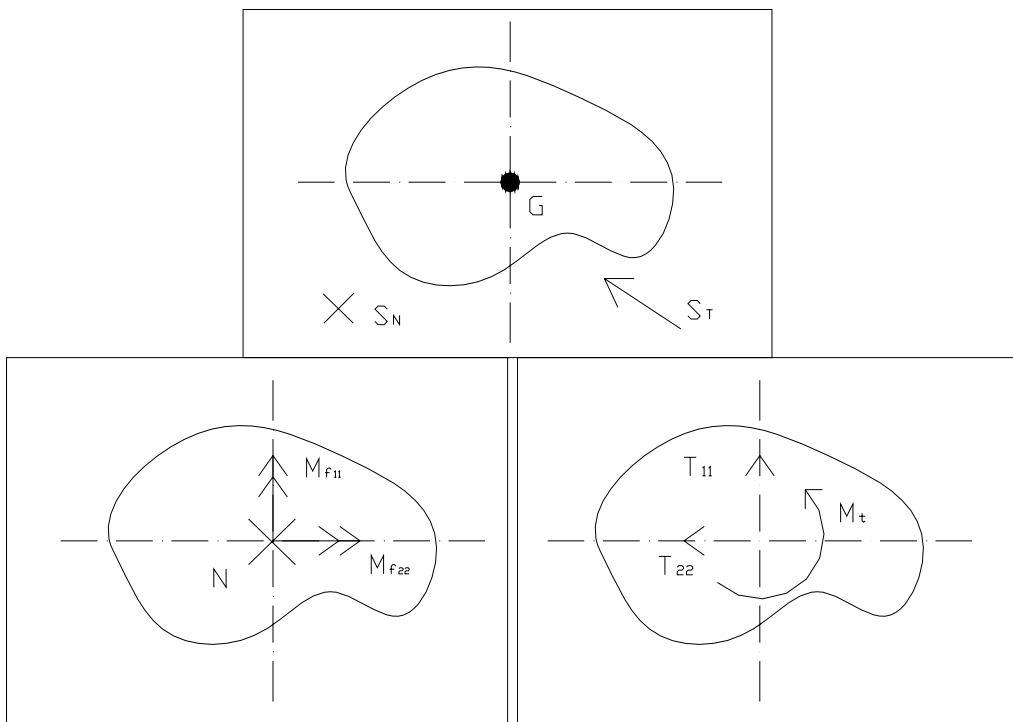
per le forze esterne attive:

- forze applicate esclusivamente sulle superfici di base con distribuzione arbitraria;
- forze superficiali, quindi, nulle sulla superficie laterale che risulta scarica;
- forze di volume nulle ovunque nel volume  $V$ ;
- sistema equilibrato.

Noi inoltre lavoreremo lontano dai punti di applicazione dei carichi, in quanto le soluzioni che otteniamo con le ipotesi di De Saint Venant non sono valide in quei punti perché necessitano di una correzione e calcolo di queste soluzioni correttive non rientra nei nostri scopi.

### Convenzioni e calcolo degli sforzi nella sezione

Data la sezione di un corpo qualsiasi supponiamo questa sottoposta ad una forza normale  $S_N$  e ad una di taglio  $S_T$  come mostrato in alto nella figura qui sotto.



Visto che ci riferiremo sempre al baricentro della sezione, scomponiamo la nostra  $S_N$  in una forza normale  $N$  agente nel baricentro ed equivalente in modulo a  $S_N$ , e in due momenti  $M_{f11}$  e  $M_{f22}$  (detti momenti di trasporto e rappresentati secondo la regola della mano destra). Facciamo lo stesso anche per  $S_T$  riportando una  $T_{11}$  e una  $T_{22}$  sugli assi principali d'inerzia, equivalenti alla proiezione di  $S_T$  sugli stessi e un momento torcente  $M_t$  equilibrante la traslazione di  $S_T$  nel baricentro.

Adesso siamo in grado di calcolare gli sforzi agenti sulla sezione in questione.

Lo sforzo dovuto all'azione  $N$  sarà:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

dove A è l'area della sezione su cui agisce N, mentre quello dovuto ai momenti di trasporto sarà

$$\sigma_{\max} = \frac{M_f}{J_{nn}} y_{\max}$$

dove  $M_f$  è il momento flettente di trasporto agente sulla sezione,  $J_{nn}$  è il momento d'inerzia rispetto all'asse principale su cui agisce  $M_f$  e  $y_{\max}$  è la coordinata del punto di massima distanza rispetto all'asse principale nn.

Poiché le nostre sezioni saranno tendenzialmente rettangola o circolare i momenti d'inerzia saranno così calcolati

$$\text{Sezione circolare di diametro D: } J_{nn} = \frac{\pi}{64} D^4$$

$$\text{Sezione rettangolare di base b e altezza h: } J_{nn} = \frac{1}{12} bh^3$$

Per quanto riguarda T possiamo scrivere

$$\tau_T = \frac{TS^*}{J_p b}$$

dove T è la forza di taglio applicata nel baricentro,  $S^*$  è il momento statico della sezione di area compresa tra b e parte del contorno della sezione, e  $J_p$  è il momento polare della sezione.

Possiamo quindi trovare delle espressioni semplificate per le nostre sezioni:

$$\text{Sezione circolare di area A: } \tau_{\max} = \frac{4T}{3A}$$

$$\text{Sezione rettangolare di area A: } \tau_{\max} = \frac{2T}{3A}$$

La  $\tau$  dovuta al momento torcente sarà massima sul bordo della sezione (dove il braccio è massimo). Se la sezione è circolare otterremo così

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{J_p} r = \frac{16M_t}{\pi D^3}$$

mentre per la sezione rettangolare otterremo due  $\tau$  una lungo h e una lungo b, così calcolate

$$\tau_h = \mu \frac{M_t}{b^2 h} \quad \text{e} \quad \tau_b = \mu \frac{M_t}{b^2 h}$$

con  $\mu$  variabile in base al rapporto h/b secondo la seguente tabella:

<b>h/b</b>	1	1,5	2	4	20
<b><math>\mu</math></b>	4,8	4,33	4,07	3,55	3,1

**Svolgimento**

Poiché il rapporto  $\lambda$  è approssimabile a zero possiamo considerare che lo spostamento del piede di biella avvenga normalmente all'asse della balestra.

Adesso dobbiamo calcolare la forza  $\mathbf{F}$  agente sulla nostra manovella per  $\Phi = 0$  e per  $\Phi = \pi/2$ . Per fare questo ricorriamo al Principio dei Lavori Virtuali che ci permette di scrivere

$$1 \cdot f = \int_0^l M_k \frac{M}{EJ} dx$$

dove  $f$  è la freccia,  $M_k$  è il momento fittizio,  $l$  la lunghezza della balestra,  $E$  il modulo di Young del materiale in questione,  $M$  il momento reale agente sulla manovella e  $J$  il momento d'inerzia della sezione della manovella in quel punto.

Sfruttando la simmetria della struttura si può facilmente ricavare che

$$F = \frac{4Efs h^3}{c^3}$$

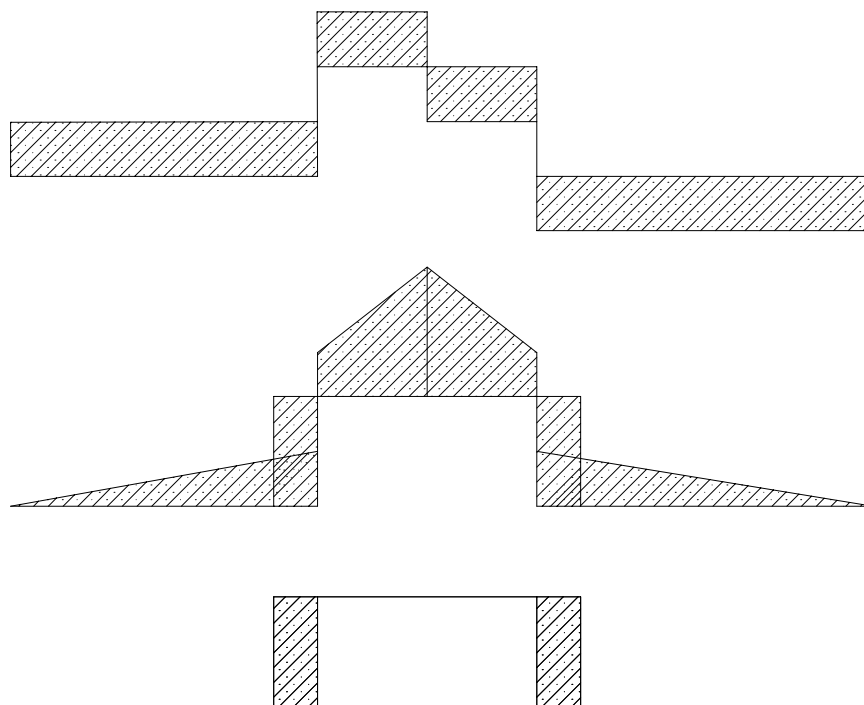
dove  $s$ ,  $h$ ,  $b$  sono dati noti in partenza.

Possiamo così calcolare numericamente  $\mathbf{F}$  nei due casi richiesti, ottenendo

$\Phi = 0$	$f = 2r$	$\mathbf{F}_0 = 768,8 \text{ N}$
$\Phi = \pi/2$	$f = r$	$\mathbf{F}_{\pi/2} = 384,4 \text{ N}$

Conoscendo  $\mathbf{F}$  possiamo rappresentare con facili considerazioni le azioni interne agenti nella manovella nel caso  $\Phi = 0$ .

Esponiamo qui sotto i risultati ottenuti

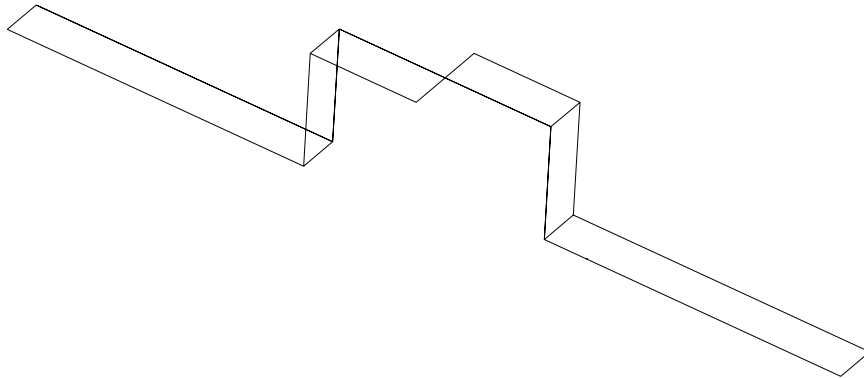


Il primo grafico si riferisce al taglio  $T$ , positivo per la prima metà della manovella e negativo per la restante.

Il secondo grafico mostra l'azione del momento flettente agente sulla struttura disegnato verso la parte delle fibre tese.

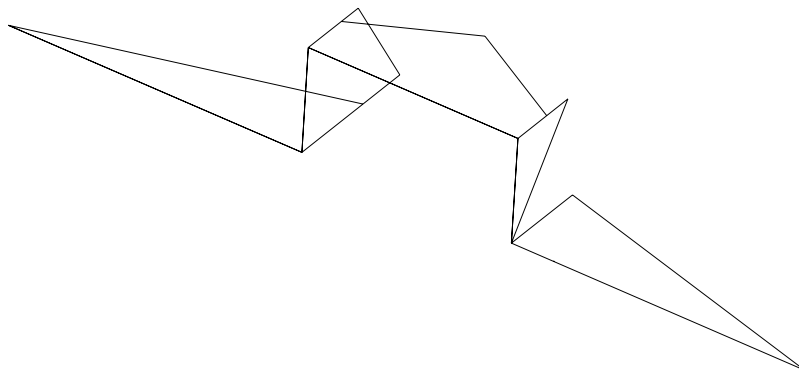
L'ultimo grafico rappresenta l'azione  $N$  di compressione (quindi con segno negativo) agente sulla manovella nelle sole barre laterali di lunghezza  $r$ .

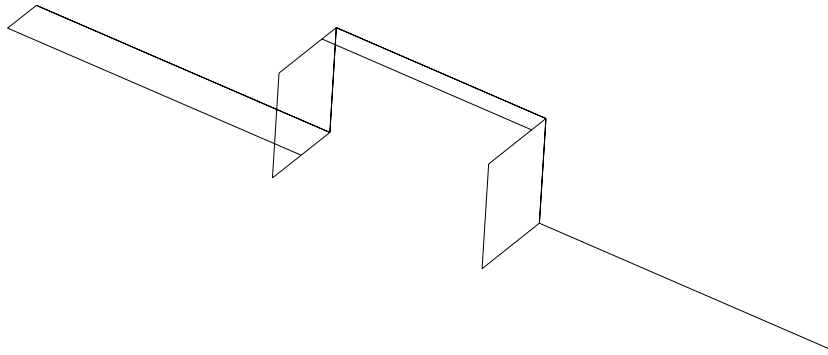
Per il caso  $\Phi = \pi/2$  le cose si fanno un po' più complicate in quanto la forza  $F$  non agisce nel piano della struttura e quindi avremo per il taglio una situazione di questo tipo



con il taglio positivo nella prima metà e negativo nella seconda.

L'azione assiale  $N$  sarà nulla in tutta la struttura, mentre avremo la presenza di un momento flettente in tutta la manovella (figura in basso) e di un momento torcente nella sola prima metà equilibrato dal momento del motore (figura pagina successiva).





Adesso passiamo al calcolo degli sforzi nei punti caratteristici delle sezioni indicate nel testo come H-H e K-K.

Anche in questo caso dobbiamo distinguere i due casi  $\Phi = 0$  e  $\Phi = \pi/2$

**Caso  $\Phi = 0$**

### **SEZIONE H-H**

La sezione H-H è una sezione circolare sulla quale agiscono una forza di taglio agente dal punto 1 verso il punto 3 e pari a  $F/2$  e un momento flettente diretto (vedi convenzione) verso il punto 4 e di intensità  $Fa/4$ . Svolgendo i calcoli otteniamo quindi:

$$\sigma_1 = 40,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -40,6 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_1 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_2 = 2,9 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_4 = 2,9 \text{ N/mm}^2$$

### **SEZIONE K-K**

La sezione K-K è una sezione rettangolare sulla quale agiscono una forza normale pari a  $F/2$  e un momento flettente diretto verso il punto 3 e pari a  $Fa/2$ . Svolgendo i calcoli otteniamo

$$\sigma_1 = -1,92 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = -82,64 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = -1,92 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = 78,79 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_1 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_2 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_4 = 0 \text{ N/mm}^2$$

Dove il contributo dovuto all'azione normale è pari a  $\sigma_N = -1,92 \text{ N/mm}^2$  mentre quello dovuto al momento flettente (in modulo) è pari a  $\sigma_f = -80,71 \text{ N/mm}^2$

**Caso  $\Phi = \pi/2$**

**SEZIONE H-H**

Sulla sezione H-H agiscono una forza di taglio agente dal punto 2 verso il punto 4 e pari a  $F/2$ , un momento flettente diretto (vedi convenzione) verso il punto 4 e di intensità  $Fa/4$ , e un momento torcente antiorario di intensità  $Fr$ . Svolgendo i calcoli otteniamo quindi:

$$\sigma_1 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 20,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = -20,3 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{Mt} = 14,5 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = 1,45 \text{ N/mm}^2$$

**SEZIONE K-K**

Sulla sezione K-K agiscono una forza di taglio agente dal punto 3 verso il punto 1 e pari a  $F/2$ , un momento flettente diretto (vedi convenzione) verso il punto 2 e di intensità  $3Fr/4$ , e un momento torcente antiorario di intensità  $Fa/2$ . Svolgendo i calcoli otteniamo quindi:

$$\sigma_1 = -10,81 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_2 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_3 = 10,81 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_4 = 0 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{Mth'} = 27,37 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_{Mts'} = 13,68 \text{ N/mm}^2$$

$$\tau_T = 1,44 \text{ N/mm}^2$$