Soluzione Tema d'Esame di Aerodinamica del 26 – 03 – 2003

ESERCIZIO 1

Scriviamo una soluzione generica dell'equazione di Laplace come

(1.1) $$\varphi(x,y)=\left(Ae^{ky}+Be^{-ky}\right)\left(C\sin kx+D\cos kx\right)$$

Scriviamo ora la derivata rispetto a y del potenziale (ovvero la velocità v(x,y))

(1.2) $$v(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=k\left(Ae^{ky}-Be^{-ky}\right)\left(C\sin kx+D\cos kx\right)$$

Sappiamo che la condizione al contorno da applicare è che v(x,2π)=sin(x). Da questo deduciamo subito che D = 0 , k = 1 e C(A,B) in particolare

(1.3) $$C=\frac{1}{Ae^{2\pi}-Be^{-2\pi}}$$

Sapendo inoltre che sul contorno restante la velocità è nulla ovunque, utilizzando v(π/2,0) = 0 ricaviamo che A = B. Ricordando la relazione

(1.4) $$\cosh(ky)=\frac{e^{ky}-e^{-ky}}{2}$$

possiamo scrivere

(1.5) $$\varphi(x,y)=\frac{\cosh(y)}{\sinh(2\pi)}\sin(x)$$

ESERCIZIO 2

N = 10; C = 10; ρ = 1,12 Kg/m^3

Poiché la distanza tra vortice e parete (ovvero tra la terra e l'aereo) è ragguardevole, possiamo evitare di utilizzare il principio delle immagini e calcolare semplicemente la velocità orizzontale dovuta al vortice e sentita da un osservatore posto a 900 m di distanza.
Dal teorema di Kutta – Joukowsky sappiamo che

(2.1) $$\Gamma=\frac{L}{\rho V_\infty}$$

Inoltre notiamo che essendo l'osservatore perpendicolare con la sorgente del vortice possiamo affermare che la velocità orizzontale avvertita da questo, in coordinate cilindriche, coincide con quella radiale. Essendo il potenziale di un vortice

(2.2) $$\varphi(r,\theta)=\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

Calcoliamo la velocità radiale come

(2.3) $$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Valutando questa per r = 900 otteniamo una velocità u = 0,016 m/s

ESERCIZIO 3

N = 10; C = 10; T = 288,15 K; ρ = 1,225 Kg/m^3

Definiamo la velocità limite come

(3.1) $$\frac{V_l^2}{2} = \frac{a_\infty^2}{\gamma - 1} + \frac{V_\infty^2}{2}$$

e ricaviamo un calore pari a 773,04 m/s
Definiamo la velocità critica come

(3.2) $$a_* = \frac{V_l}{\sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}}$$

da cui ricaviamo a_* = 315 m/s
Calcoliamo la velocità del suono del punto di ristagno come

(3.3) $$a_0 = \sqrt{\frac{V_l^2}{2}(\gamma - 1)}$$

da cui ricaviamo attraverso il legame

(3.4) $$p = \frac{a_0^2 \rho}{\gamma}$$

la pressione di ristagno pari a circa 104146 Pa
Infine stimiamo il coefficiente di portanza come quello di una lastra piano in moto subsonico

(3.5) $$c_L = 2\pi(\alpha - \alpha_0)$$

ottenendo così un valore pari a 0,66. Un ulteriore stima è possibile farla utilizzando il fattore di correzione 1/β (considerando che M = 0,41), dove in questo caso β è pari a 0,911. Si otterrebbe così un valore di coefficiente di portanza pari a 0,72