Soluzione del tema del 25 Giugno 2003

Nicola Morganti & Alessandro Pasquino

Esercizio 1

Sia

$$u = Ax\left(1 - e^{-y}\right); \quad y \geq 0$$

la componente x di velocità di un moto bidimensionale nel semipiano superiore delle y, con A costante positiva. Determinare l'altra componente v di velocità sapendo che il moto è incomprimibile e che $v\left(x, 0\right) = 0$. Determinare la funzione di corrente e la vorticità e stabilire se il moto è irrotazionale.

Soluzione

Dall'ipotesi di moto incomprimibile sappiamo che

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

da cui

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$$

possiamo quindi ricavare la componente v di velocità come:

$$v = -\int \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}y = -\int A(1 - e^{-y}) \mathrm{d}y = -A(y + e^{-y}) + C$$

dove C è una costante da determinare con l'altra condizione al contorno $v(x, 0) = 0$. Applicando quest'ultima otteniamo come risultato finale:

$$v(x, y) = A(1 - y - e^{-y})$$

Dalla conoscenza della componente v di velocità ricaviamo subito la funzione di corrente ψ come

$$\psi = -\int v \mathrm{d}x = A(y + e^{-y} - 1) + \psi_0$$

Calcoliamo quindi la vorticità ω come:

$$\omega = \nabla \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} u & v & z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \underline{k}$$

da cui otteniamo che:

$$\omega = (Axe^{-y})\underline{k}$$

Poichè la vorticità non è nulla possiamo concludere che il moto *non è irrotazionale.*

Esercizio 2

Si consideri un'ala dritta, molto allungata, immersa in una corrente uniforme di fluido incomprimibile. Il difetto di velocità nella scia, molto a valle dell'ala, sia dato dalla formula

$$\frac{u - V_\infty}{V_\infty} = k\left[1 - 2\left(\frac{y}{\delta_\omega}\right)^2 + \left(\frac{y}{\delta_\omega}\right)^4\right]; \quad -\delta_\omega \leq y \leq \delta_\omega$$

in cui y è la coordinata normale alla V_∞ e con origine nel piano di simmetria della scia, k è una costante e δ_ω è la semiampiezza della scia.
Calcolare il coefficiente di resistenza per unità di apertura, per i seguenti valori: $k = 0.15 + 0.005N$; corda $c = 0.45 + 0.02C$ metri; $\delta_\omega = 4 + 0.1N$ millimetri.

Soluzione (N = 10; C = 10)

Sappiamo che la resistenza per unità di apertura è in generale espressa come

$$D = c_D \frac{1}{2}\rho V_\infty^2 c$$

ma dalle condizioni del problema sappiamo che si tratta della resistenza viscosa che è possibile calcolare come

$$R_v = \lim_{x\to\infty} \rho V_\infty \int_{-\infty}^{\infty} (u - V_\infty)\mathrm{d}y$$

eguagliando le due formule e semplificando opportunamente i vari termini possiamo scrivere

$$c_D = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u - V_\infty}{V_\infty}\mathrm{d}y$$

Nel nostro caso il limite può essere tolto in quanto il difetto di velocità sulla scia non dipende dalla coordinata x. Inoltre l'intervallo di integrazione sarà $[-\delta_\omega, \delta_\omega]$. Svolgendo l'integrale otteniamo un valore di c_D pari a circa 0.00328.

Esercizio 3
Determina il numero di Mach, la pressione e la temperatura a valle di un'espansione su uno spigolo di 20° gradi. Condizioni a monte: $M_1 = 1.5 + 0.025N$ e $p_1 = 1$ bar.

Soluzione (N = 10; C = 10; $T_1 = 288.15\ K$)

Si tratta di un'espansione di Prandtl - Meyer per un angolo $\theta_1 = 20°$. Dalle tabelle abbiamo che per $M_1 = 1.75$ la $\nu(M_1) = 19.27$. É subito ricavabile quindi che

$$\nu(M_2) = \nu(M_1) + \theta_1 = 20^\circ = 39.27$$

Sempre utilizzando la tabella e interpolando vediamo che a $\nu(M_2) = 39.27$ corrisponde un $M_2 = 2.506$. Trovato il numero di Mach dopo l'espansione, le altre proprietà del fluido si calcolano facilmente grazie al fatto che l'espansione è isoentropica:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_2^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{1 + \dfrac{\gamma - 1}{2} M_2^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

da cui ricaviamo $p_2 = 0.312\ bar$ e $T_2 = 204.58\ K$