Soluzione Tema d'Esame di Aerodinamica del 23 – 01 – 2003

ESERCIZIO 1

Per risolvere questo tipo di esercizi utilizziamo il metodo delle immagini. Scriviamo quindi il potenziale per una sorgente puntiforme, di intensità q, posta a distanza h da una parete, come la somma (una parete corrisponde a una condizione di Neumann) del potenziale di una sorgente puntiforme, di intensità q, posta a quota h sull'asse y del nostro sistema di riferimento (con l'asse x coincidente con la parete) e del potenziale di una sorgente puntiforme di uguale intensità posta a quota -h sull'asse delle y.
Otteniamo quindi una funzione potenziale pari a

(1.1)
$$\varphi(x,y)=\frac{q}{2\pi}\log\sqrt{x^2+(y-h)^2}+\frac{q}{2\pi}\log\sqrt{x^2+(y+h)^2}$$

Ricaviamo quindi le velocità come

(1.2)
$$u(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+(y-h)^2}+\frac{q}{2\pi}\frac{x}{x^2+(y+h)^2}$$
$$v(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{q}{2\pi}\frac{y-h}{x^2+(y-h)^2}+\frac{q}{2\pi}\frac{y+h}{x^2+(y+h)^2}$$

Verifichiamo quindi che la condizione di Neumann sia rispettata sul contorno ovvero che v(x,0) = 0
Calcoliamo quindi la velocità orizzontale nel punto A(0,d) e otteniamo

(1.3)
$$u_A(0,d)=\frac{q}{2\pi}\frac{2h}{4h^2+h^2}+\frac{q}{2\pi}\frac{2h}{4h^2+h^2}=\frac{2q}{5\pi h}$$

Infine utilizzando il teorema di Bernoulli e ponendo $V_\infty = 0$, in quanto avendo solo una sorgente puntiforme a produrre moto questa all'infinito non disturberà lo stato quiete, otteniamo la pressione nel punto A come

(1.4)
$$p_A=p_\infty-\frac{1}{2}\rho u_A^2$$

ESERCIZIO 2

N = 10; C = 10; T = 288,15 K; ρ = 1,225 Kg/m^3

Dobbiamo calcolare la portanza per unità di apertura di una lastra piana quando questa assume tre differenti velocità all'infinito.

CASO A: **V_∞ = 30 m/s**

Innanzitutto calcoliamo il numero di Mach come

(2.1)
$$M=\frac{V_\infty}{\sqrt{\gamma RT}}$$

Ricaviamo quindi un valore pari a 0,088 e possiamo quindi utilizzare la formula della lastra piana nel caso subsonico ovvero

(2.2) $$L = \rho V_\infty^2 c\pi\alpha$$

ottenendo così un valore di portanza per unità di apertura L = 72,482 N/m

CASO B: **V_∞ = 200 m/s**

Come prima calcoliamo il numero di Mach ottenendo questa volta un valore pari a 0,588 che non ci consente di considerare il fluido incomprimibile.
Grazie alla correzione di Prandtl – Glauert per il caso comprimibile subsonico (valido fino a valori di Mach inferiori a 0,7) possiamo utilizzare i risultati ottenuti nel caso incomprimibile modificandoli (aumentandoli) del fattore correttivo 1/β dove

(2.3) $$\beta = \sqrt{1 - M_\infty^2}$$

Svolgendo i conti otteniamo β = 0,809 e la nuova portanza per unità di apertura sarà quindi

(2.4) $$L = \frac{1}{\beta}\rho V_\infty^2 c\pi\alpha$$

Ottenendo così un valore di L = 3982 N/m

CASO B: **V_∞ = 600 m/s**

Se calcoliamo il nuovo numero di Mach otteniamo un valore pari a 1,763, siamo quindi in un caso comprimibile supersonico. Il fattore correttivo sarà allora definito come

(2.5) $$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$$

e pari a 1,452
Per quanto riguarda il c_L possiamo utilizzare il caso della lastra piano in regime supersonico ovvero

(2.6) $$c_L = \frac{4}{\beta}\alpha$$

Ricavando così la formula della portanza nel caso della lastra piana in regime supersonico

(2.7) $$L = \frac{2}{\beta}\rho V_\infty^2 c\alpha$$

Passando ai numeri otteniamo così un valore di L = 12709 N/m

ESERCIZIO 3

N = 10; C = 10; T = 288,15 K; ρ = 1,225 Kg/m^3

Dobbiamo trova le velocità e le pressioni dopo gli spigoli. Sapendo che il numero di Mach iniziale è 1,8 e α pari a 7°, dalle tabelle trovo che l'angolo di deflessione β è pari a 41°. Da qui mi ricavo il numero di Mach tangenziale e normale secondo le relazioni

(3.1)
$$M_{1n} = M_\infty \sin\beta$$
$$M_{1t} = M_\infty \cos\beta$$

Una volta effettuato il conto otteniamo M_{1n} = 1,18 e M_{1t} = 1,358. Dalle tabelle delle relazioni tra i M_n otteniamo M_{2n} = 0,85 e i vari rapporti di pressione, di velocità e di temperatura con i quali ricaviamo secondo la seguente relazione

(3.2)
$$M_{2t} = M_{1t}\sqrt{\frac{T_1}{T_2}}$$

e quindi un M_{2t} = 1,286, una p_2 = 1,458 bar e un M_2 = 1,541.

La velocità V_1 = 612,47 m/s diventa dopo l'urto pari a V_2 = 468,65 m/s.

Adesso utilizziamo la funzione di Prandtl – Meyer per ricavare il nuovo valore del numero di Mach dopo il secondo spigolo. Mettiamoci in un sistema di riferimento parallelo alla salita e grazie alla costanza delle invarianti di Riemann possiamo scrivere

(3.3)
$$\nu(M_2) + \theta_2 = \nu(M_3) - \theta_3$$

con θ_2 = 0 e θ_3 = 7°, ricaviamo così che $\nu(M_3)$ = 20,09 il che corrisponde a un M_3 = 1,78.

Essendo poi

(3.4)
$$\frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M_2^2}{1+\frac{\gamma-1}{2}M_3^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Ricaviamo che T_3/T_2 = 0,9028 e p_3/p_2 = 0,699 da cui p_3=1,019 bar e V_3= 607,67m/s

Un ringraziamento speciale per la collaborazione allo svolgimento degli esercizi a
Anselmo Recanati