Soluzione del tema del 22 Luglio 2003

Nicola Morganti & Alessandro Pasquino

Esercizio 1

Descrivere il flusso bidimensionale rappresentato dal potenziale cinetico $\varphi = 7x + 2\log(r)$. Disegnare le linee di corrente e le linee equipotenziali. Calcolare la velocità nel punto di coordinate (1,0.5).

Soluzione

Esprimiamo il potenziale in coordinate cartesiane:

$$\varphi(x, y) = 7x + 2\log\sqrt{x^2 + y^2} = 7x + \log(x^2 + y^2)$$

e ricaviamo quindi le componenti u e v della velocità:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 7 + \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

Sostituendo i valori $x = 1$ e $y = 0.5$ otteniamo $u = 8.6$ e $v = 0.8$. La velocità nel punto avrà quindi modulo:

$$V = \sqrt{u^2 + v^2} = 8.64\ m/s$$

Esercizio 2

Calcolare la resistenza d'onda (per unità di apertura) di una lastra piana della lunghezza di 0.5+0.1N metri, investita da una corrente uniforme in condizioni standard con $M_\infty = 1.5$, all'incidenza di 3 gradi.

Soluzione (N = 10; C = 10; $T_0 = 288.15\ K$; $\rho = 1.225\ Kg/m^3$; $R = 287\ J/(Kg \cdot K)$)

Calcoliamo innanzitutto il fattore di correzione di Prandlt-Glauert β:

$$\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1} = 1.118$$

che ci permette di calcolare il c_d della lastra come:

$$c_d = \frac{4}{\beta}\alpha^2 = 0.0098$$

Ricaviamo quindi la V_∞ come:

$$V_\infty = M_\infty\sqrt{\gamma R T_0} = 510.39\ m/s$$

Abbiamo quindi tutto ciò che ci occorre per calcolare la resistenza d'onda:

$$D = c_d c \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 = 2345.46 \ N/m$$

Esercizio 3

La scia nella regione molto a valle di un'ala tridimensionale, molto distante dal suolo, può essere schematizzata come due vortici puntiformi di intensità Γ, separati fra loro da una distanza b. Calcolare modulo e verso della velocità verticale indotta dai due vortici nel punto mediano. Calcolare inoltre lo stessa quantità quando i due vortici si trovano alla distanza h dal suolo. Dati numerici: $\Gamma = 72 \ m^2/s$, $b = 92 \ m$, $h = 5 \ m$.

Soluzione (N = 10; C = 10;)

Sappiamo che i vortici d'estremità di un'ala tridimensionale sono controrotanti e dovuti al fatto che l'ala è finita e ha una differenza di pressione tra dorso e ventre. Possiamo quindi schematizzare la situazione come in figura 1.

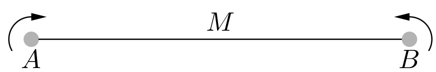

Figura 1: Vortici controrotanti

Essendo poi i vortici molto lontani dal suolo e quindi completamente liberi di evolvere indisturbati possiamo dire che la velocità nel punto mediano sarà rivolta verso il basso e di modulo doppio a quella causata dalla presenza di un singolo vortice. Fissiamo l'origine del nostro sistema di riferimento al centro del vortice A e scriviamo la funzione di corrente[1]:

$$\psi(x, y) = \frac{\Gamma}{2\pi} \log \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \log(x^2 + y^2)$$

Poichè i vortici sono controrotanti il problema è simmetrico e quindi nel punto M abbiamo l'annullarsi della componente u di velocità e il raddoppio della componente v. Calcoliamo quest'ultima come:

$$v(x, y) = -\frac{\partial \psi}{\partial \psi} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Valutiamola quindi nel punto $M(b/2, 0)$ e otteniamo

$$v = -\frac{\Gamma}{\pi b}$$

Dobbiamo quindi considerare anche il contributo dell'altro vortice ottenendo

$$v_M = -\frac{2\Gamma}{\pi b} = -0.498 \ m/s$$

Adesso dobbiamo calcolare la stessa quantità, ma con i vortici che distano h dal suolo. Questo problema si risolve immediatamente con il metodo delle immagini posizionando altri due vortici controrotanti a distanza $-h$ dal suolo. Ci troviamo quindi a lavorare con 4 vortici, ma essendo il problema simmetrico, possiamo ricondurci alla situazione di figura 2.

[1] Il vortice ruota in senso orario quindi va cambiato il segno alla $\psi(x, y)$

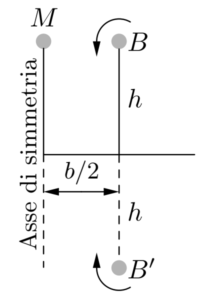

Figura 2: Configurazione simmetrica di riferimento, B' vortice immagine

Supponiamo quindi di utilizzare un sistema di riferimento centrato con l'immagine B'. Scriviamo quindi le due funzioni di corrente:

$$\psi_{B'}(x,y) = \frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\log(x^2+y^2)$$
$$\psi_B(x,y) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\log\sqrt{x^2+(y-2h)^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\log\left[x^2+(y-2h)^2\right]$$

Anche in questo caso, grazie alla simmetria, l'unica componente di velocità che sopravviverà sarà la v:

$$v_{B'}(x,y) = -\frac{\partial\psi}{\partial\psi_{B'}} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+y^2}$$
$$v_B(x,y) = \frac{\partial\psi}{\partial\psi_B} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{x}{x^2+(y-2h)^2}$$

Avremo quindi che la velocità nel punto $M(-b/2, 2h)$ dovuta a questa "semi-configurazione" sarà:

$$v_{M_{simm}} = v_{B'}(-b/2,2h) + v_{B'}(-b/2,2h) = -\frac{\Gamma}{\pi}\frac{16h^2}{b^3+16h^2b} = -0.01124m/s$$

Grazie alla simmetria della nostra configurazione, adesso basta raddoppiare il risultato appena ottenuto per trovare la velocità nel punto mediano quando i due vortici sono ad un altezza h dal suolo:

$$v_M = 2\cdot v_{M_{sim}} = -0.02248m/s$$