Soluzione del tema del 01 Marzo 2004

Marco Bonfanti

Esercizio 1

Calcolare e/o diagrammare qualitativamente le due componenti di velocità $u_{sp}(x)$ e $v_{sp}(x)$ dovute alla distribuzione di spessore di un profilo sottile, il cui dorso e ventre sono descritti dalle equazioni:

$$y_d(x) = -\varepsilon x^2 \quad y_v(x) = -\varepsilon x$$

Supporre il moto bidimensionale e adottare le ipotesi che consentono di utilizzare l'equazione di Laplace.

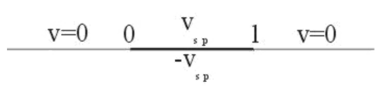
Soluzione

Dalle rispettive definizioni, sostituendo le espressioni assegnate per $y_d(x)$ e $y_v(x)$:

$$y_{sp}(x) = y_d(x) - y_v(x) = -\varepsilon(x^2 - x)$$

$$v_{sp}(x) = \frac{1}{2}\frac{dy_{sp}}{dx} = -\varepsilon\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Il problema dello spessore risulta antisimmetrico per la $v(x)$, quindi si hanno le seguenti condizioni al contorno omogenee:



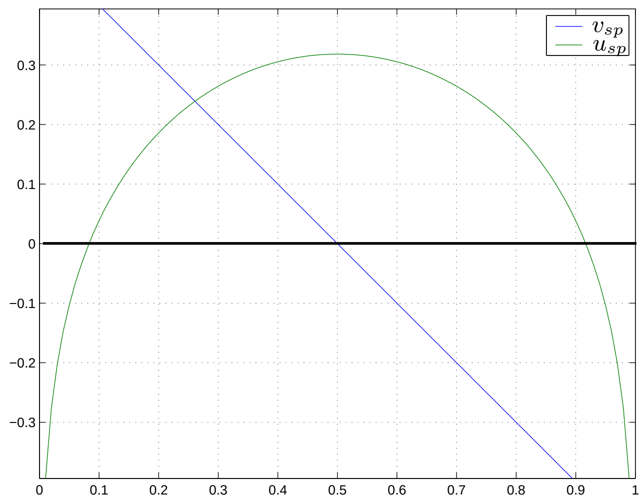
e per mezzo della formula di Hilbert:

$$u_{sp}(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^1 \frac{-v_{sp}(x)}{x - x_0}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{x - 1/2}{x - x_0}dx =$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{x + x_0 - x_0 - 1/2}{x - x_0}dx = \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 dx + \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^1 \frac{x_0 - 1/2}{x - x_0}dx =$$

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\left[x\Big|_0^1 + (x_0 - 1/2)\ln|x - x_0|\Big|_0^1\right] = \frac{\varepsilon}{\pi}\left[1 + (x_0 - 1/2)\ln\left|\frac{1 - x_0}{x_0}\right|\right]$$

Gli andamenti delle velocità saranno:



Esercizio 2

La corrente a monte di un urto normale è in condizioni standard a $M = 2.5$. Calcolare il valore delle variabili fluidodinamiche a valle dell'urto.

Soluzione ($\rho = 1.225\ kg/m^3$; $p = 1\ atm = 101325\ Pa \quad T = 288.15\ K$; $R = 287 J/(kg \cdot k)$; $\gamma = 1.4$; $C_p = 1004.5 J/(kg \cdot k)$)

Le condizioni a monte dell'urto sono:

$$\begin{array}{ll} \rho_1 = \rho_\infty & M = 2.5 \\ p_1 = p_\infty & a_1 = \sqrt{\gamma R T_1} = 340.263\ m/s \\ T_1 = T_\infty & u_1 = M \cdot a_1 = 850.657\ m/s \end{array}$$

Determino la velocità critica:

$$\frac{a_*^2}{\gamma - 1} + \frac{a_*^2}{2} = \frac{a_1^2}{\gamma - 1} + \frac{u_1^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a_* = \sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}\left(\frac{a_1^2}{\gamma-1} + \frac{u_1^2}{2}\right)} = 465.924\ m/s$$

Per un urto normale abbiamo:

$$u_1 * u_2 = a_*^2 \quad \Rightarrow \quad u_2 = 255.297\ m/s$$

Ora dalle leggi di conservazione:

- della massa:

$$\rho_1 \cdot u_1 = \rho_2 \cdot u_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{u_1}{u_2} = 4.082\ kg/m^3$$

- della quantità di moto:

$$\rho_1 u_1^2 + p_1 = \rho_2 u_2^2 + p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \rho_1 u_1^2 + p_1 - \rho_2 u_2^2 = 721706\ Pa = 7.12\ atm$$

- dell'energia:

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} = h_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad C_P T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_P T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad \Rightarrow$$
$$T_1 + \frac{u_1^2}{2C_P} = T_2 + \frac{u_2^2}{2C_P} \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_1 + \frac{u_1^2}{2C_P} - \frac{u_2^2}{2C_P} = 615.9\ K$$

Quindi a valle dell'urto:

$$a_2 = \sqrt{\gamma R T_2} = 497.462\ m/s$$
$$M_2 = \frac{u_2}{a_2} = 0.513$$

Alternativamente, "ricordandosi" le formule, si arriva agli stessi risultati più rapidamente, direttamente da M_1:

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}} = 0.513$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{(\gamma + 1) M_1^2}{2 + (\gamma - 1) M_1^2} = 4.082\ kg/m^3$$

$$p_2 = p_1 \left[1 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right)\left(M_1^2 - 1\right)\right] = 721706\ Pa = 7.12\ atm$$

$$T_2 = T_1 \left[1 + \left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}\right)\left(M_1^2 - 1\right)\right]\left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_1^2}{(\gamma + 1) M_1^2}\right] = 615.9\ K$$